GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DE ENTRADA

MATERIAL DE APOIO PARA O PROFESSOR

9º ano do Ensino Fundamental

Prova de Matemática

São Paulo
1º Semestre de 2020

Avaliação Diagnóstica de Entrada

APRESENTAÇÃO

A política educacional da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo explicita em seu Plano Estratégico 2019-2022 a nossa missão: "garantir a todos os estudantes aprendizagem de excelência e a conclusão de todas as etapas da educação básica na idade certa".

Para alcançar esse propósito, os processos avaliativos exercem um papel essencial. As avaliações diagnósticas e formativas se complementam com a finalidade de apoiar o trabalho dos professores, direcionando-o para as necessidades de aprendizagem dos estudantes. Aqui se inserem a Avaliação Diagnóstica de Entrada – ADE - e a Avaliação da Aprendizagem em Processo – AAP - que neste ano estão planejadas de forma articulada ao Calendário Escolar 2020, em momentos-chave do ano para utilização de seus resultados como apoio às escolas, oferecendo suporte às Semanas de Estudos Intensivos, às ações contínuas de recuperação, aprofundamento e replanejamento ao longo dos bimestres.

O desenho pedagógico das avaliações aplicadas a todos os anos/séries do ensino fundamental e do ensino médio, que inclui a ADE e a AAP, está articulado ao currículo, envolvendo ação integrada dos diferentes departamentos da Coordenadoria Pedagógica. Adota o Currículo Paulista como referencial no ensino fundamental, e no ensino médio o currículo oficial ainda vigente para esta etapa.

A **Avaliação Diagnóstica de Entrada – ADE** – que constitui o conteúdo deste primeiro documento – aplicada no início do ano letivo, **é focada exclusivamente nas habilidades de anos/séries anteriores essenciais para o percurso educacional dos estudantes,** necessárias à aquisição das habilidades do currículo previstas para o ano a ser iniciado. Permitirá a identificação, de forma mais precisa, das reais necessidades de aprendizagem dos estudantes, explicitando tanto as habilidades que mais dominam como aquelas que necessitam de maior atenção.

Já as AAP, enquanto avaliações formativas bimestrais, trarão majoritariamente habilidades previstas no currículo (Currículo Paulista para o ensino fundamental e currículo oficial ainda vigente no ensino médio) para os respectivos bimestres do ano em curso e, como inovação, incluirão também algumas habilidades de percurso - as anteriores que devem ser desenvolvidas ou consolidadas para a continuidade do processo de aprendizagem.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação – Prova do Aluno – foram elaborados os correspondentes materiais de apoio ao docente, contendo os quadros de habilidades, questões, gabaritos, orientações para aplicação (no caso dos anos iniciais do ensino fundamental) e recomendações pedagógicas para cada prova.

Ao contrário das avaliações de sistema em larga escala, as questões das avaliações ADE e AAP não são sigilosas. As provas impressas são enviadas para as Diretorias de Ensino em pacotes abertos, para entrega às escolas, e publicadas na Intranet ao final da sua aplicação. Isso porque é um material de apoio para o trabalho pedagógico. Sendo assim, é fundamental que todos os envolvidos no processo se conscientizem da importância de não divulgar os gabaritos enquanto durar a aplicação, pois isto apenas prejudica a fidedignidade dos diagnósticos e consequentemente o trabalho pedagógico a partir das necessidades dos estudantes.

Os registros resultantes da ADE, das AAP e do Saresp, inseridos na Secretaria Escolar Digital - SED e apresentados na Plataforma Foco Aprendizagem, agregados aos que a escola e o professor já possuem a partir de suas avaliações internas, oferecem informações preciosas para o planejamento, replanejamento e acompanhamento das ações pedagógicas, sobretudo aquelas relacionadas aos processos de recuperação e aprofundamento.

Esperamos que as avaliações e orientações pedagógicas sejam efetivamente subsídios concretos à ação docente para a necessária intervenção pedagógica a favor da melhoria da aprendizagem de todos os nossos estudantes.

Coordenadoria Pedagógica (COPED)

Avaliação Diagnóstica de Entrada - Matemática

A premissa básica a respeito de um processo avaliativo deve ser considerada como instrumento que subsidiará tanto o estudante no seu desenvolvimento cognitivo, quanto ao professor no redimensionamento de sua prática pedagógica.

Desta forma, a avaliação da aprendizagem passa a ser um instrumento que auxiliará o educador a atingir os objetivos propostos em sua prática educativa, neste caso a avaliação sob essa ótica deve ser tomada na perspectiva diagnóstica, servindo como instrumento para detectar as dificuldades e possibilidades de desenvolvimento do educando.

Neste sentido, as 12 questões que constam deste caderno, procuram verificar o nível de desenvolvimento das habilidades descritas para a Avaliação Diagnóstica de Entrada 2020 de Matemática que subsidiarão o trabalho no ano letivo.

Assim, a avaliação haverá que ser percebida como um processo de mapeamento e da diagnose do processo de aprendizagem, ou seja, a obtenção de indicadores qualitativos do processo de ensino-aprendizagem no trabalho docente.

Seguindo esta concepção, o Currículo Paulista destaca que:

> [...] a avaliação produz informações valiosas no que diz respeito à aprendizagem dos estudantes, às necessidades de recuperação e de reforço das aprendizagens, à própria prática em sala de aula, permitindo adequações e mudanças metodológicas.
>
> Desta forma, avaliar demanda um olhar atento do professor em relação aos avanços, assim como pensar em instrumentos pelos quais possa, de fato, diagnosticar as aprendizagens dos estudantes e seus níveis de proficiência a respeito do que lhes foi ensinado e planejar ações necessárias para que todos possam aprender. SÃO PAULO, 2018, p. 42

É importante salientar que as observações que constam nos Comentários e Recomendações Pedagógicas deste caderno são pressupostos de resolução, cabendo ao professor analisar os registros dos estudantes.

É importante o professor realizar uma análise de acordo com a realidade do processo de ensino-aprendizagem desenvolvido em sala de aula.

EQUIPE CURRICULAR DE MATEMÁTICA

COPED – CEFAF e CEM

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DE ENTRADA

Matriz de Referência – 9º ano do Ensino Fundamental

Questão	Habilidade
1	Resolver situações-problema que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais.
2	Relacionar um número racional com um conjunto de frações equivalentes.
3	Localizar números racionais na reta.
4	Localizar números racionais na reta.
5	Relacionar um número racional com um conjunto de frações equivalentes.
6	Resolver situações-problema que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais.
7	Identificar a expressão algébrica que representa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.
8	Interpretar graficamente a solução de um sistema linear.
9	Interpretar graficamente a solução de um sistema linear.
10	Identificar a expressão algébrica que representa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.
11	Resolver situações-problema que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais.
12	Resolver situações-problema que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais.

GABARITO

QUESTÃO	A	B	C	D
1				X
2		X		
3		X		
4		X		
5			X	
6		X		
7		X		
8	X			
9	X			
10				X
11		X		
12				X

Habilidade
Resolver situações-problema que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais.

Questão 01

Na equipe de halterofilismo de um clube existem 48 atletas. A relação entre atletas homens e mulheres é de 6 para 2.

A quantidade de homens e de mulheres desta equipe é, respectivamente,

(A) 42 e 6.

(B) 40 e 8.

(C) 38 e 10.

(D) 36 e 12.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante calcule o número absoluto de homens e mulheres em uma equipe, dada sua proporção, o que envolve a habilidade de resolver situações-problema que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais. Tomando por base o Currículo Paulista, a habilidade em questão é a EF08MA13, que trata de "resolver e elaborar situações-problema que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas".

Uma das maneiras mais naturais de desenvolver essa situação-problema é utilizar o conceito de Frações Equivalentes. Para fazê-lo, o estudante pode perceber que, nas condições do enunciado, a razão entre o número H de homens e o número M de mulheres na equipe deve ser sempre a mesma, independentemente do tamanho da equipe. Portanto, a fração $\frac{H}{M}$ é invariante, bastando determinar uma fração equivalente àquela que pode ser construída com o dado já fornecido:

"A relação entre atletas homens e mulheres é de 6 para 2."

Fração correspondente

$$\frac{H}{M} = \frac{6}{2}\ ou\ \frac{3}{1}$$

Dessa maneira, é possível variar o fator multiplicativo do numerador e do denominador para determinar a composição da equipe com vários tamanhos:

Fator multiplicativo	Fração Equivalente	Composição da equipe	Número total de atletas

$\times 1$	$\frac{6}{2}$	6 homens 2 mulheres	8 atletas
$\times 2$	$\frac{12}{4}$	12 homens 4 mulheres	16 atletas
$\times 3$	$\frac{18}{6}$	18 homens 6 mulheres	24 atletas
$\times 4$	$\frac{24}{8}$	24 homens 8 mulheres	32 atletas
$\times 5$	$\frac{30}{10}$	30 homens 10 mulheres	40 atletas
$\times 6$	$\frac{36}{12}$	36 homens 12 mulheres	48 atletas

Dessa maneira, determina-se que a equipe de 48 atletas, na proporção estabelecida, deve conter 36 homens e 12 mulheres.

É possível, ainda, que alguns estudantes representem esse problema por meio de um sistema de equações lineares, utilizando o número total de atletas como condição de contorno e mantendo fixa a proporção entre homens (H) e mulheres (M):

$$\begin{cases} H + M = 48 \\ \dfrac{H}{M} = \dfrac{6}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3M + M = 48 \\ \dfrac{H}{M} = \dfrac{6}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 12 \\ \dfrac{H}{12} = \dfrac{6}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M = 12 \\ H = 36 \end{cases}$$

Qualquer uma das estratégias comentadas leva à alternativa **D** (36 e 12) como resposta correta da questão.

As demais alternativas não apresentam diferenças significativas de percurso cognitivo[1] entre si, de modo que podem ser associados a confusões ou erros de aritmética no processo de simplificação das frações ou na resolução do sistema linear.

O professor deve atentar para grupos de estudantes que sinalizem dificuldades com essa questão. Ao perceber isso, recomenda-se o trabalho da sequência

[1] Nota dos autores: entende-se aqui a expressão "percurso cognitivo" como o encadeamento consciente de conhecimentos conceituais e procedimentais e as ações efetivamente tomadas pelos estudantes confrontados pela situação-problema, acreditando que esse processo os levará à resolução. Nesse contexto, a expressão significa que não é possível delimitar nenhuma outra estratégia de resolução que programaticamente conduza a uma das alternativas.

didática de **Proporcionalidade**[2], durante o período letivo e dentro das possibilidades do planejamento. Uma maneira interessante de realizar esse trabalho é empregando Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem baseada em Problemas. Para empregar essa abordagem, o professor percorrerá a sequência didática junto com os estudantes, apresentando as situações-problema a cada atividade e problematizando suas soluções, construindo junto com a sala de aula as metodologias para resolução e estimulando que os estudantes debatam entre si os possíveis algoritmos. As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Resolver situações-problema que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais.

- Resolver problemas aplicando o Teorema de Tales.

Além da sequência didática sugerida, o professor pode encontrar materiais de apoio nas seguintes referências:

- Comparando frações. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=7057>. Acesso em: 02 dez. 2019.

- Números Diretamente e Inversamente Proporcionais – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c89zmwon6cgks.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2019.

- Propriedades de Proporções – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bqdfaxbu33cow.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2019.

Habilidade
Relacionar um número racional com um conjunto de frações equivalentes.

Questão 02

Observe as frações a seguir e responda à questão.

I - $\frac{2}{10}$

[2] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FProporcionalidade%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

II – $\frac{1}{20}$

III – $\frac{6}{30}$

IV – $\frac{20}{10}$

V – $\frac{30}{15}$

Assinale a alternativa que apresenta as duas frações equivalentes ao número 0,2.

(A) I e II.

(B) I e III.

(C) II e III.

(D) IV e V.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante identifique, dentre as frações apresentadas, aquelas que equivalem ao número 0,2, o que envolve a habilidade de relacionar um número racional com um conjunto de frações equivalentes. Ao considerar o Currículo Paulista, a questão avalia a habilidade EF06MA07, descrita por "compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes".

A maneira mais intuitiva de resolver o problema é realizar a conversão de cada uma das frações para fração irredutível (quando aplicável) e, em seguida, determinar o valor da razão entre o numerador e o denominador na forma de número decimal, conforme mostrado a seguir:

Fração fornecida	Fração irredutível equivalente	Representação decimal
$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{5}$	0,2
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0,05
$\frac{6}{30}$	$\frac{1}{5}$	0,2
$\frac{20}{10}$	$\frac{2}{1}$	2,0
$\frac{30}{15}$	$\frac{2}{1}$	2,0

Portanto, dado que as frações $\frac{2}{10}$ (I) e $\frac{6}{30}$ (III) são equivalentes a 0,2, e a alternativa que responde adequadamente à questão é **B** (I e III).

A escolha das alternativas A (I e II) e C (II e III), opções que apresentam em comum a determinação de $\frac{1}{20}$ como fração equivalente a 0,2, demonstram possivelmente um tipo de erro recorrente durante o aprendizado de frações (que se inicia ainda durante os anos iniciais do Ensino Fundamental), em que o estudante possivelmente, considera que o denominador ou o numerador correspondem numericamente à parte decimal, copiando o numeral sem realizar a operação de divisão.

A alternativa D (IV e V) apresenta duas frações nas quais o numerador é superior ao denominador, ambas são superiores à unidade e não podem ser consideradas equivalentes a um número entre zero e um (0,2). Ao escolher essa resposta, o estudante provavelmente sinaliza que não determina corretamente o número racional equivalente a essas frações, mas também – quando encontra o resultado – possivelmente deixa de verificar sua validade frente à notação fracionária original. O professor deve sempre reagir ativamente a esse tipo de erro, que fornece um diagnóstico da própria maneira como o estudante operacionaliza a resolução de problemas, orientando a boa prática da validação dos resultados.

Ao perceber que algum grupo de estudantes sinalizou dificuldade nessa questão, o professor pode (durante o período letivo e conforme surgir oportunidade) trabalhar a sequência didática de **Números Racionais-Representações**[3]. Nesse caso, será interessante propor atividades que empreguem Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Ao adotar essa abordagem, dividirá os estudantes em equipes (aproximando aqueles com níveis de conhecimento similares) e oferecerá atividades para que realizem em conjunto, discutindo suas respostas, construindo colaborativamente suas resoluções, apresentando posteriormente seus resultados e debatendo com a classe suas conclusões.

As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Localizar números racionais na reta.

- Reconhecer as diferentes representações de um número racional.

- Relacionar um número racional com um conjunto de frações equivalentes.

---

[3] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FN%C3%BAmeros%20Racionais%5FRepresenta%C3%A7%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

Nas seguintes referências estão elencados alguns materiais que podem ajudar o professor a se capacitar para as atividades propostas:

- RESNICK, L. et al. **Conceptual Bases of Arithmetic Errors**: The Case of Decimal Fractions. Journal for Research in Mathematics Education, 1989, 20. DOI: 10.2307/749095. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/245760694_Conceptual_Bases_of_Arithmetic_Errors_The_Case_of_Decimal_Fractions>. Acesso em: 07 jan. 2020.

- Porcentagens, frações e decimais. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=4860>. Acesso em: 29 nov. 2019.

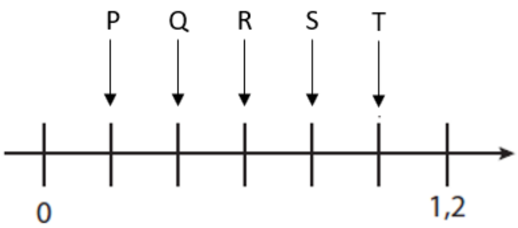
- Frações, construindo o conceito. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=12831>. Acesso em: 29 nov. 2019.

- Plano de aula - Representando frações com números. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/259/representando-fracoes-com-numeros>. Acesso em: 29 nov. 2019.

Habilidade
Localizar números racionais na reta.

Questão 03

Veja a reta numérica desenhada a seguir e responda ao que se pede.



Quais são os pontos que representam $\frac{6}{15}$ e 100%, respectivamente?

(A) S e T.

(B) Q e T.

(C) R e P.

(D) S e P.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante associe pontos marcados em uma reta numérica com dois números fornecidos, respectivamente na forma de fração e de porcentagem. Essa questão envolve a habilidade de localizar números racionais na reta, que, de acordo com o Currículo Paulista, equivale à habilidade EF07MA10, "ler, comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica".

A primeira atitude do estudante, ao enfrentar a situação-problema apresentada, deve ser estimar ou determinar a localização de cada um dos pontos fornecidos (P, Q, R, S e T) na reta numérica. Para isso, deve perceber que o intervalo $[0;\ 1{,}2]$ foi dividido em 6 intervalos menores e iguais, de comprimento l tal que:

$$l = \frac{1{,}2 - 0}{6} = 0{,}2$$

Portanto, o ponto P equivale a 0,2; o ponto Q equivale a 0,4; o ponto R equivale a 0,6; o ponto S equivale a 0,8 e o ponto T equivale a 1,0.

Em seguida, o estudante deve determinar o número decimal equivalente a cada um dos números racionais fornecidos no enunciado:

$$\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

Ponto Q

$$100\% = \frac{100}{100} = 1$$

Ponto T

Chegando à conclusão que a alternativa **B** ("Q e T") responde à questão adequadamente.

Alguns estudantes podem determinar, erroneamente, que o número 100% equivale ao ponto P (tal qual acontece nas alternativas C ("R e P") e D ("S e P")). Aqueles que o fazem chegam a determinar corretamente que o número 100% equivale a 1, porém possivelmente interpretam a figura da reta numérica de forma incorreta, inferindo que os pontos demarcados (P, Q, R, S, T) correspondem aos números inteiros que sucedem o número 0, cujas posições seriam 1, 2, 3, 4 e 5.

Vale ressaltar que o comando explicita que devem ser indicados "os pontos que representam $\frac{6}{15}$ e 100%, **respectivamente**". Os estudantes que optam pelas alternativas C ("R e P") e D ("S e P") podem não ter convertido um desses números corretamente para a representação decimal, ou não chegaram a tentar ordenar os números questionados para perceber essa relação.

Professor, ao perceber que certo grupo de estudantes demonstrou dificuldades com essa questão, será proveitoso trabalhar – durante o período letivo e dentro das possibilidades do planejamento – a sequência didática de **Números**

Racionais - Representações[4]. Sugere-se aqui a aplicação de Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Para tal, o professor dividirá os estudantes em equipes, aproximando aqueles com níveis de conhecimento próximos, para que executem em conjunto as tarefas da sequência, cooperando entre si para resolver de maneira colaborativa as situações-problema propostas, buscando seus caminhos para resolução e debatendo suas descobertas. As habilidades pertencentes a essa sequência são:

- Localizar números racionais na reta.

- Reconhecer as diferentes representações de um número racional.

- Relacionar um número racional com um conjunto de frações equivalentes.

Alguns materiais de referência podem ser encontrados a seguir:

- Frações, construindo o conceito. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=12831>. Acesso em: 29 nov. 2019.

- Plano de aula - Representando frações com números. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/259/representando-fracoes-com-numeros>. Acesso em: 29 nov. 2019.

Habilidade
Localizar números racionais na reta.

Questão 04

A fração $\frac{8}{3}$ está representada na reta numérica, no intervalo que fica entre:

(A) 3 e 4

(B) 2 e 3

(C) 1 e 2

[4] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FN%C3%BAmeros%20Racionais%5FRepresenta%C3%A7%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

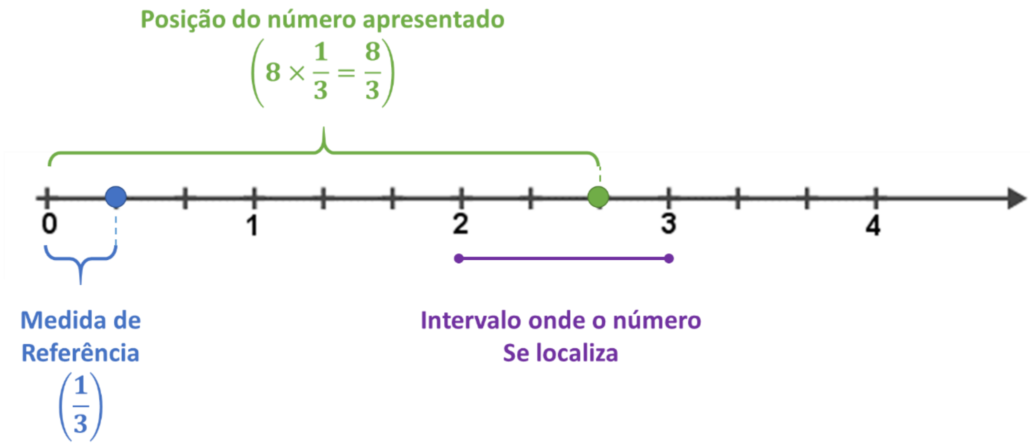
(D) 0 e 1

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante indique o intervalo de uma reta numérica ao qual pertence uma fração apresentada, de modo a avaliar a habilidade de localizar números racionais na reta. Conforme o Currículo Paulista, está envolvida a habilidade EF07MA10, "ler, comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica".

Frações possuem diferentes significados, que são selecionados de acordo com o contexto de sua aplicação ou sua condição de contorno, conforme exposto por Nunes (2003)[5] apud Merlini (2005)[6]. Nesse exemplo, trata-se de compreender a *fração como número*, ou seja, uma fração $\frac{a}{b}$, com $b \neq 0$, é um número racional, ao qual pode ser associada uma representação decimal e que pode ser localizado na reta numérica. Cabe observar que, nesse exemplo, procedimentalmente, o estudante pode tangenciar (corretamente) outro significado, compreendendo a *fração como medida*: a posição a ser determinada corresponde a 8 incrementos de um intervalo de referência que mede $\frac{1}{3}$ (no caso, $\frac{1}{3}$ do intervalo entre 0 e 1 na reta numérica).

Estando a reta numérica apresentada dividida em intervalos de $\frac{1}{3}$, é possível que a segunda interpretação prevaleça, de modo que o estudante percebe a posição do número $\frac{8}{3}$ como correspondente à oitava marcação sucessiva da reta numérica:



[5] NUNES, T. et al. The effect of situations on children's understanding of fractions. In: **British Society for Research on the Learning of Mathematics**. Oxford, 2003.
[6] MERLINI, V. L. **O conceito de frações em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª série do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11111/1/dissertacao_vera_lucia_merlini.pdf>. Acesso em: 13 jan. 2020.

Contudo, espera-se que grande parte dos estudantes determinem o número decimal correspondente à fração ordinal apresentada utilizando a divisão euclidiana entre o numerador e o denominador:

$$
\begin{array}{l|l}
8 & 3 \\ \cline{2-2}
20 & 2{,}666\ldots \\
\ \ 20 & \\
\ \ \ \ 20\ldots &
\end{array}
$$

O quociente descoberto é um decimal periódico, que pode ser representado como $2,\overline{6}$. Observando essa representação, é claro que se trata de um número maior que 2,0 e inferior a 3,0.

Ambos os caminhos levam à conclusão de que o número $\frac{8}{3}$ está localizado no intervalo entre 2 e 3, conforme afirmado na alternativa **B**.

As demais alternativas apresentam as possíveis subdivisões da reta, de modo que não há um motivo determinístico que leve a cada uma delas. No caso das alternativas A (3 e 4) e C (1 e 2), por exemplo, pode ter ocorrido um erro na realização da divisão euclidiana, em que é determinada a parte inteira do quociente como 1 ou 3 ao invés de 2. Na hipótese de interpretação da fração como medida, a estimativa inadequada da posição de referência $\left(\frac{1}{3}\right)$ na reta numérica pode levar a um intervalo incorreto.

A fração em questão apresenta numerador maior que o denominador e, portanto, é maior que a unidade. Estudantes que marcam a alternativa D (0 e 1) não compreendem que, quando a fração tem significado de número, o valor comparado de ambos os seus componentes fornece subsídio para exclusão de certo intervalo da reta numérica (números entre 0 e 1 ou números maiores que 1, e intervalos análogos no caso de números negativos). Outra hipótese para assinalamento dessa alternativa é que os estudantes tenham invertido o significado do numerador e do denominador, determinando – ainda que aproximadamente – a posição da fração $\frac{3}{8}$.

Professor, ao perceber que algum grupo de estudantes sinalizou dificuldade nessa questão, a sugestão é que trabalhe com eles a sequência didática de **Números Racionais - Representações**[7]. Essa atividade deve ser realizada durante o período letivo, em momento oportuno no planejamento. Dentre as

[7] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FN%C3%BAmeros%20Racionais%5FRepresenta%C3%A7%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

diferentes formas de realizar esse trabalho, destaca-se a utilização de Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Seguindo essa abordagem, deve-se dividir os estudantes em equipes, respeitando os níveis de conhecimento de cada um, propondo posteriormente que realizem as atividades em colaboração, debatendo seus caminhos e conclusões. A intenção é estimular descobertas e permitir que os estudantes aprendam uns com os outros.

As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Localizar números racionais na reta.

- Reconhecer as diferentes representações de um número racional.

- Relacionar um número racional com um conjunto de frações equivalentes.

A consulta às seguintes referências pode ajudar o professor a se preparar melhor para as atividades propostas:

- RESNICK, L. et al. **Conceptual Bases of Arithmetic Errors**: The Case of Decimal Fractions. Journal for Research in Mathematics Education, 1989, 20. DOI: 10.2307/749095. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/245760694_Conceptual_Bases_of_Arithmetic_Errors_The_Case_of_Decimal_Fractions>. Acesso em: 07 jan. 2020.

- Porcentagens, frações e decimais. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=4860>. Acesso em: 29 nov. 2019.

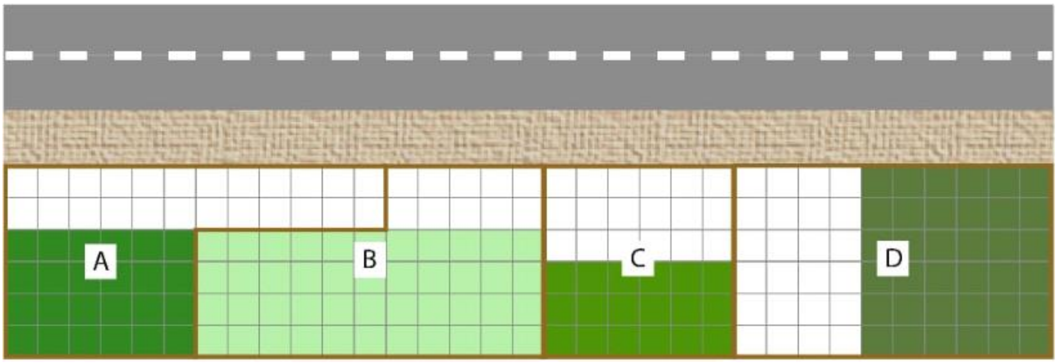
- Frações, construindo o conceito. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=12831>. Acesso em: 29 nov. 2019.

- Plano de aula - Representando frações com números. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/259/representando-fracoes-com-numeros>. Acesso em: 29 nov. 2019.

Habilidade
Relacionar um número racional com um conjunto de frações equivalentes.

Questão 05

Abaixo está esquematizada a planta de quatro terrenos vizinhos, que são delimitados pelas linhas marrons.



Considere que cada quadrado tem lado de 1 metro. Em cada terreno, as áreas destacadas em tons de verde são a fração do terreno onde pode ser perfurado um poço.

Assinale a alternativa que indica os terrenos cujas frações de área que podem ser perfuradas são equivalentes ao número 0,5.

(A) A e B.

(B) B e D.

(C) A e C.

(D) C e D.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante indique os terrenos cuja fração de área que pode ser perfurada é equivalente à metade de sua área, de modo a avaliar a habilidade de relacionar um número racional com um conjunto de frações equivalentes. Se for considerado o Currículo Paulista, a questão foi concebida de forma a avaliar a habilidade EF06MA07: "compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes".

Para responder corretamente a essa questão, o estudante deve, primeiramente, expressar a fração entre a área total e a área perfurável na forma de uma fração ordinal para, em seguida, transformá-la em fração irredutível e finalmente em número decimal. Assim, retomando a informação de que cada quadrado tem 1 metro de lado (e, portanto, área de 1m^2), é possível realizar a seguinte análise, para todos os casos:

Terreno	Área total	Área perfurável	Fração Equivalente	Representação decimal
A	$48\ \text{m}^2$	$24\ \text{m}^2$	$\frac{24}{48} = \frac{1}{2}$	0,5

B	$54\ \mathrm{m}^2$	$44\ \mathrm{m}^2$	$\frac{44}{54} = \frac{22}{27}$	$0,\overline{814}\ldots$
C	$36\ \mathrm{m}^2$	$18\ \mathrm{m}^2$	$\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$	0,5
D	$60\ \mathrm{m}^2$	$36\ \mathrm{m}^2$	$\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$	0,6

De maneira que os únicos terrenos cuja fração perfurável equivale a 0,5 são os terrenos A e C, representados na alternativa **C**.

Os estudantes que escolhem a alternativa A (terrenos "A e B") podem tê-lo feito sem compreender que a questão se refere à comparação de frações e à identificação de frações equivalentes: em ambos os terrenos apontados pela alternativa A, o número de linhas contendo quadradinhos pintados é o mesmo, mas o tamanho dos terrenos (e, portanto, a área pintada e a área total) são diferentes em A e B, de maneira que se pode supor que os estudantes sequer chegaram a construir as frações ordinais equivalentes a cada área perfurável.

Nas alternativas B (terrenos "B e D") e D (terrenos "C e D"), o problema provavelmente está na contagem dos quadradinhos, operacionalização da expressão das frações como frações irredutíveis ou no algoritmo de comparação das frações.

Destaca-se, adicionalmente, que o terreno B é **o único** que apresenta um decimal periódico como representação da fração de solo perfurável. Dessa forma, qualquer alternativa que apresenta o terreno B deveria ter sido excluída pelos estudantes que determinaram corretamente as frações ordinais equivalentes à área perfurável de todos os terrenos.

Dada a importância de dominar os conhecimentos procedimentais relacionados à manipulação de representações dos números racionais, o professor deve estar sempre atento para dificuldades que os estudantes podem apresentar nesse tipo de questão. Ao identificar ocorrências desse tipo, sugere-se trabalhar – dentro do período letivo e das possibilidades do planejamento – a sequência didática de **Números Racionais - Representações**[8]**.** Dentre as formas de fazê-lo, destaca-se o uso de Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem Baseada em

[8] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FN%C3%BAmeros%20Racionais%5FRepresenta%C3%A7%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

Problemas. Nessa abordagem, o professor apresentará as situações-problema da sequência didática, problematizando o uso de números racionais para resolução das mesmas. Posteriormente, os estudantes serão estimulados a discutir entre si as diferentes estratégias possíveis para resolver os problemas e construirão resoluções colaborativamente, de modo a instigar a descoberta de caminhos para resolução e o debate saudável entre os estudantes. As habilidades contidas nessa sequência didática são:

As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Localizar números racionais na reta.

- Reconhecer as diferentes representações de um número racional.

- Relacionar um número racional com um conjunto de frações equivalentes.

Para elaboração de planos de aula ou atividades complementares, podem ser úteis as seguintes referências:

- RESNICK, L. et al. **Conceptual Bases of Arithmetic Errors**: The Case of Decimal Fractions. Journal for Research in Mathematics Education, 1989, 20. DOI: 10.2307/749095. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/245760694_Conceptual_Bases_of_Arithmetic_Errors_The_Case_of_Decimal_Fractions>. Acesso em: 07 jan. 2020.

- Frações, construindo o conceito. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=12831>. Acesso em: 29 nov. 2019.

Habilidade
Resolver situações-problema que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais.

Questão 06

Um carro percorre uma distância de 120 km com 15 litros de combustível. Nas mesmas condições, a distância percorrida com 10 litros de combustível é

(A) 40 km.

(B) 80 km.

(C) 160 km.

(D) 240 km.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante calcule a distância que um carro consegue percorrer com certo volume de combustível, dado que seu consumo é fixo e pode ser inferido pela proporção entre essas duas grandezas em uma situação de referência. Dessa maneira, a questão avaliará a habilidade de resolver situações-problema que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais, ou, no Currículo Paulista, a habilidade EF07MA17, "resolver e elaborar situações-problema que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas".

O raciocínio proporcional, que, de acordo com Miranda (2016)[9], "implica na compreensão de uma relação constante entre duas grandezas, ou seja, a invariância; e na noção de que estas grandezas variam em conjunto, ou seja, covariância" aplica-se aqui efetivamente em dois momentos. Primeiramente, na construção da condição de contorno do problema, que se refere à "invariância" de Miranda: a autonomia de distância do carro, por volume de combustível, é constante. Dessa percepção surge o segundo conceito, que é a "covariância": distância percorrida e volume de combustível consumido são grandezas não só correlacionadas como também diretamente proporcionais.

Assim, a razão $\frac{\text{distância percorrida (km)}}{\text{volume de combustível (L)}}$ é equivalente (invariante) tanto na situação de referência quanto na situação-problema apresentada, uma vez que, quanto mais combustível consumido, maior é a distância que se pode percorrer. Denotando por d a distância percorrida com dez litros de combustível, será possível construir e resolver a seguinte expressão:

$$\frac{120\ km}{15\ L} = \frac{d}{10\ L}$$

$$\Leftrightarrow d = \left(\frac{10 \cdot 120}{15}\right) km = 80\ km$$

Valor apresentado na alternativa **B** (80 km).

As demais alternativas podem sinalizar problemas com as operações multiplicativas envolvidas no seu desenvolvimento, uma vez que apresentam a metade (A - 40 km), o dobro (C - 160 km) ou o triplo (D - 240 km) do valor correto. Desses, destaca-se a alternativa C (160 km), pois é o valor mais próximo daquele que seria alcançado se a relação de proporcionalidade fosse invertida, fornecendo uma autonomia de 180 km.

---

[9] MIRANDA, J. A. **Desenvolvimento do raciocínio proporcional**: uma sequência didática para o sexto ano do ensino fundamental. 117 f. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/17957/1/DesenvolvimentoRaciocinioProporcional.pdf>. Acesso em: 19 dez. 2019.

Na eventualidade de um grupo de estudantes demonstrar dificuldades com essa questão, sugere-se ao professor que trabalhe – conforme as possibilidades do seu planejamento e durante o período letivo – a sequência didática de **Proporcionalidade**[10]. Para tal, pode empregar Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Ao aplicar essa abordagem, os dividirá os estudantes em equipes, procurando aproximar aqueles com níveis de conhecimento similares. Em seguida, irá propor que os membros da equipe percorram juntos as atividades da sequência, resolvendo as questões colaborativamente. A intenção, aqui, é estimular o debate entre os estudantes, fazendo com que comparem seus métodos de resolução e aprendam em conjunto. As habilidades pertencentes a essa sequência são:

- Resolver situações-problema que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais.

- Resolver problemas aplicando o Teorema de Tales.

Os seguintes materiais de referência podem ser úteis ao professor:

- Plano de aula - Relações de proporcionalidade em situações cotidianas. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/224/relacoes-de-proporcionalidade-em-situacoes-cotidianas>. Acesso em: 02 dez. 2019.

- A noção de razões e exercícios – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/a2lelc7rz94wo.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2019.

- Números Diretamente e Inversamente Proporcionais – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c89zmwon6cgks.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2019.

- Propriedades de Proporções – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bqdfaxbu33cow.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2019.

Habilidade

[10] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FProporcionalidade%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

Identificar a expressão algébrica que representa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.

Questão 07

No estudo da estrutura da matéria, o átomo é a partícula fundamental formadora de todos os materiais. Dentro do átomo encontram-se partículas chamadas subatômicas como os prótons, os nêutrons e os elétrons. A distribuição destes elétrons dentro do átomo define as propriedades químicas da matéria.

Algumas sequências de números são encontradas na configuração dos elétrons dentro do átomo. Na tabela a seguir, existe um caso tradicional que é o número de níveis de energia e o número de orbitais.

Níveis de energia	1	2	3	4	5
Orbitais	1	4	9	16	25

Assinale a alternativa que apresenta a expressão algébrica que relaciona número de orbitais (m) com número de níveis de energia (n).

(A) $m = 2n$

(B) $m = n^2$

(C) $n = 2m$

(D) $n = m^2$

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante selecione a expressão algébrica que relaciona o nível de energia e o número de orbitais nele compreendidos, mobilizando sua habilidade em identificar a expressão algébrica que representa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras. Dentro do Currículo Paulista, a questão pode ser associada à habilidade EF07MA15, que envolve utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

A despeito do conceito de "Orbital" empregado na questão e alguns outros termos como "distribuição de elétrons", "configuração eletrônica", "nível de energia" pertencerem aos conhecimentos esperados de um estudante do Ensino Médio em Química, o contexto escolhido não impede que o estudante abstraia da questão a sequência numérica apresentada, na qual o índice (ou posição) está na linha superior, significando o nível de energia n; o número correspondente, na linha inferior, está portanto denotado aqui como número de orbitais m.

A sequência apresentada é a dos Números Quadrados, ou seja, números quadrados perfeitos que podem ser expressos como o produto de seu índice por ele mesmo, ou o quadrado do próprio índice. Recordamos aqui que os Números Quadrados, da forma como foram apresentados, são uma sequência não-recursiva. Contudo, a depender da maneira como são visualizados, podem também apresentar-se recursivamente: recebem esse nome por pertencerem ao conjunto de sequências denominadas Números Poligonais, nos quais o incremento corresponde à adição de uma camada de pontos que reproduz a forma do polígono original.

De qualquer maneira, espera-se que o estudante perceba que todos os cinco números apresentados são quadrados perfeitos e correspondem ao quadrado dos cinco primeiros números naturais. Dessa forma, a relação entre o nível de energia (n) e o número de orbitais (m) é $m = n^2$.

Se essa observação não for clara, pode-se primeiro perceber a relação fundamental de índice e número correspondente entre níveis de energia e número de orbitais, excluindo as alternativas C ($n = 2m$) e D ($n = m^2$). Para decidir entre A ($m = 2n$) e B ($m = n^2$), é possível observar a regularidade do intervalo de variação entre os números fornecidos: essa diferença não é constante, e aumenta conforme se comparam níveis de energia maiores. Portanto, a sequência é construída por meio de uma operação que faz com que seu valor "sempre cresça" (a partir do primeiro ponto fornecido) e que "cresça mais quanto maior for o número do orbital", ou seja, cujo ritmo de variação ou crescimento dependa da posição considerada na sequência.
De acordo com essa análise, a relação não pode ser dada pela multiplicação por um número constante, porque, nesse caso, as grandezas seriam diretamente proporcionais e <u>o ritmo de crescimento seria constante</u>. Pelo contrário, trata-se de uma operação de <u>potenciação, cujo ritmo de crescimento aumenta conforme o aumento da base.</u> Para fins meramente ilustrativos, mostra-se a seguir quais são os resultados da expressão linear e da expressão quadrática para os níveis de energia mostrados no enunciado.

A) $m = 2n$

Nível de Energia (n)	1	2	3	4	5

Resultado da expressão	2	4	6	8	10

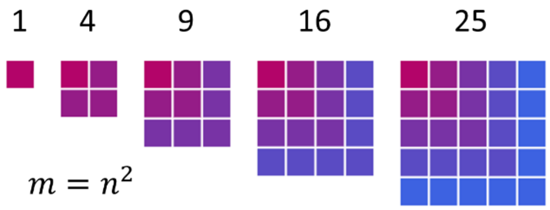
Portanto, a expressão $m = 2n$ não pode representar os dados fornecidos.

B) $\boldsymbol{m = n^2}$

Nível de Energia (n)	1	2	3	4	5
Resultado da expressão	1	4	9	16	25

Portanto, a expressão $m = n^2$ representa os dados fornecidos.

De qualquer maneira, a expressão adequada será $m = n^2$, tornando a alternativa B correta. A mesma solução pode ser representada pictoricamente, explorando o significado dos Números Quadrados como números poligonais, da seguinte forma:



Os estudantes que escolhem a alternativa A (m = 2n) percebem o significado de cada componente da sequência e possivelmente não identificam que a relação entre eles se dá por uma operação de potenciação, escolhendo uma expressão linear, cujo ritmo de crescimento é constante e que só fornece o resultado correto para o segundo número da sequência.

Os estudantes que escolhem as alternativas C (n = 2m) e D ($n = m^2$), conforme já mostrado, possivelmente não compreendem o significado de cada componente da sequência. Adicionalmente, os estudantes que escolhem a alternativa D também não identificam (tal como aqueles que elegem A) que a relação entre eles se dá por uma operação de potenciação.

Se um grupo de estudantes apresentar dificuldades com essa questão, será muito interessante que o professor trabalhe – conforme as possibilidades do seu planejamento – a sequência didática de **Generalização de Padrões**[11]. Ao fazê-lo,

[11] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3

pode empregar Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Na aplicação dessa abordagem, os estudantes são divididos em equipes (procurando aproximar aqueles com níveis de conhecimento próximos) e cooperam entre si para resolver de maneira colaborativa as situações-problema propostas, buscando caminhos próprios para resolução e apresentando uns aos outros suas descobertas, para que, discutindo em conjunto, alcancem as conclusões pertinentes. As habilidades pertencentes a essa sequência são:

- Resolver problemas geométricos aplicando a generalização de padrões.

- Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.

- Relacionar uma expressão matemática a uma expressão na língua materna e vice-versa.

Alguns materiais de referência podem ser encontrados a seguir:

- Plano de aula - Padrões em Sequências Numéricas. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/631/padroes-em-sequencias-numericas>. Acesso em: 02 dez. 2019.

- BORRALHO, Antonio. Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. In: **XIII CIAEM-IACME**, Recife, Brasil, 2011. Disponível em: <http://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1111/604>. Acesso em: 02 dez. 2019.

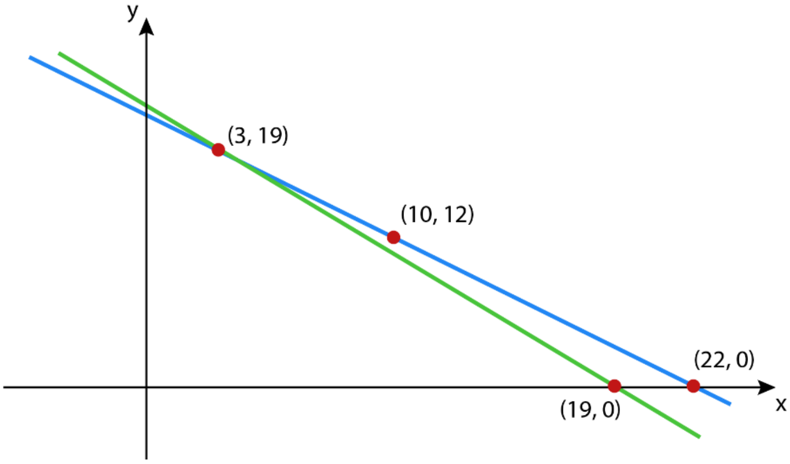
- BRANCO, N. C. V. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2008. 250 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1197/1/17737_ULFC086729_TM.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2019.

Habilidade
Interpretar graficamente a solução de um sistema linear.

%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FGeneraliza%C3%A7%C3%A3o%20de%20padr%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

Questão 08

O gráfico a seguir representa um sistema de duas equações de 1º grau.



Qual o par ordenado é solução do sistema?

(A) (3, 19)

(B) (10, 22)

(C) (19, 0)

(D) (22, 0)

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante selecione o ponto (par ordenado) que representa a solução do sistema linear apresentado, utilizando sua habilidade de interpretar graficamente a solução de um sistema linear. Essa habilidade, no Currículo Paulista, encontra correspondência na EF08MA08, que trata de resolver e elaborar situações-problema que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

Quando um sistema de equações lineares é apresentado, seja na forma analítica ou gráfica, deve-se perceber que a solução como um todo é dada pela intersecção dos conjuntos-solução de cada equação individual. Num sistema composto por duas equações de reta não-paralelas, ambas da forma $y = ax + b$, por exemplo, existe um conjunto infinito de números que é solução da primeira equação e outro conjunto infinito de números que é solução da segunda equação. No entanto, apenas um ponto (par ordenado) corresponde à solução do sistema como um todo (apresenta-se, simultaneamente, na solução da primeira e segunda equações).

Sabendo disso, o estudante deve interpretar que, dentre os quatro pontos apresentados, aquele que sinaliza a intersecção entre as duas retas é o ponto (3, 19), exibido na alternativa **A**.

Os estudantes que assinalam as alternativas C (19, 0) e D (22, 0) incorrem no mesmo erro: selecionam pontos que pertencem à solução individual de cada equação separadamente, mas não à solução global do sistema. Nota-se nesses casos uma sinalização da tentativa de associar a solução do sistema à intersecção de elementos representados no eixo cartesiano (no caso, de cada reta com o eixo das abscissas).

Alguns estudantes podem escolher a alternativa B (10, 22) ao misturar algumas das coordenadas exibidas para compor sua resposta. A indicação dessa alternativa sinaliza que não houve interpretação do significado dos elementos representados no sistema cartesiano (retas, eixos e pontos) e de suas relações (no caso, a intersecção).

A interpretação gráfica de Sistemas Lineares é muito importante pois oferece arcabouço para o desenvolvimento futuro da Geometria Analítica e auxilia os estudantes a visualizar expressões algébricas. Dessa maneira, se o professor identificar que um grupo de estudantes sinalizou dificuldades com essa questão, uma boa atitude será trabalhar – dentro do período letivo e das possibilidades do planejamento – a sequência didática de **Sistemas de Equações**[12]. Uma forma de fazê-lo é empregar Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem Baseada em Problemas. Nessa abordagem, o professor apresentará as situações da sequência, problematizando o uso de gráficos realizados no plano cartesiano para resolução das mesmas. Os estudantes discutirão entre si as diferentes estratégias possíveis para resolver os problemas e construirão resoluções em conjunto, de modo a instigar a descoberta de caminhos para resolução e o debate saudável entre os estudantes. As habilidades contidas nessa sequência didática são:

- Identificar o sistema de equações lineares que resolve um problema.

- Resolver sistemas lineares (método da adição e da subtração).

- Interpretar graficamente a solução de um sistema linear.

[12] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FSistemas%20de%20Equa%C3%A7%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

Os materiais listados a seguir podem servir de suporte à concepção das atividades descritas:

- Equação geral da reta. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=19262>. Acesso em: 02 dez. 2019.

- Plano de aula - Soluções de uma Equação Linear. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/679/solucoes-de-uma-equacao-linear>. Acesso em: 02 dez. 2019.

- Como resolver um sistema de equações lineares de maneira exata e aproximada. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/como-resolver-um-sistema-de-equacoes-lineares-de-maneira-exata-e-aproximada>. Acesso em: 02 dez. 2019.

- Resolução de sistemas lineares por meio de representação gráfica. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/resolucao-de-sistemas-lineares-por-meio-de-representacao-grafica>. Acesso em: 02 dez. 2019.

Habilidade
Interpretar graficamente a solução de um sistema linear.

Questão 09

Dois irmãos sempre lançam problemas um para outro, pois estão sempre muito envolvidos com as aulas de matemática. Certo dia, um perguntou ao outro:

"O problema a seguir é simples. Imagine que somando o número de canetas vermelhas e azuis no meu estojo chego no número 9 e que subtraindo o número de canetas vermelhas das canetas azuis chego no número 1."

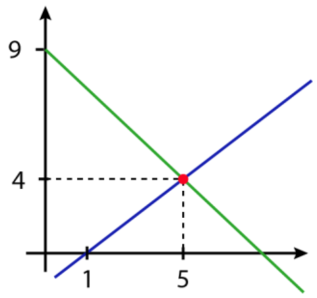
O outro irmão respondeu:

"Tudo bem. E se eu disser que o sistema que representa essa situação considerando que x indica o número de canetas azuis e que y o número de canetas vermelhas, é:"

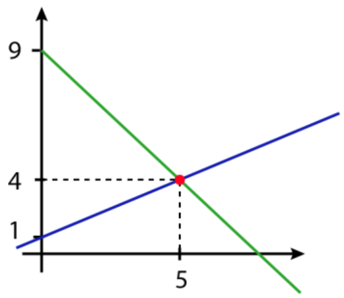
$$\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Qual é o gráfico que representa e resolve esse sistema?

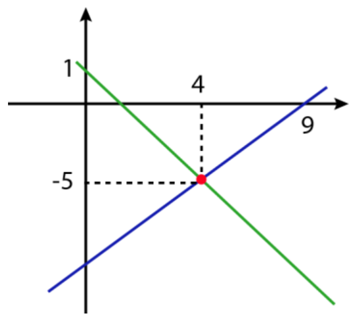
(A)



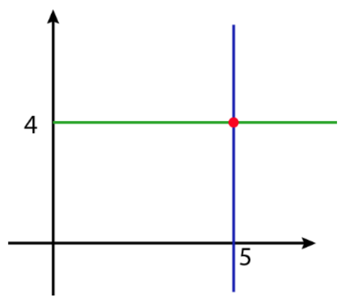
(B)



(C)



(D)



Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante selecione o gráfico que representa o sistema linear apresentado, utilizando sua habilidade de interpretar graficamente a solução de um sistema linear. Essa habilidade, no Currículo

Paulista, encontra correspondência na EF08MA08, que trata de resolver e elaborar situações-problema que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.

Questionamentos podem surgir, algumas vezes, acerca da importância ou relevância dessa habilidade na formação dos estudantes. Nesse momento, é importante mencionar os estudos de Raymond Duval (2003)[13] sobre a Teoria dos Registros das Representações Semióticas. Segundo tais estudos, os objetos matemáticos são multissemióticos, do ponto de vista que seus objetos podem assumir múltiplos registros de representação, o que na realidade é fundamental à atividade cognitiva, pois cada um desses registros evoca e mobiliza diferentes conhecimentos.

Duval afirma que "o sujeito só apreende um determinado conceito matemático quando consegue mobilizar simultaneamente ao menos dois registros de representação, ou seja, trocar espontaneamente de um registro de representação para outro." Dessa forma, convidado pelo contexto da questão a converter entre a representação algébrica e a representação gráfica, o estudante estará efetivamente (e ativamente) imerso no processo de aprendizagem.

Para selecionar a visualização adequada para a situação-problema oferecida, o estudante precisa lembrar que as retas representadas no plano cartesiano são formadas pela coleção de pontos que pertencem ao conjunto-solução de cada uma das equações do sistema. Sendo as retas não-paralelas, existe um ponto de intersecção entre elas, representando um par ordenado que pertence simultaneamente ao conjunto-solução de ambas as equações.

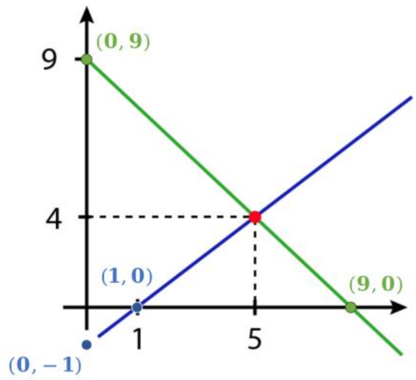
Dessa maneira, para resolver corretamente a questão, uma possível estratégia é determinar alguns pontos (pares ordenados) que pertencem exclusivamente a uma ou outra equação, combinando opcionalmente essas informações à determinação do ponto de intersecção de ambas as retas, que é a solução do sistema.

A primeira parte dessa estratégia se refere à determinação dos pontos pelos quais passa cada reta. Para fazê-lo, é necessário e suficiente determinar dois possíveis pares ordenados. Por conveniência, pode-se determinar o valor de y para $x = 0$ e o valor de x para $y = 0$ para ambas as equações:

[13] DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. 4ª ed. Campinas, SP. Papirus, p.11-33, 2003.

Equação 1: $x + y = 9$	Equação 2: $x - y = 1$
$x = 0 \Longrightarrow y = 9$ $y = 0 \Longrightarrow x = 9$ Reta passando pelos pontos $(0, 9)$ e $(9, 0)$	$x = 0 \Longrightarrow y = -1$ $y = 0 \Longrightarrow x = 1$ Reta passando pelos pontos $(0, -1)$ e $(1, 0)$

Portanto, a representação gráfica adequada do sistema deve constar de duas linhas retas, uma delas que contenha os pontos $(0,9)$ e $(9,0)$, e outra que contenha os pontos $(0, -1)$ e $(1, 0)$. De posse dessa observação, já é possível determinar que a alternativa correta é **A**, que apresenta a seguinte figura:



É possível – embora não seja necessário – adicionar a esse desenvolvimento, em caráter confirmatório, o valor do ponto de intersecção, que deriva da solução do sistema linear apresentado:

$$\begin{cases} x + y = 9 \ [L_1] \\ x - y = 1 \ [L_2] \end{cases} \xrightarrow{[L_1]+[L_2]} \begin{matrix} 2x = 10 \\ x = 5 \end{matrix} \ e \ \begin{matrix} 5 + y = 9 \\ y = 4 \end{matrix}$$

Logo, o ponto de intersecção é $(5, 4)$, também representado adequadamente na alternativa **A**.

Os estudantes que selecionam a alternativa B determinam incorretamente o valor de y quando $x = 0$ na Equação 2, chegando a um valor com o sinal trocado ($+1$ ao invés de -1) e, portanto, optando pela reta que passa pelo ponto $(0, 1)$, endossada pela solução do sistema conforme apresentado no enunciado $(5, 4)$. É importante ressaltar que esses estudantes souberam elaborar uma estratégia de resolução para a situação-problema, mas tiveram dificuldade na manipulação algébrica necessária para determinar a solução de uma das equações individualmente.

A alternativa C apresenta uma solução impossível (número negativo de canetas). Isso quer dizer que os estudantes que escolhem essa alternativa possivelmente não verificam a viabilidade das soluções encontradas, um problema recorrente na álgebra ao longo de todas as etapas de ensino.

A alternativa D, por fim, sinaliza um problema de ausência de domínio da representação gráfica. Nesse caso, os estudantes provavelmente identificam a solução analítica do sistema como um todo (utilizando métodos clássicos como o da substituição ou da adição) e encontram o ponto $(5, 4)$ no plano cartesiano, mas elegem as retas horizontal e vertical que se encontram nesse ponto, desconsiderando a necessidade de determinar com exatidão os pontos efetivamente pertencentes a cada uma das retas.

O professor deve ficar sempre atento para identificar estudantes que demonstrem dificuldades com esse tipo de questão. Se isso acontecer, recomenda-se o trabalho da sequência didática de **Sistemas de Equações**[14], durante o período letivo e dentro das possibilidades do planejamento. Uma maneira interessante de realizar esse trabalho é empregando Metodologias Ativas de ensino, como a Gamificação. Para empregar essa abordagem, o professor convidará os estudantes a se dividir em equipes e participar de um jogo em que devem percorrer a sequência didática em conjunto, de maneira que cada equipe apresente a resolução das atividades correspondentes. A cada rodada, pontuarão aqueles que alcançarem respostas adequadas dentro do tempo máximo estipulado pelo professor, de modo que os vencedores devem explicar seu raciocínio. Essa estratégia engaja os estudantes ao mesmo tempo que cria oportunidades para que eles discutam entre si as soluções, aprendendo uns com os outros. As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Identificar o sistema de equações lineares que resolve um problema.

- Resolver sistemas lineares (método da adição e da subtração).

- Interpretar graficamente a solução de um sistema linear.

Para complementar a sequência didática em questão, sugere-se a consulta às seguintes referências:

- Equação geral da reta. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=19262>. Acesso em: 02 dez. 2019.

[14] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FSistemas%20de%20Equa%C3%A7%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

- Plano de aula - Soluções de uma Equação Linear. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/679/solucoes-de-uma-equacao-linear>. Acesso em: 02 dez. 2019.

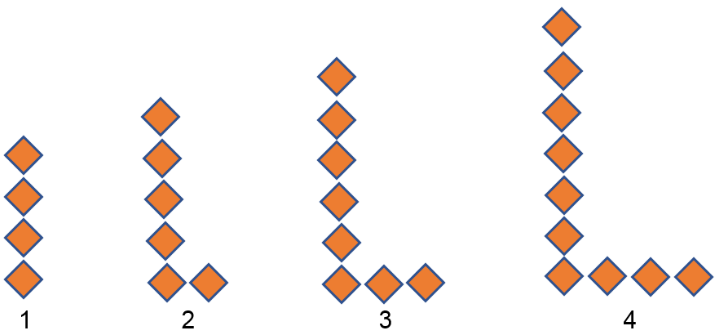
- Como resolver um sistema de equações lineares de maneira exata e aproximada. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/como-resolver-um-sistema-de-equacoes-lineares-de-maneira-exata-e-aproximada>. Acesso em: 02 dez. 2019.

- Resolução de sistemas lineares por meio de representação gráfica. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/resolucao-de-sistemas-lineares-por-meio-de-representacao-grafica>. Acesso em: 02 dez. 2019.

Habilidade
Identificar a expressão algébrica que representa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.

Questão 10

Cada figura a seguir está indicada por um número e essa sequência de figuras tem uma regularidade.



Qual a expressão que pode ser utilizada para calcular o número total de quadradinhos da figura na posição n?

(A) $4n$

(B) $n + 2$

(C) $2n$

(D) $\mathbf{2n + 2}$

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante indique a expressão que expressa a regularidade presente em uma sequência de figuras, mobilizando sua habilidade de identificar a expressão algébrica que representa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras. Se for considerado o Currículo Paulista, trata-se da habilidade EF07MA15, que envolve utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.

Zazkis e Liljedahl, em seu trabalho (2002)[15], afirmam que "os padrões são o coração e a alma da Matemática". Evidentemente, a atividade matemática se baseia historicamente na análise de padrões, que são utilizados para modelar, explicar e prever fenômenos naturais. Embora os tipos principais de padrões abordados pela matemática sejam numéricos, os próprios Zazkis e Liljedahl, no mesmo trabalho, categorizam diferentes tipos de padrões, tais como pictóricos ou geométricos, computacionais, lineares e repetitivos.

Essa questão, portanto, aborda o pensamento algébrico no reconhecimento de um padrão pictórico e na tradução desse padrão para uma expressão analítica. Observa-se na sequência oferecida que:

I. A primeira figura possui quatro quadradinhos;

II. A cada incremento de posição, são adicionados dois novos quadradinhos, de maneira que a relação entre a posição e o número de quadradinhos deve ser dada por $2\mathrm{n}$;

III. Se a proposição II é correta, a figura na posição 1 possui dois quadradinhos relativos a $2\mathrm{n}$. Os outros dois quadradinhos não dependem da posição e são encontrados em todas as figuras. Portanto, deve-se adicionar 2 ao número de quadradinhos em qualquer posição.

A combinação das proposições II e III fornece a expressão para o número de quadradinhos:

$$N = 2n + 2$$

Que está reproduzida na alternativa **D**.

Os estudantes que assinalam a alternativa A ($4\mathrm{n}$) possivelmente escolhem uma expressão que só se verifica para a posição 1. Provavelmente abordaram a questão através de uma estratégia de tentativa e erro com as alternativas, e, obtendo sucesso no primeiro teste, julgaram erroneamente ter encontrado a alternativa correta.

No caso daqueles que elegem a alternativa B ($\mathrm{n} + 2$), houve a percepção de que há um conjunto fixo e invariante de dois quadradinhos por posição, mas não que o incremento sucessivo da posição acrescenta dois quadradinhos a cada vez. De

[15] ZAZKIS, R.; LILJEDAHL, P. Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 49, p. 379-402, 2002. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/225900012_Generalization_of_patterns_The_tension_between_algebraic_thinking_and_algebraic_notation>. Acesso em: 07 jan. 2020.

forma análoga, aqueles que optam pela alternativa C ($2n$) observam adequadamente que há um incremento de dois quadradinhos conforme a variação da posição, mas não enxergam a existência de um conjunto adicional, fixo e invariante de dois quadradinhos em todas as posições.

O professor deve sempre trabalhar o reconhecimento de padrões e a expressão desses padrões na forma de equações como uma maneira de compreender e explicar padrões do cotidiano e as relações de recorrência implícitas na sociedade. Dessa maneira, ao perceber que um grupo de estudantes demonstrou dificuldade com essa questão, a sugestão é que o professor trabalhe, dentro do período letivo e das possibilidades do planejamento, a sequência didática de **Generalização de Padrões**[16]**.** Há muitas formas diferentes de fazê-lo, mas será especialmente interessante realizar esse trabalho empregando Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Ao adotar essa abordagem, dividirá os estudantes em equipes (aproximando aqueles com níveis de conhecimento similares) e oferecerá atividades para que realizem em conjunto, discutindo suas respostas, construindo colaborativamente suas resoluções, apresentando posteriormente seus resultados e debatendo com a classe suas conclusões.

A sequência didática de Generalização de Padrões envolve as habilidades:

- Resolver problemas geométricos aplicando a generalização de padrões.

- Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.

- Relacionar uma expressão matemática a uma expressão na língua materna e vice-versa.

As referências a seguir também podem oferecer motivações ou fundamentações teóricas para apoiar o professor na criação de seus planos de aula:

- Plano de aula - Padrões em Sequências Numéricas. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/631/padroes-em-sequencias-numericas>. Acesso em: 02 dez. 2019.

- BORRALHO, Antonio. Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. In: **XIII CIAEM-IACME**, Recife, Brasil, 2011. Disponível em: <http://xiii.ciaem-

[16] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FGeneraliza%C3%A7%C3%A3o%20de%20padr%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1111/604>. Acesso em: 02 dez. 2019.

- BRANCO, N. C. V. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2008. 250 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1197/1/17737_ULFC086729_TM.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2019.

Habilidade
Resolver situações-problema que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais.

Questão 11

Em uma fábrica, o controle de gastos é de grande importância para a companhia. O número de máquinas trabalhando e a quantidade de dias de produção são grandezas fundamentais no levantamento de custos de um determinado produto. A tabela a seguir relaciona o número de dias para produção de uma encomenda de parafusos, de acordo com a quantidade de máquinas trabalhando.

Quantidade de máquinas	Dias de trabalho
5	36
10	x
y	12

Ao completar corretamente esta tabela, os números obtidos em dias trabalhados (**x**) e quantidade de máquinas (**y**) são, respectivamente,

(A) 72 e 20.

(B) 18 e 15.

(C) 10 e 18.

(D) 5 e 36.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante indique a relação de proporcionalidade entre a quantidade de máquinas e a quantidade de dias, o que envolve a habilidade de resolver situações-problema que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais. No Currículo Paulista, a questão se enquadra na habilidade EF07MA17, "resolver e elaborar situações-problema que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.”

Sabendo que diversas situações do cotidiano se comportam de acordo com as leis da proporcionalidade, fica claro que o desenvolvimento do raciocínio proporcional está não só na base da interpretação de fenômenos reais, relacionados a diferentes áreas do conhecimento, mas também no aprendizado de outros conceitos da própria matemática. Sobre isso, ressalta-se o que afirmam Gigante e Santos (2012)[17]:

> Por ser um conceito estruturante do currículo de matemática do ensino fundamental, a proporcionalidade se apoia na estrutura multiplicativa e faz conexões entre o pensamento algébrico, o aritmético, o geométrico e o estatístico probabilístico. O pensamento proporcional é desenvolvido desde a escola infantil, a partir de atividades que possibilitem comparar razões e resolver situações- -problema que tratam de proporções. Os conceitos de razão e proporção estão relacionados à porcentagem, à semelhança, à escala, à inclinação e à probabilidade, entre outros.

A relação de proporcionalidade entre quantidade de máquinas e dias de trabalho pode ser inferida logicamente, porque quanto mais máquinas trabalhando, menos dias serão necessários para produzir a mesma encomenda. Essa afirmação, uma vez estabelecida, leva naturalmente à conclusão de que número de máquinas e tempo são grandezas inversamente proporcionais, quando se trata da mesma encomenda de parafusos.

Se isso é verdade, o produto entre essas duas grandezas, para cada linha da tabela apresentada, deve ser constante, o que pode ser expressado matematicamente da seguinte forma:

$$5 \cdot 36 = 10 \cdot x = y \cdot 12$$

Esse conjunto de igualdades permite construir equações com apenas uma variável para determinação dos valores de x e y:

$5 \cdot 36 = 10 \cdot x$ $x = \frac{5 \cdot 36}{10} = 18$	$5 \cdot 36 = y \cdot 12$ $y = \frac{5 \cdot 36}{12} = 15$

Valores que encontram correspondência na alternativa **B** (18 e 15), que responde corretamente à questão.

[17] GIGANTE, A. M. B.; SANTOS, M. B. **Matemática**: reflexões no ensino, reflexos na aprendizagem. Erechim: Edelbra, 2012.

Os estudantes que escolhem a alternativa A (72 e 20) confundem as relações de proporcionalidade envolvidas na atividade, determinando o valor de x como se as grandezas fossem diretamente proporcionais e determinando o valor de y por propagação da razão multiplicativa entre as duas linhas anteriores, dentro da mesma grandeza:

$\frac{5}{36} = \frac{10}{x}$ $x = \frac{10 \cdot 36}{5} = 72$	$\frac{10}{5} = \frac{y}{10}$ $y = \frac{10 \cdot 10}{5} = 20$

No caso da alternativa C (10 e 18), pode-se perceber que, provavelmente, os estudantes chegam a propor operações multiplicativas com os números das tabelas, mas sem necessariamente recorrer à proporcionalidade, utilizando relações incorretas, ou valores de linhas diferentes.

Contudo, a alternativa D (5 e 36) é assinalada por estudantes que provavelmente não compreendem o enunciado ou não percebem que se trata de um problema que envolve grandezas proporcionais, uma vez que elegem uma alternativa que simplesmente exibe dois números que já constam na tabela fornecida.

Ao perceber que um grupo de estudantes sinalizou dificuldade com essa questão, a sugestão que fazemos ao professor é que reserve um momento dentro do período letivo e das possibilidades do seu planejamento para trabalhar a sequência didática de **Proporcionalidade**[18]. Uma das maneiras de fazê-lo é empregar Metodologias Ativas de ensino, a exemplo da Aprendizagem entre Pares ou Times. Selecionando essa abordagem, o professor dividirá os estudantes em equipes, aproximando aqueles com nível de conhecimento similar, e proporá que os membros dessas equipes percorram a sequência didática em conjunto, discutindo as atividades entre si, aprendendo uns com os outros e construindo as soluções de forma colaborativa. As habilidades pertencentes a essa sequência são:
- Resolver situações-problema que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais.
- Resolver problemas aplicando o Teorema de Tales.

[18] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FProporcionalidade%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

Para elaborar as atividades de trabalho da sequência didática, o professor pode procurar suporte nas referências a seguir:

- Plano de aula - Relações de proporcionalidade em situações cotidianas. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/224/relacoes-de-proporcionalidade-em-situacoes-cotidianas> Acessado em: 02 dez. 2019.

- Plano de aula - Proporcionalidade inversa. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1322/proporcionalidade-inversa> Acesso em: 02 dez. 2019.

- A noção de razões e exercícios – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/a2lelc7rz94wo.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2019.

- Números Diretamente e Inversamente Proporcionais – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c89zmwon6cgks.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2019.

- Propriedades de Proporções – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bqdfaxbu33cow.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2019.

Habilidade
Resolver situações-problema que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais.

Questão 12

Um carro percorre a ponte Rio-Niterói em 20 minutos com velocidade constante. Um ônibus, com a metade da velocidade do carro, percorre a mesma distância em

(A) 10 minutos.

(B) 20 minutos.

(C) 30 minutos.

(D) 40 minutos.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante indique o tempo necessário para que um ônibus percorra um trajeto de comprimento fixo, o que envolve a habilidade de resolver situações-problema que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais. No Currículo Paulista, a questão se enquadra na habilidade EF08MA13, que envolve resolver e elaborar situações-problema que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

A palavra velocidade, independentemente do tipo de fenômeno abordado, traz consigo o significado de "taxa de variação conforme o tempo". Em outras palavras, a velocidade é uma grandeza que expressa quantitativamente a variação de outra grandeza (distância, número de moléculas, quantidade de informação, população...) de acordo com a variação do tempo. Essa percepção é fundamental, uma vez que, tal como afirmado por Miranda (2016)[19], "o raciocínio proporcional implica na compreensão de uma relação constante entre duas grandezas, ou seja, a invariância; e na noção de que estas grandezas variam em conjunto, ou seja, covariância"

Dessa forma, ao desenvolver a solução dessa questão, compreenda que se trata de uma grandeza composta pela razão entre a distância percorrida e o tempo necessário para percorrê-la. Denotando por v, d e t, respectivamente, a velocidade desenvolvida, a distância percorrida e o tempo gasto, a relação matemática entre essas três grandezas é:

$$\mathrm{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{t}}$$

Da qual pode-se extrair que:

I. Distância e tempo, a uma velocidade constante, são grandezas diretamente proporcionais;

II. Distância e velocidade, se o tempo de trajeto for constante, são grandezas diretamente proporcionais;

III. Velocidade e tempo, para um trajeto de comprimento fixo, são grandezas inversamente proporcionais.

Para resolução da questão, interessa a observação III, conforme sugerido pelo enunciado "percorre a **mesma distância**". Portanto, se um carro com determinada velocidade percorre o trajeto em 20 minutos, um ônibus com **metade** da velocidade irá precisar do **dobro** do tempo para percorrer esse mesmo percurso. Assim, o tempo necessário será $2 \cdot 20 \text{ minutos} = 40 \text{ minutos}$, levando à alternativa **D**.

[19] MIRANDA, J. A. **Desenvolvimento do raciocínio proporcional**: uma sequência didática para o sexto ano do ensino fundamental. 117 f. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/17957/1/DesenvolvimentoRaciocinioProporcional.pdf>. Acesso em: 19 dez. 2019.

Os estudantes que assinalam a alternativa A ("10 minutos") provavelmente invertem a relação de proporcionalidade entre velocidade e tempo, para um trajeto de comprimento fixo, julgando erroneamente que são grandezas diretamente proporcionais e que, portanto, será necessário metade do tempo (10 minutos).

Já aqueles que assinalam a alternativa B ("20 minutos") provavelmente não percebem que velocidade e tempo, num trajeto de comprimento constante, guardam entre si relação de proporcionalidade, assinalando o mesmo tempo levado pelo carro para percorrer o trajeto. De forma análoga, a alternativa C ("30 minutos") é eleita pelos estudantes que possivelmente incorrem no mesmo erro, mas depois de dividir o tempo inicial por 2, somam o resultado encontrado ao tempo inicial (20 minutos + 10 minutos).

Se um grupo de estudantes sinalizar dificuldades com essa questão, será muito interessante que o professor trabalhe – dentro das possibilidades do planejamento e durante o período letivo – a sequência didática de **Proporcionalidade**[20]. Uma sugestão é que seja empregada uma Metodologia Ativa de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Ao fazê-lo, o professor dividirá os estudantes em equipes (atentando para aproximar aqueles com níveis de conhecimento similares) para que executem em conjunto as tarefas da sequência, cooperando entre si para resolver de maneira colaborativa as situações-problema propostas, buscando seus caminhos para resolução e debatendo suas descobertas. As habilidades pertencentes a essa sequência são:

- Resolver situações-problema que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais.

- Resolver problemas aplicando o Teorema de Tales.

Para se aprimorar nas bases teóricas da proporcionalidade direta, o professor pode consultar os materiais e conteúdos selecionados a seguir:

- Plano de aula - Relações de proporcionalidade em situações cotidianas. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/224/relacoes-de-proporcionalidade-em-situacoes-cotidianas> Acessado em: 02 dez. 2019.

[20] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FProporcionalidade%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

- Plano de aula - Proporcionalidade direta. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1386/proporcionalidade-direta>. Acesso em: 02 dez. 2019.

- A noção de razões e exercícios – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/a2lelc7rz94wo.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2019.

- Números Diretamente e Inversamente Proporcionais – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c89zmwon6cgks.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2019.

- Propriedades de Proporções – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bqdfaxbu33cow.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2019.

Referências bibliográficas

BORRALHO, Antonio. Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. In: **XIII CIAEM-IACME**, Recife, Brasil, 2011. Disponível em: <http://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1111/604>. Acesso em: 02 dez. 2019.

BRANCO, N. C. V. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2008. 250 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1197/1/17737_ULFC086729_TM.pdf>. Acesso em: 02 dez. 2019.

DRECHMER, P. A. O.; ANDRADE, S. V. R. O estudo de frações e seus cinco significados. [s.l: s.n.]. In: **XIII CIAEM-IACME**, Recife, 2011. Disponível em: <http://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1660>. Acesso em: 02 dez. 2019.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. 4ª ed. Campinas, SP. Papirus, p.11-33, 2003.

GIGANTE, A. M. B.; SANTOS, M. B. **Matemática**: reflexões no ensino, reflexos na aprendizagem. Erechim: Edelbra, 2012.

MERLINI, V. L. **O conceito de frações em seus diferentes significados**: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª série do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11111/1/dissertacao_vera_lucia_merlini.pdf>. Acesso em: 13 jan. 2020.

MIRANDA, J. A. **Desenvolvimento do raciocínio proporcional**: uma sequência didática para o sexto ano do ensino fundamental. 117 f. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. 2016. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/17957/1/DesenvolvimentoRaciocinioProporcional.pdf>. Acesso em: 19 dez. 2019.

NUNES, T. et al. The effect of situations on children's understanding of fractions. In: **British Society for Research on the Learning of Mathematics**. Oxford, 2003.

RESNICK, L. et al. **Conceptual Bases of Arithmetic Errors**: The Case of Decimal Fractions. Journal for Research in Mathematics Education, 1989, 20. DOI: 10.2307/749095. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/245760694_Conceptual_Bases_of_Arithmetic_Errors_The_Case_of_Decimal_Fractions>. Acesso em: 07 jan. 2020.

ZAZKIS, R.; LILJEDAHL, P. Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. **Educational Studies in Mathematics**, v. 49, p. 379-402, 2002. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/225900012_Generalization_of_patterns_The_tension_between_algebraic_thinking_and_algebraic_notation>. Acesso em: 07 jan. 2020.

Sites pesquisados:

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=7057. Acesso em: 02 dez. 2019.

https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FProporcionalidade%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c89zmwon6cgks.pdf. Acesso em: 02 dez. 2019.

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bqdfaxbu33cow.pdf. Acesso em: 02 dez. 2019.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=4860. Acesso em: 29 nov. 2019.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=12831. Acesso em: 29 nov. 2019.

https://novaescola.org.br/plano-de-aula/259/representando-fracoes-com-numeros. Acesso em: 29 nov. 2019.

https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FN%C3%BAmeros%20Racionais%5FRepresenta%C3%A7%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

https://novaescola.org.br/plano-de-aula/224/relacoes-de-proporcionalidade-em-situacoes-cotidianas. Acesso em: 02 dez. 2019.

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/a2lelc7rz94wo.pdf. Acesso em: 02 dez. 2019.

https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FGeneraliza%C3%A7%C3%A3o%20de%20padr%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1. Acesso em: 07 jan. 2020.

https://novaescola.org.br/plano-de-aula/631/padroes-em-sequencias-numericas. Acesso em: 02 dez. 2019.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=19262. Acesso em: 02 dez. 2019.

https://novaescola.org.br/plano-de-aula/679/solucoes-de-uma-equacao-linear. Acesso em: 02 dez. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/video/como-resolver-um-sistema-de-equacoes-lineares-de-maneira-exata-e-aproximada. Acesso em: 02 dez. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/video/resolucao-de-sistemas-lineares-por-meio-de-representacao-grafica. Acesso em: 02 dez. 2019.

https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FSistemas%20de%20Equa%C3%A7%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1. Acesso em: 07 jan. 2020.

https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1322/proporcionalidade-inversa. Acesso em: 02 dez. 2019.

https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1386/proporcionalidade-direta. Acesso em: 02 dez. 2019.

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

COORDENADORIAS

Coordenadoria Pedagógica - COPED
Coordenador: Caetano Pansani Siqueira

Coordenadoria de Informação, Tecnologia, Evidência e Matrícula - CMITE
Coordenador: Thiago Guimarães Cardoso

DEPARTAMENTOS

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão Pedagógica - DECEGEP
Diretor: Valéria Arcari Muhi

Centro dos Anos Finais do Ensino Fundamental - CEFAF
Diretora: Carolina dos Santos Batista Murauskas

Centro de Ensino Médio - CEM
Diretora: Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

Equipe Curricular COPED de Matemática – Leitura crítica e validação do material
Ilana Brawerman, João dos Santos Vitalino, Marcos José Traldi, Otávio Yoshio Yamanaka e Vanderley Aparecido Cornatione

Departamento de Avaliação Educacional - DAVED
Diretora: Patricia de Barros Monteiro
Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Planejamento e Análise de Avaliações - CEPAV

Ademilde Ferreira de Souza, Cristiane Dias Mirisola, Ilton Campos Cavalcanti, Juvenal de Gouveia, Márcia Soares de Araújo Feitosa, Soraia Calderoni Statonato, Sylvia Russiano Toledo Casari

Centro de Aplicação de Avaliações - CEAPA
Diretora: Isabelle Regina de Amorim Mesquita

Amanda Morais Cardoso, Denis Delgado dos Santos, José Guilherme Brauner Filho, Kamila Lopes Candido, Nilson Luiz da Costa Paes, Teresa Miyoko Souza Vilela

Departamento de Tecnologia de Sistemas
Diretor: Marcos Aparecido Barros de Lima

Centro de Planejamento e Integração de Sistemas
Diretora: Camila da Silva Alcazar
Viviana Fernandes dos Santos – Analista de Sistemas