GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DE ENTRADA

MATERIAL DE APOIO PARA O PROFESSOR

3ª série do Ensino Médio

Prova de Matemática

São Paulo
1º Semestre de 2020

Avaliação Diagnóstica de Entrada

APRESENTAÇÃO

A política educacional da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo explicita em seu Plano Estratégico 2019-2022 a nossa missão: "garantir a todos os estudantes aprendizagem de excelência e a conclusão de todas as etapas da educação básica na idade certa".

Para alcançar esse propósito, os processos avaliativos exercem um papel essencial. As avaliações diagnósticas e formativas se complementam com a finalidade de apoiar o trabalho dos professores, direcionando-o para as necessidades de aprendizagem dos estudantes. Aqui se inserem a Avaliação Diagnóstica de Entrada – ADE - e a Avaliação da Aprendizagem em Processo – AAP - que neste ano estão planejadas de forma articulada ao Calendário Escolar 2020, em momentos-chave do ano para utilização de seus resultados como apoio às escolas, oferecendo suporte às Semanas de Estudos Intensivos, às ações contínuas de recuperação, aprofundamento e replanejamento ao longo dos bimestres.

O desenho pedagógico das avaliações aplicadas a todos os anos/séries do ensino fundamental e do ensino médio, que inclui a ADE e a AAP, está articulado ao currículo, envolvendo ação integrada dos diferentes departamentos da Coordenadoria Pedagógica. Adota o Currículo Paulista como referencial no ensino fundamental, e no ensino médio o currículo oficial ainda vigente para esta etapa.

A **Avaliação Diagnóstica de Entrada – ADE** – que constitui o conteúdo deste primeiro documento – aplicada no início do ano letivo, **é focada exclusivamente nas habilidades de anos/séries anteriores essenciais para o percurso educacional dos estudantes,** necessárias à aquisição das habilidades do currículo previstas para o ano a ser iniciado. Permitirá a identificação, de forma mais precisa, das reais necessidades de aprendizagem dos estudantes, explicitando tanto as habilidades que mais dominam como aquelas que necessitam de maior atenção.

Já as AAP, enquanto avaliações formativas bimestrais, trarão majoritariamente habilidades previstas no currículo (Currículo Paulista para o ensino fundamental e currículo oficial ainda vigente no ensino médio) para os respectivos bimestres do ano em curso e, como inovação, incluirão também algumas habilidades de percurso - as anteriores que devem ser desenvolvidas ou consolidadas para a continuidade do processo de aprendizagem.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação – Prova do Aluno – foram elaborados os correspondentes materiais de apoio ao docente, contendo os quadros de habilidades, questões, gabaritos, orientações para aplicação (no caso dos anos iniciais do ensino fundamental) e recomendações pedagógicas para cada prova.

Ao contrário das avaliações de sistema em larga escala, as questões das avaliações ADE e AAP não são sigilosas. As provas impressas são enviadas para as Diretorias de Ensino em pacotes abertos, para entrega às escolas, e publicadas na Intranet ao final da sua aplicação. Isso porque é um material de apoio para o trabalho pedagógico. Sendo assim, é fundamental que todos os envolvidos no processo se conscientizem da importância de não divulgar os gabaritos enquanto durar a aplicação, pois isto apenas prejudica a fidedignidade dos diagnósticos e consequentemente o trabalho pedagógico a partir das necessidades dos estudantes.

Os registros resultantes da ADE, das AAP e do Saresp, inseridos na Secretaria Escolar Digital - SED e apresentados na Plataforma Foco Aprendizagem, agregados aos que a escola e o professor já possuem a partir de suas avaliações internas, oferecem informações preciosas para o planejamento, replanejamento e acompanhamento das ações pedagógicas, sobretudo aquelas relacionadas aos processos de recuperação e aprofundamento.

Esperamos que as avaliações e orientações pedagógicas sejam efetivamente subsídios concretos à ação docente para a necessária intervenção pedagógica a favor da melhoria da aprendizagem de todos os nossos estudantes.

Coordenadoria Pedagógica (COPED)

Avaliação Diagnóstica de Entrada - Matemática

A premissa básica a respeito de um processo avaliativo deve ser considerada como instrumento que subsidiará tanto o estudante no seu desenvolvimento cognitivo, quanto ao professor no redimensionamento de sua prática pedagógica.

Desta forma, a avaliação da aprendizagem passa a ser um instrumento que auxiliará o educador a atingir os objetivos propostos em sua prática educativa, neste caso a avaliação sob essa ótica deve ser tomada na perspectiva diagnóstica, servindo como instrumento para detectar as dificuldades e possibilidades de desenvolvimento do educando.

Neste sentido, as 12 questões que constam deste caderno, procuram verificar o nível de desenvolvimento das habilidades descritas para a Avaliação Diagnóstica de Entrada 2020 de Matemática que subsidiarão o trabalho no ano letivo.

Assim, a avaliação haverá que ser percebida como um processo de mapeamento e da diagnose do processo de aprendizagem, ou seja, a obtenção de indicadores qualitativos do processo de ensino-aprendizagem no trabalho docente.

Seguindo esta concepção, o Currículo Paulista destaca que:

> [...] a avaliação produz informações valiosas no que diz respeito à aprendizagem dos estudantes, às necessidades de recuperação e de reforço das aprendizagens, à própria prática em sala de aula, permitindo adequações e mudanças metodológicas.
>
> Desta forma, avaliar demanda um olhar atento do professor em relação aos avanços, assim como pensar em instrumentos pelos quais possa, de fato, diagnosticar as aprendizagens dos estudantes e seus níveis de proficiência a respeito do que lhes foi ensinado e planejar ações necessárias para que todos possam aprender. SÃO PAULO, 2018, p. 42

É importante salientar que as observações que constam nos Comentários e Recomendações Pedagógicas deste caderno são pressupostos de resolução, cabendo ao professor analisar os registros dos estudantes.

É importante o professor realizar uma análise de acordo com a realidade do processo de ensino-aprendizagem desenvolvido em sala de aula.

EQUIPE CURRICULAR DE MATEMÁTICA

COPED – CEFAF e CEM

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DE ENTRADA

Matriz de Referência – 3ª série do Ensino Médio

Questão	Habilidade
1	Identificar os gráficos das funções seno e cosseno.
2	Determinar seno, cosseno e tangente de ângulos no ciclo trigonométrico.
3	Identificar os gráficos das funções seno e cosseno.
4	Resolver problemas que envolvem razões trigonométricas no triângulo retângulo.
5	Resolver problemas que envolvem razões trigonométricas no triângulo retângulo.
6	Resolver problemas de análise combinatória que envolvam arranjos simples e/ou combinações.
7	Resolver problemas que envolvam processos de contagem – princípio multiplicativo.
8	Determinar seno, cosseno e tangente de ângulos no ciclo trigonométrico.
9	Resolver problemas que envolvam processos de contagem – princípio multiplicativo.
10	Relacionar um sistema de equações lineares à matriz correspondente.
11	Resolver problemas de análise combinatória, que envolvam arranjos simples e/ou combinações.
12	Relacionar um sistema de equações lineares à matriz correspondente.

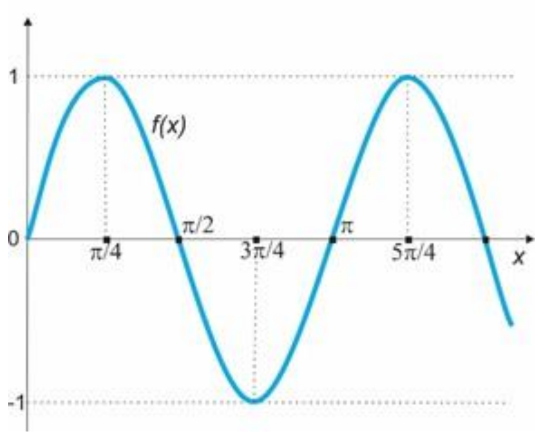
GABARITO

QUESTÃO	A	B	C	D	E
1			X		
2				X	
3		X			
4			X		
5				X	
6				X	
7			X		
8		X			
9					X
10					X
11			X		
12			X		

Habilidade
Identificar os gráficos das funções seno e cosseno.

Questão 01

Observe o gráfico abaixo.



Ele corresponde a que função?

(A) $f(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

(B) $f(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

(C) $\boldsymbol{f(x) = sen(2x)}$

(D) $f(x) = cos(2x)$

(E) $f(x) = tg(2x)$

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão requer que o estudante selecione a equação adequada para representação da função cujo gráfico é apresentado, o que envolve a habilidade de identificar os gráficos das funções seno e cosseno.

É importante, primeiramente, perceber que o gráfico apresentado é de uma função periódica (com período igual a π), oscilante, contínua e cujo contradomínio é [-1,1]. Portanto, esse gráfico pode representar as funções seno ou cosseno, mas não tangente.

A expressão genérica das funções seno e cosseno, conforme observado por Lima (2013)[1], é a seguinte:

[1] LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

$$f(x) = a + b \cdot sen(cx + d) \qquad \text{g}(x) = a + b \cdot cos(cx + d)$$

Em que os parâmetros a e b controlam a amplitude e o deslocamento vertical do gráfico da função (sendo equivalentes a 0 e 1, respectivamente, no gráfico exibido) e os valores c e d controlam o período e o deslocamento horizontal da função.

A função mostrada no gráfico possui valor zero na origem, ou seja, $f(0) = 0$. Se for considerado que a função exibida pode ser a função seno, para a qual $sen(0) = 0$, o valor de d é nulo (não há deslocamento horizontal) e o valor de c é dado por:

$$c = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

Portanto, a função $f(x)$ pode ser $f(x) = sen(2x)$**.**

Por outro lado, se for considerado que a função exibida pode ser a função cosseno, para a qual $cos(0) = 1$ e $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, o valor de d precisa ser $\frac{\pi}{2}$ para que o valor de f seja nulo, conforme exibido. Novamente, o valor de c é determinado pelo período observado, resultando na seguinte possibilidade:

$$f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Dentre essas duas possíveis representações para $f(x)$, aquela que encontra correspondência em alguma das alternativas apresentadas é $f(x) = sen(2x)$, alternativa **C**.

Estudantes que marcam a alternativa A $\left(f(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ provavelmente fazem correspondência do gráfico do enunciado com o de uma função seno, mas não reconhecem que o período é π, e não 2π.

Estudantes que marcam a alternativa B $\left(f(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ correspondem o gráfico do enunciado com o de uma função cosseno, demonstrando que possivelmente não conseguem distinguir o gráfico desta função com o da função seno, e não reconhecem que o período é π, e não 2π.

O assinalamento da alternativa D $\left(f(x) = cos(2x)\right)$ demonstra que o estudante reconhece que o período da função é π, mas provavelmente confunde os gráficos das funções seno e cosseno.

O assinalamento da alternativa E $\left(f(x) = tg(2x)\right)$ possivelmente sinaliza que o estudante não reconhece as funções trigonométricas básicas por meio de suas propriedades ou de seus gráficos.

Se o professor identificar que um grupo de estudantes sinalizou dificuldades com essa questão, uma boa atitude será trabalhar – dentro do período letivo e das possibilidades do planejamento – a sequência didática de **Razões Trigonométricas**[2]. Uma forma de fazê-lo é empregar Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem Baseada em Problemas. Nessa abordagem, o professor apresentará as situações da sequência, problematizando o reconhecimento das funções trigonométricas adequadas. Os estudantes discutirão entre si as diferentes estratégias possíveis para resolver os problemas e construirão resoluções em conjunto, de modo a instigar a descoberta de caminhos para resolução e o debate saudável entre os estudantes. As habilidades contidas nessa sequência didática são:

- Resolver problemas que envolvem razões trigonométricas no triângulo retângulo.

- Determinar seno, cosseno e tangente de ângulos no ciclo trigonométrico.

- Identificar os gráficos das funções seno e cosseno.

Para apoiar o trabalho dessa sequência didática, pode ser útil a consulta às seguintes referências:

- Transformações das funções seno e cosseno. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/Bbzfry8U>. Acesso em: 20 nov. 2019.

- Funções Trigonométricas: conhecendo, analisando e modelando. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=45743>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Gráficos das funções trigonométricas - Função seno. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=21944>. Acesso em: 20 nov. 2019.

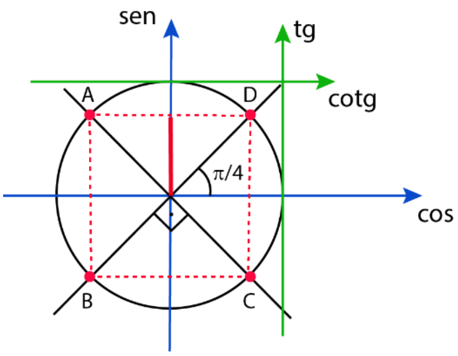
- Gráficos das funções trigonométricas - Função cosseno. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=38216>. Acesso em: 20 nov. 2019.

[2] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F3%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5F%20Raz%C3%B5es%20Trigonom%C3%A9tricas%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

Habilidade
Determinar seno, cosseno e tangente de ângulos no ciclo trigonométrico.

Questão 02

Seja o ciclo trigonométrico representado abaixo por uma circunferência de raio unitário.



O quadrado ABCD representado na figura possui diagonais $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ que formam $45°$ com o eixo dos cossenos. Sobre as razões trigonométricas do ângulo $\frac{\pi}{4}$ podemos afirmar que:

(A) sen$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ cos$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tg$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(B) sen$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cos$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tg$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(C) sen$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cos$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ tg$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

(D) sen$\left(\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ **cos**$\left(\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ **tg**$\left(\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\right) = \mathbf{1}$

(E) sen$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ cos$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ tg$\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante selecione o conjunto adequado de valores para as razões trigonométricas do ângulo de $45°$ num círculo de raio unitário, o que envolve a habilidade de determinar seno, cosseno e tangente de ângulos no ciclo trigonométrico.

É importante reconhecer que uma das formas mais comuns de resolver esse problema, contornando a habilidade aferida, é reconhecer que o ângulo de $\frac{\pi}{4}$ radianos é equivalente a $45°$, conforme pode ser apreciado a seguir:

$$\begin{array}{ccc} \pi \text{ rad} & = & 180° \\ \dfrac{\pi}{4} \text{ rad} & = & x \end{array}$$

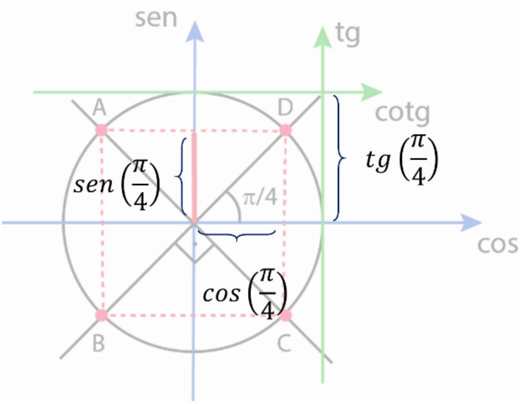
$$x = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \cdot \frac{180°}{\pi \text{ rad}} = \frac{180°}{4} = 45°$$

As razões trigonométricas desse ângulo são notáveis:

$$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2};\ cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2};\ tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = tg(45°) = 1$$

Deve-se salientar que justamente a abordagem por meio do reconhecimento de ângulos notáveis e suas razões trigonométricas, quando realizada de maneira falha pelo estudante, é a principal responsável pelo assinalamento das demais alternativas. Os estudantes que assinalam A (sen$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ cos$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ tg$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$) ou C (sen$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cos$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ tg$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$), por exemplo, provavelmente reconhecem erroneamente as razões trigonométricas dos ângulos de 30° ou 60°. No caso das alternativas B e E, são misturados os valores das razões trigonométricas de todos os três ângulos notáveis: em B (sen$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cos$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ tg$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$), o estudante associa corretamente o seno e cosseno de $\frac{\pi}{4}$, mas assinala o valor da tg$\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, como valor de tg$\left(\frac{\pi}{4}\right)$; já em E (sen$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ cos$\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$ tg$\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$), analogamente, o estudante demonstra saber o valor da tg$\left(\frac{\pi}{4}\right)$, mas associa erroneamente o sen$\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ como sen$\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e o cos$\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ como cos$\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Contudo, espera-se que o estudante seja capaz de resolver a atividade mesmo sem conhecer previamente os valores das razões trigonométricas do ângulo notável de 45°, ou, pelo menos, que o estudante verifique a resposta alcançada por meio do uso do ciclo trigonométrico fornecido no enunciado, identificando adequadamente a posição e a magnitude de cada uma das razões trigonométricas:



Dessa maneira, é nítido, por exemplo, que a tangente do ângulo $\frac{\pi}{4}$ tem comprimento equivalente ao raio da circunferência unitária, sendo, portanto, igual a 1.

Já os valores de seno e cosseno, que são iguais, não precisam ser calculados com exatidão (embora o possam ser por meio do Teorema de Pitágoras). Basta inferir que o valor dessas razões precisa estar situado no intervalo entre $\frac{1}{2}$ e 1. Dessa forma, a única alternativa apresentada que responde adequadamente ao comando dentro dessas condições é a alternativa **D**, que apresenta $tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ e $\frac{1}{2} < sen\left(\frac{\pi}{4}\right) < 1$; $\frac{1}{2} < cos\left(\frac{\pi}{4}\right) < 1$.

O professor deve ficar sempre atento para identificar estudantes que demonstrem dificuldades com esse tipo de questão. Se isso acontecer, recomenda-se o trabalho da sequência didática de **Razões Trigonométricas**[3] durante o período letivo e dentro das possibilidades do planejamento. Uma maneira interessante de realizar esse trabalho é empregando Metodologias Ativas de ensino, como a Gamificação. Para empregar essa abordagem, o professor convidará os estudantes a se dividirem em equipes e participar de um jogo em que devem percorrer a sequência didática em conjunto, de maneira que cada equipe apresente a resolução das atividades correspondentes. A cada rodada, pontuarão aqueles que alcançarem respostas adequadas dentro do tempo máximo estipulado pelo professor, de modo que os vencedores devem explicar seu raciocínio. Essa estratégia engaja os estudantes ao mesmo tempo que cria oportunidades para que eles discutam entre si as soluções, aprendendo

---

[3] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F3%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5F%20Raz%C3%B5es%20Trigonom%C3%A9tricas%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

uns com os outros. As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Resolver problemas que envolvem razões trigonométricas no triângulo retângulo.

- Determinar seno, cosseno e tangente de ângulos no ciclo trigonométrico.

- Identificar os gráficos das funções seno e cosseno.

Para complementar os trabalhos com essa sequência didática, sugere-se a consulta às seguintes referências:

- Conhecendo o círculo trigonométrico. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1203>. Acesso em: 20 nov. 2019.

- Estudando o círculo (ou ciclo) trigonométrico com o software GeoGebra – Parte 5: definindo a tangente no ciclo trigonométrico. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=56740>. Acesso em: 20 nov. 2019.

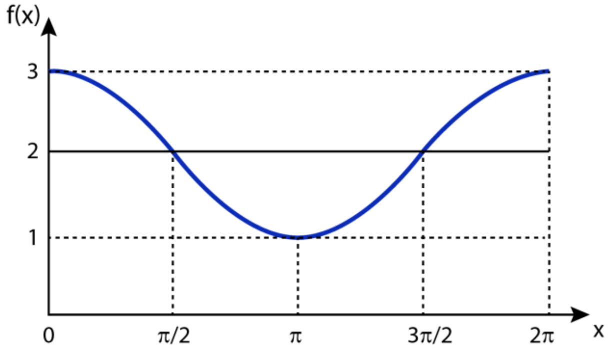
Habilidade
Identificar os gráficos das funções seno e cosseno.

Questão 03

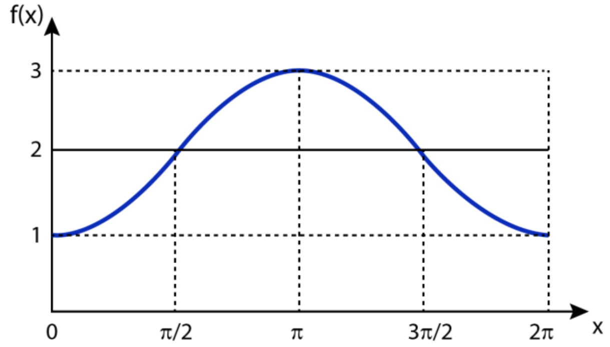
As funções trigonométricas têm importantes aplicações na ciência como, por exemplo, em modelos matemáticos utilizados para descrever o processo respiratório. Seja a função $f(x) = 2 - \cos x$ que representa de forma simplificada uma dessas funções.

É correto afirmar que o gráfico de $f(x)$ é dado por:

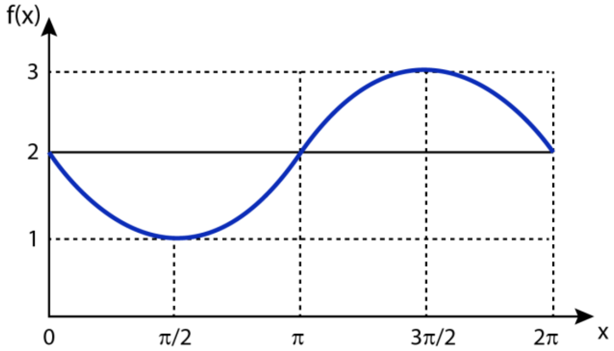
(A)



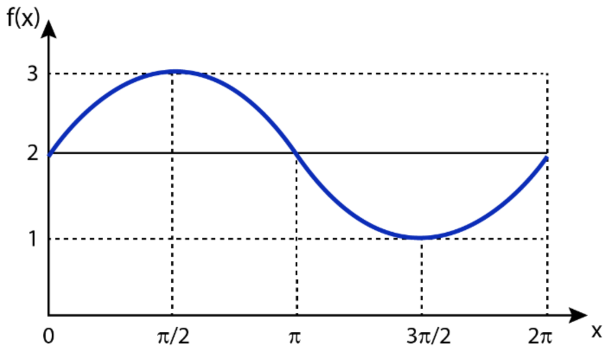
(B)



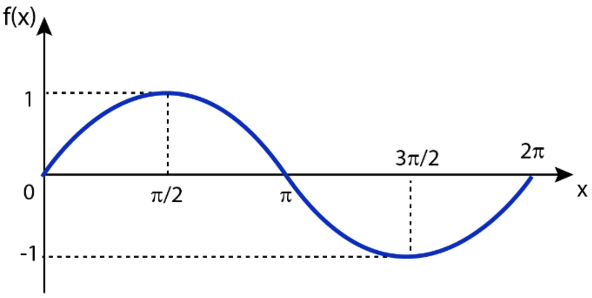
(C)



(D)



(E)



Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante selecione o gráfico que representa adequadamente a função $f(x) = 2 - \cos x$, o que envolve a habilidade de identificar os gráficos das funções seno e cosseno. Novamente, ressalta-se a importância de que o estudante seja capaz de realizar o transporte bilateral entre as propriedades algébricas (a expressão genérica da função, seus coeficientes e o significado deles) e as propriedades gráficas (máximos, mínimos, pontos de intersecção com os eixos) das funções seno e cosseno.

Dominar essa habilidade permite que o estudante compreenda, com maior ou menor grau de precisão, comportamentos ondulatórios, oscilantes ou combinações desses e outros comportamentos, de forma a incrementar sua competência em modelar fenômenos periódicos.

Novamente, evocam-se as expressões genéricas das funções trigonométricas, conforme observado por Lima (2013)[4]:

$$f(x) = a + b \cdot cos(cx + d)$$

De modo que os parâmetros a e b controlam a amplitude e o deslocamento vertical do gráfico da função e os parâmetros c e d controlam o período e o deslocamento horizontal da função. No caso da função apresentada:

$$f(x) = 2 - \cos x$$

Temos $a = 2$, e $b = -1$, $c = 1$ e $d = 0$.

A consequência de $a = 2$ é que o contradomínio (e, consequentemente, a imagem) da função apresentada deverá pertencer ao intervalo $[-1 + a,\ 1 + a] = [1, 3]$. Já o fato de que $b = -1$ indica que a amplitude da função não é alterada, mas o gráfico da função é invertido, ou seja, os máximos da função $\cos(x)$ (que ocorrem para todo $x = 2k\pi$) serão transformados em mínimos.

Portanto, para representar a função $f(x) = 2 - \cos x$, deve-se procurar um gráfico cujos valores (eixo y) variem dentro do intervalo $[-1, 3]$, e cujos mínimos ocorram para todos os $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}_+$. Trata-se do gráfico mostrado na alternativa **B**.

Os estudantes que assinalaram a alternativa A identificam as propriedades da função cosseno adequadamente, compreendem corretamente o deslocamento vertical da função graças a $a = 2$, mas não percebem que $b = -1$ causará a inversão do gráfico. Na verdade, essa alternativa corresponde à função $g(x) = 2 + \cos(x)$.

Já as alternativas C, D e E, respectivamente correspondentes às funções $h(x) = 2 - sen(x)$; $i(x) = 2 + sen(x)$ e $j(x) = sen(x)$, ocorrem quando os estudantes

[4] LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

confundem as funções seno e cosseno, em alguns casos sinalizando compreensão também parcial do efeito de cada parâmetro no formato dessas funções.

Ao perceber que um grupo de estudantes sinalizou dificuldade com essa questão, a sugestão que fazemos ao professor é que reserve um momento dentro do período letivo e das possibilidades do seu planejamento para trabalhar a sequência didática de **Razões Trigonométricas**[5]. Uma das maneiras de fazê-lo é empregar Metodologias Ativas de ensino, a exemplo da Aprendizagem entre Pares ou Times. Selecionando essa abordagem, o professor dividirá os estudantes em equipes, aproximando aqueles com nível de conhecimento similar, e proporá que os membros dessas equipes percorram a sequência didática em conjunto, discutindo as atividades entre si, aprendendo uns com os outros e construindo as soluções de forma colaborativa. As habilidades pertencentes a essa sequência são:

- Resolver problemas que envolvem razões trigonométricas no triângulo retângulo.

- Determinar seno, cosseno e tangente de ângulos no ciclo trigonométrico.

- Identificar os gráficos das funções seno e cosseno.

O uso do aplicativo de código aberto GeoGebra pode ser muito útil na construção e visualização do ciclo trigonométrico e das funções trigonométricas, além de ser uma ferramenta que amplia o grau de engajamento dos estudantes. Para elaborar as atividades de trabalho da sequência didática, o professor pode procurar suporte nas referências a seguir:

- Transformações das funções seno e cosseno. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/Bbzfry8U>. Acesso em: 20 nov. 2019.

- Funções Trigonométricas: conhecendo, analisando e modelando. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=45743>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Gráficos das funções trigonométricas - Função seno. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=21944>. Acesso em: 20 nov. 2019.

[5] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F3%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5F%20Raz%C3%B5es%20Trigonom%C3%A9tricas%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

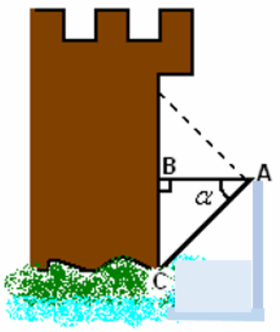
- Gráficos das funções trigonométricas - Função cosseno. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=38216>. Acesso em: 20 nov. 2019.

- FILHO, S R A D. **Uma abordagem do ensino de funções trigonométricas por meio de atividades interdisciplinares**. 2017. 129 fl. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2018/05/24112017Sandro-Rog%C3%A9rio-de-Abreu-Duarte-Filho.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

Habilidade
Resolver problemas que envolvem razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Questão 04

Observe a figura de uma torre medieval e sua ponte levadiça (AB), em que:



$\overline{AB} = 5$

$\overline{AC} = 6{,}4$

$\overline{BC} = 4$

Sabendo que o triângulo ABC é retângulo em B, qual das seguintes opções representa o sen α?

(A) $\frac{5}{6{,}4}$

(B) $\frac{4}{5}$

(C) $\boldsymbol{\frac{4}{6{,}4}}$

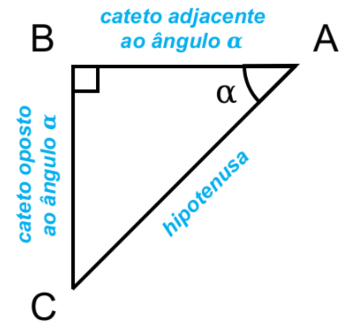
(D) $\frac{5}{4}$

(E) $\frac{6{,}4}{5}$

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante selecione o valor adequado do seno de um dos ângulos em um triângulo retângulo, dados os comprimentos dos catetos e da hipotenusa, o que envolve a habilidade de resolver problemas utilizando razões trigonométricas no triângulo retângulo.

Para responder a essa questão, o estudante precisa recapitular a definição de seno e cosseno no triângulo retângulo. No exemplo fornecido, a hipotenusa é o maior lado ($\overline{AC}$), oposto ao ângulo reto. Para o ângulo α, $\overline{BC}$ é o cateto oposto ao ângulo, enquanto $\overline{AB}$ é o adjacente ao ângulo. Portanto:



$$sen(\alpha) = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} = \frac{\overline{BC}}{AC} = \frac{4}{6{,}4}$$

Levando à alternativa **C** $\left(\frac{4}{6{,}4}\right)$.

Nessa questão, as alternativas apresentam valores obtidos por meio de outras relações trigonométricas que não o seno de α, conforme o quadro a seguir:

Alternativa	Relação empregada	Razão trigonométrica
A $\left(\frac{5}{6{,}4}\right)$	$\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}$	Cosseno de α $\cos(\alpha)$
B $\left(\frac{4}{5}\right)$	$\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$	Tangente de α $\tan(\alpha)$
D $\left(\frac{5}{4}\right)$	$\frac{cateto\ adjacente}{cateto\ oposto}$	Cotangente de α $\cot(\alpha)$ ou $\frac{1}{\tan(\alpha)}$
E $\left(\frac{6{,}4}{5}\right)$	$\frac{hipotenusa}{cateto\ adjacente}$	Secante de α $\sec(\alpha)$ ou $\frac{1}{\cos(\alpha)}$

Se um grupo de estudantes sinalizar dificuldades com essa questão, será muito interessante que o professor trabalhe – dentro das possibilidades do planejamento e durante o período letivo – a sequência didática de **Razões Trigonométricas**[6]. Uma sugestão é que seja empregada uma Metodologia Ativa

[6] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id

de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Ao fazê-lo, o professor dividirá os estudantes em equipes (atentando para aproximar aqueles com níveis de conhecimento similares) para que executem em conjunto as tarefas da sequência, cooperando entre si para resolver de maneira colaborativa as situações-problema propostas, buscando seus caminhos para resolução e debatendo suas descobertas. As habilidades pertencentes a essa sequência são:

- Resolver problemas que envolvem razões trigonométricas no triângulo retângulo.

- Determinar seno, cosseno e tangente de ângulos no ciclo trigonométrico.

- Identificar os gráficos das funções seno e cosseno.

Para se aprimorar nas bases teóricas das funções trigonométricas, o professor pode consultar os materiais e conteúdos selecionados a seguir:

- Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/dsynurr1hh6w.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Exemplo: trigonometria para calcular os lados e ângulos de um triângulo retângulo. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/exemplo-trigonometria-para-calcular-os-lados-e-angulos-de-um-triangulo-retangulo>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Trigonometria: Descobrindo a razão seno e cosseno no triângulo retângulo. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=28431>. Acesso em: 20 nov. 2019.

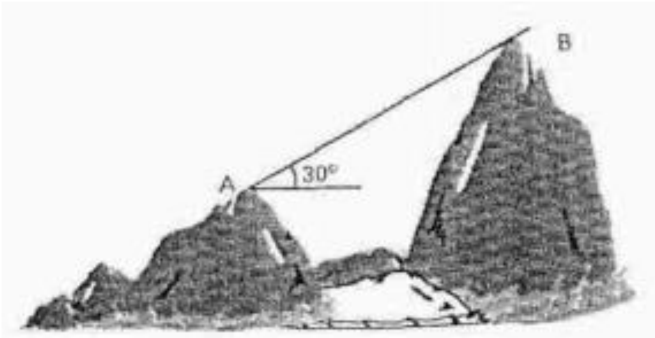
- Razões Trigonométricas (Seno, cosseno e tangente) no Triângulo Retângulo - Atividade Concreta. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=2191>. Acesso em: 20 nov. 2019.

Habilidade
Resolver problemas que envolvem razões trigonométricas no triângulo retângulo.

=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F3%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5F%20Raz%C3%B5es%20Trigonom%C3%A9tricas%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

Questão 05

As alturas (em relação ao nível do mar) em que estão dois pontos A e B são, respectivamente, 812 m e 1020 m. Do ponto **A** vê-se o ponto **B** sob um ângulo de 30° com o plano horizontal, conforme a figura. Determine a distância entre os pontos **A** e **B**.



Dados: sen 30° = $\frac{1}{2}$; cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; tg 30° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(A) $104\ m$

(B) $208\sqrt{3}$ m

(C) $\frac{416\sqrt{3}}{3}$ m

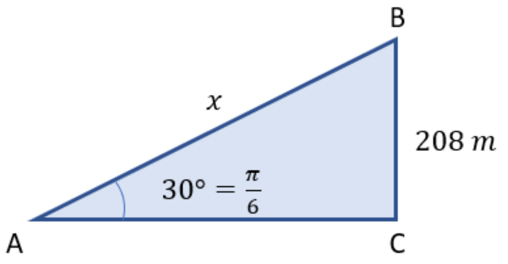
(D) 416 m

(E) 208 m

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante calcule a distância entre dois pontos, dada a diferença de altura entre eles e a inclinação de sua distância linear em relação ao plano horizontal. Essa questão avalia a habilidade de resolver problemas que envolvem razões trigonométricas no triângulo retângulo.

O estudante deve perceber a formação de um triângulo retângulo, cujos catetos são as distâncias horizontal e vertical entre os pontos A e B. A distância questionada corresponde, portanto, à hipotenusa desse triângulo, **no qual o comprimento do cateto oposto ao ângulo de 30° é a diferença entre as alturas**, equivalente a $208\ m$ ($1020\ m - 812\ m$). Portanto, sendo x o comprimento da hipotenusa em questão, temos:



$$sen\ 30° = \frac{208\ m}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{208\ m}{x}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \times 208\ m = 416\ m$$

De maneira que a alternativa **D** ($416\ \text{m}$) responde adequadamente à questão.

Os estudantes que escolhem a alternativa A ($104\ m$) possivelmente empregam a razão trigonométrica seno, porém invertem a ordem do cateto oposto e da hipotenusa na expressão numérica. A expressão resolvida nesse caso corresponde a:

$$sen\ 30° = \frac{x}{208\ m} \Rightarrow x = 104\ m \quad (A)$$

Os estudantes que selecionam as alternativas B ($208\sqrt{3}\ \text{m}$) e C $\left(\frac{416\sqrt{3}}{3}\ \text{m}\right)$ misturam as razões trigonométricas no desenvolvimento da expressão que resolve a situação-problema apresentada, sinalizando uma possível incompreensão do significado dessas razões no triângulo retângulo. As expressões equivalentes são:

$$\frac{cos(30°)}{sen(30°)} = \frac{x}{208m} \Rightarrow x = 208\sqrt{3}\ m \quad (B)$$

$$\frac{cos(30°)}{sen(30°)} = \frac{208\ m}{x} \Rightarrow x = \frac{208}{\sqrt{3}} = \frac{208\sqrt{3}}{3}\ m \quad (C)$$

Nas quais vale recordar que $\frac{cos(30°)}{sen(30°)} = \frac{1}{tg(30°)}$.

Por fim, a escolha da alternativa E ($208\ \text{m}$) mostra que possivelmente os estudantes ou não entenderam a proposta do enunciado ou consideraram incorretamente que a distância linear entre os pontos A e B corresponde à sua diferença de altura, que é a projeção vertical da distância questionada.

O professor deve atentar para grupos de estudantes que sinalizem dificuldades com essa questão. Ao perceber isso, recomenda-se o trabalho da sequência didática de **Razões Trigonométricas**[7], durante o período letivo e dentro das

[7] Disponível em:
<https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id

possibilidades do planejamento. Uma maneira interessante de realizar esse trabalho é empregando Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem baseada em Problemas. Para empregar essa abordagem, o professor percorrerá a sequência didática junto com os estudantes, apresentando as situações-problema a cada atividade e problematizando suas soluções, construindo junto com a sala de aula as metodologias para resolução e estimulando que os estudantes debatam entre si os possíveis algoritmos. As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Resolver problemas que envolvem razões trigonométricas no triângulo retângulo.

- Determinar seno, cosseno e tangente de ângulos no ciclo trigonométrico.

- Identificar os gráficos das funções seno e cosseno.

As referências a seguir podem suportar a realização dessas atividades:

- Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/dsynurr1hh6w.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Exemplo: trigonometria para calcular os lados e ângulos de um triângulo retângulo. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/exemplo-trigonometria-para-calcular-os-lados-e-angulos-de-um-triangulo-retangulo>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Trigonometria: Descobrindo a razão seno e cosseno no triângulo retângulo. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=28431>. Acesso em: 20 nov. 2019.

- Razões Trigonométricas (Seno, cosseno e tangente) no Triângulo Retângulo - Atividade Concreta. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=2191>. Acesso em: 20 nov. 2019.

Habilidade

=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F3%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5F%20Raz%C3%B5es%20Trigonom%C3%A9tricas%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

Resolver problemas de análise combinatória que envolvam arranjos simples e/ou combinações.

Questão 06

A partir de um grupo de 9 pessoas, formado por 6 homens e 3 mulheres, pretende-se formar filas com 5 dessas pessoas de modo que as 3 mulheres ocupem sempre as 3 primeiras posições. Assim, de todas as filas possíveis, quantas obedecem a essa restrição?

(A) 12

(B) 15

(C) 120

(D) 180

(E) 720

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante calcule o número de filas possíveis que podem ser formadas com o número de homens e mulheres fornecido, dentro das regras de seleção indicadas. Essa questão avalia a habilidade de resolver problemas de análise combinatória que envolvam arranjos simples e/ou combinações.

Para ocupar as três posições de mulheres, existem três opções para a primeira posição, duas opções para a segunda e uma opção para a terceira; analogamente, no caso das posições de homens, existem seis homens possíveis para a primeira posição e cinco homens possíveis para a segunda posição. Portanto:

M	M	M	H	H
3	2	1	6	5

$$N = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 = 6 \cdot 30 = 180$$

Uma outra forma de resolver essa questão, uma vez que o número de mulheres na fila e suas posições são fixas, o número total de combinações pode ser derivado a partir do princípio multiplicativo. O número total de filas diferentes que podem ser formadas corresponde ao produto de todas as permutações possíveis das três mulheres e todos os arranjos possíveis dos seis homens, tomados dois a dois, ou seja:

M	M	M	H	H

$$N = \overbrace{P_3}^{\text{Permutação das mulheres}} \cdot \overbrace{A_{6,2}}^{\text{Arranjo dos homens}}$$

$$P_n = n!$$

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

$$N = 3! \cdot \frac{6!}{(6-2)!} = 3! \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 = 6 \cdot 30 = 180$$

Independente do desenvolvimento escolhido, a alternativa que responde adequadamente à questão é a alternativa **D** (180).

Os estudantes que selecionam a alternativa E (720) confundem as regras de seleção e alcançam a resposta que corresponde a filas com três homens na frente e duas mulheres atrás. Nessa situação, existiriam $6 \cdot 5 \cdot 4$ maneiras de arranjar os homens, e $3 \cdot 2$ maneiras de arranjar as mulheres, perfazendo o total de $120 \cdot 6 = 720$ possibilidades. Vale ressaltar que, embora esses estudantes tenham interpretado incorretamente a organização da fila, sua resposta sinaliza que eles foram capazes de empregar adequdamente, dentro das condições entendidas, os princípios da Análise Combinatória, principalmente no que diz respeito à ordem dos homens e mulheres na fila ser importante para a definição do resultado final. Já os estudantes que selecionam a alternativa B (15) possivelmente não percebem que, no caso da formação de filas, a ordem é importante, de maneira que empregam combinações de homens e mulheres ao invés de arranjos de homens e mulheres.

No caso das alternativas A (12) e C (120), possivelmente houve falha na incorporação do número de homens e mulheres disponíveis para formação das filas, com ou sem a aplicação de regras de seleção. Para alcançar o valor mostrado em A, provavelmente o estudante calculou o produto da permutação das posições de mulheres e homens ($3! \cdot 2! = 12$). Já no segundo, provavelmente o estudante realizou a permutação de todas as posições possíveis da fila ($5! = 120$), sem considerar que há mais candidatos homens que posições a serem ocupadas.

Ao perceber que algum grupo de estudantes sinalizou dificuldade nessa questão, o professor pode (durante o período letivo e conforme surgir oportunidade) trabalhar a sequência didática de **Problemas de Contagem**[8]. Nesse caso, será interessante propor atividades que empreguem Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Ao adotar essa abordagem, dividirá os estudantes em equipes (aproximando aqueles com níveis de conhecimento similares) e oferecerá atividades para que realizem em conjunto, discutindo suas respostas, construindo colaborativamente suas resoluções, apresentando posteriormente seus resultados e debatendo com a classe suas conclusões.

As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Resolver problemas que envolvam processos de contagem – princípio multiplicativo.

- Resolver problemas de análise combinatória que envolvam arranjos simples e/ou combinações.

A consulta a algumas referências listadas a seguir pode ser útil aos professores na sua capacitação e na elaboração de seus planos de aula:

- Princípio Fundamental da Contagem - OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5yr174ozquo8s.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- O Fatorial de um Número e Permutações Simples - OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/da67yrzgim8oc.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Arranjos e Combinações Simples – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/8erjl43irugwk.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Fórmula da permutação. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/formula-da-permutacao>. Acesso em: 22 nov. 2019.

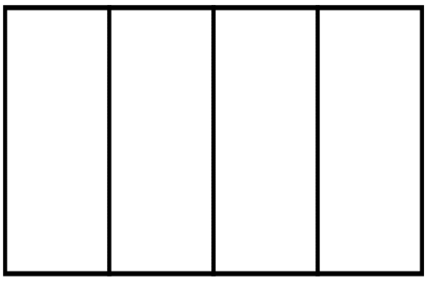
[8] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F3%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FProblemas%20de%20contagem%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

- Análise Combinatória. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=769>. Acesso em: 22 nov. 2019.

Habilidade
Resolver problemas que envolvam processos de contagem – princípio multiplicativo.

Questão 07

Haverá um torneio interclasses na escola, sendo que cada sala será responsável por criar um "grito de guerra” e pintar uma bandeira listrada como a figura abaixo:



Se foram distribuídos conjuntos idênticos de lápis para cada sala, sendo cada conjunto constituído de 5 cores distintas de lápis, e sabendo que existe a restrição de que as listras adjacentes não podem ser pintadas com a mesma cor, calcule o número de bandeiras que é possível se criar.

(A) 120

(B) 200

(C) 320

(D) 500

(E) 625

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante calcule o número total de combinações de cores para a bandeira que se adequam às condições fornecidas no enunciado. Essa questão diz respeito à habilidade de resolver problemas que envolvam processos de contagem.

Resolver essa questão utilizando o princípio multiplicativo envolve perceber que a bandeira é dividida em quatro faixas. Para pintar a primeira faixa, qualquer uma das cinco cores fornecidas pode ser utilizada. A faixa seguinte pode ser pintada com qualquer outra das cinco cores (portanto, há quatro casos diferentes na segunda faixa). A terceira e a quarta faixa seguem o mesmo princípio da segunda, de modo que o número total de possibilidades pode ser dado pela seguinte expressão:

5 cores possíveis	**4** cores possíveis	**4** cores possíveis	**4** cores possíveis

$$N = 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 320$$

Logo, há 320 bandeiras distintas que podem ser criadas com as cinco cores fornecidas, conforme mostrado na alternativa **C** (320), que responde corretamente à questão.

Alguns estudantes ignoram a regra de seleção de cores que impede faixas adjacentes de possuírem a mesma cor, ou não incluem essa informação de forma adequada em seu desenvolvimento, assinalando a alternativa E (625) que exibe o valor do produto nessa situação ($5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$).

Outros estudantes invertem a regra de seleção, julgando que a primeira faixa da bandeira terá quatro cores disponíveis e as demais podem ser pintadas com quaisquer cinco cores, alcançando um número de combinações equivalente a $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$ (D).

Um terceiro grupo, que opta pela alternativa A (120), exclui uma cor adicional para cada faixa consecutiva após a primeira, selecionado o valor $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

Por fim, um último conjunto de estudantes utiliza incorretamente o princípio da composição de casos, partindo, por exemplo, da hipótese que *"existem duas extremidades na bandeira, e cada extremidade pode ter qualquer cor. No entanto, cada caso é contado duas vezes, de forma que o resultado deve ser dividido por dois"*. Nesse caso, assinala o valor correspondente a:

$$\frac{5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4}{2} = 200\ (B)$$

Em qualquer um desses casos, sinaliza-se a possibilidade do uso incorreto ou incompleto do princípio multiplicativo ou o diagrama de árvore, ou – principalmente no caso de B – a incorporação de outros componentes da análise combinatória como permutações e arranjos, sem construir uma estratégia clara para delimitar o espaço a ser amostrado.

Professor, ao perceber que certo grupo de estudantes demonstrou dificuldades com essa questão, será proveitoso trabalhar – durante o período letivo e dentro das possibilidades do planejamento – a sequência didática de **Problemas de Contagem**[9]. Sugere-se aqui a aplicação de Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Para tal, o professor dividirá os estudantes em equipes, aproximando aqueles com níveis de conhecimento próximos, para que executem em conjunto as tarefas da sequência, cooperando entre si para resolver de maneira colaborativa as situações-problema propostas, buscando seus caminhos para resolução e debatendo suas descobertas. As habilidades pertencentes a essa sequência são:

- Resolver problemas que envolvam processos de contagem – princípio multiplicativo.

- Resolver problemas de análise combinatória que envolvam arranjos simples e/ou combinações.

Os seguintes materiais de referência podem se provar úteis para o professor que desejar se capacitar para o desenvolvimento das atividades em questão:

- Exemplo: As maneiras de fazermos arranjos com cores. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/exemplo-as-maneiras-de-fazermos-arranjos-com-cores>. Acesso em: 22 nov. 2019.

- Princípio Fundamental da Contagem - OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5yr174ozquo8s.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- O Fatorial de um Número e Permutações Simples - OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/da67yrzgim8oc.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Arranjos e Combinações Simples – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/8erjl43irugwk.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

---

[9] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F3%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FProblemas%20de%20contagem%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

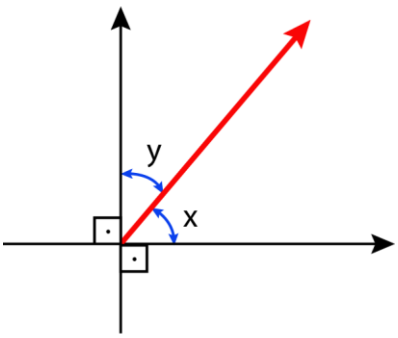
- Fórmula da permutação. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/formula-da-permutacao>. Acesso em: 22 nov. 2019.

- Análise Combinatória. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=769>. Acesso em: 22 nov. 2019.

Habilidade
Determinar seno, cosseno e tangente de ângulos no ciclo trigonométrico.

Questão 08

Dois ângulos complementares são tais que um é o dobro do outro.



Podemos afirmar que a tangente do menor desses ângulos vale:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(B) $\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\sqrt{3}$

(E) $2\sqrt{2}$

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante calcule ou infira o valor da tangente de um ângulo do primeiro quadrante, o que envolve a habilidade de determinar seno, cosseno e tangente de ângulos no ciclo trigonométrico. A utilidade do ciclo trigonométrico é muito evidente mesmo quando ele não está explicitamente representado em situações-problema que o envolvam, uma vez que ele pode ajudar os estudantes a lembrar da origem ou derivação das razões trigonométricas, o que – por sua vez – permite que ele realize inferências ou verifique se o valor por ele encontrado é geometricamente aceitável.

Nessa questão, os ângulos x e y são complementares, ou seja, $x + y = 90°$, e um deles é o dobro do outro. Supondo que x é o menor dos dois ângulos, teremos:

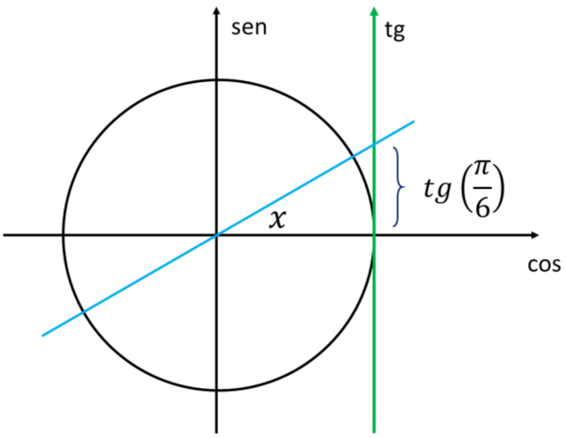
$$y = 2x \Leftrightarrow x + 2x = 90°$$

$$\Leftrightarrow 3x = 90° \therefore x = 30°$$

Tendo determinado adequadamente o valor de x, o estudante pode responder à questão de duas maneiras diferentes: a primeira é relembrar as razões trigonométricas dos ângulos notáveis, que, para o ângulo de 30° ou $\frac{\pi}{6}$ correspondem a

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2};\ cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};\ tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Paralelamente, se o estudante preferir utilizar o ciclo trigonométrico para inferir a tangente, ele pode localizar o ângulo de 30° ou $\frac{\pi}{6}$ na circunferência de raio unitário, da seguinte forma:



Observando que o valor questionado é ligeiramente superior ao seu seno, mas inferior ao seu cosseno, calculando esse valor a partir de triângulos retângulos derivados desse ciclo. Em ambos os casos, o desenvolvimento deve aponta-lo à alternativa **B** $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Alguns estudantes podem apontar a alternativa D $\left(\sqrt{3}\right)$, que exibe a tangente do ângulo y (o maior dentre os dois); outros apontam a alternativa C $\left(\frac{1}{2}\right)$ pois confundem a tangente do ângulo x com seu seno. Já os estudantes que apontam as alternativas A $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou E ($2\sqrt{2}$) são aqueles que possivelmente confundem as razões trigonométricas dos ângulos notáveis, assinalando o número correspondente ao seno ou cosseno de $45°$ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou um número similar ($2\sqrt{2}$).

Professor, ao perceber que algum grupo de estudantes sinalizou dificuldade nessa questão, a sugestão é que trabalhe com eles a sequência didática de **Razões Trigonométricas**[10]. Essa atividade deve ser realizada durante o período letivo, em momento oportuno no planejamento. Dentre as diferentes formas de realizar esse trabalho, destaca-se a utilização de Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Seguindo essa abordagem, deve-se dividir os estudantes em equipes, respeitando os níveis de conhecimento de cada um, propondo posteriormente que realizem as atividades em colaboração, debatendo seus caminhos e conclusões. A intenção é estimular descobertas e permitir que os estudantes aprendam uns com os outros.

As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Resolver problemas que envolvem razões trigonométricas no triângulo retângulo.

- Determinar seno, cosseno e tangente de ângulos no ciclo trigonométrico.

- Identificar os gráficos das funções seno e cosseno.

Para complementar os trabalhos com essa sequência didática, sugere-se a consulta às seguintes referências:

- Conhecendo o círculo trigonométrico. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1203>. Acesso em: 20 nov. 2019.

- Estudando o círculo (ou ciclo) trigonométrico com o software GeoGebra – Parte 5: definindo a tangente no ciclo trigonométrico. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=56740>. Acesso em: 20 nov. 2019.

Habilidade
Resolver problemas que envolvam processos de contagem – princípio multiplicativo.

Questão 09

[10] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F3%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5F%20Raz%C3%B5es%20Trigonom%C3%A9tricas%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

As duas figuras abaixo mostram placas de veículos automotores. A primeira mostra o modelo ainda utilizado no Brasil, mas que está em processo de transição para o modelo da segunda placa, que segue um novo padrão para o Mercosul.

Uma reportagem sobre a mudança no padrão das placas informa que a nova placa permitirá obter um número muito maior de combinações diferentes. A placa antiga permitia menos de 18 milhões de combinações.

Considerando que existam 10 algarismos e 26 letras para comporem as placas, quantas seriam as combinações no novo modelo, aproximadamente?

(A) 45 milhões

(B) 175 milhões

(C) 258 milhões

(D) 333 milhões

(E) 457 milhões

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante calcule o número de combinações possíveis no novo padrão de placas do Mercosul, dado o formato de cada combinação. Essa questão envolve a habilidade de resolver problemas que envolvam processos de contagem – princípio multiplicativo. Compreender a Análise Combinatória é importante para interpretar o dimensionamento de grandes esforços de categorização.

No contexto da atividade apresentada, a mudança de padrão nas placas brasileiras, além de todas as questões diplomáticas e logísticas, envolve a percepção de que o antigo padrão comporta um número restrito de combinações, que deve ser expandido dada a projeção do crescimento do número de carros não só em nosso país mas em toda a América Latina.

Nessa questão, uma vez que a posição de cada componente é fixa e repetições são permitidas, o número total de combinações pode ser derivado a partir do princípio multiplicativo. O número total de combinações diferentes que podem ser formadas corresponde ao seguinte produto:

$$\boxed{L}\boxed{L} \quad \boxed{N}\boxed{N}\boxed{N} \quad \boxed{L}\boxed{L}$$

$$N = 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26$$

$$\Leftrightarrow N = 676 \cdot 1000 \cdot 676$$

$$\therefore N = 456\,976\,000 \cong 457\,000\,000\ (457\ milhões)$$

Logo, para responder corretamente à questão, deve-se assinalar a alternativa **E**.

Alguns estudantes podem encontrar a alternativa D ao desconsiderar que existem dez algarismos possíveis (de 0 a 9), computando apenas nove (de 1 a 9) possibilidades ($26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 26 \cdot 26 \cong 333$ milhões). Outro caso é aquele em que se consideram apenas números e letras distintos (ou seja, sem repetição), o que leva à alternativa C ($26 \cdot 25 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 24 \cdot 23 \cong 258$ milhões). Os estudantes que assinalam a alternativa B ($26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cong 175$ milhões) possivelmente calculam as combinações possíveis no modelo de placas antigo, alcançando um valor aproximadamente 2,6 vezes inferior ao correto. Por fim, os estudantes que assinalam a alternativa A ($26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 26 \cong 45$ milhões) são aqueles que suprimem uma das posições de algarismos no novo padrão da placa.

O professor deve estar sempre atento para dificuldades que os estudantes podem apresentar nesse tipo de questão. Ao identificar ocorrências desse tipo, sugere-se trabalhar – dentro do período letivo e das possibilidades do planejamento – a sequência didática de **Problemas de Contagem**[11]. Dentre as formas de fazê-lo, destaca-se o uso de Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem Baseada em Problemas. Nessa abordagem, o professor apresentará as situações-problema da sequência didática, problematizando o uso do princípio multiplicativo, combinações ou arranjos na sua solução. Posteriormente, os estudantes serão estimulados a discutir entre si as diferentes estratégias possíveis para resolver os problemas e construirão resoluções colaborativamente, de modo a instigar a descoberta de caminhos para resolução e o debate saudável entre os estudantes.

---

[11] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F3%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FProblemas%20de%20contagem%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Resolver problemas que envolvam processos de contagem – princípio multiplicativo.
- Resolver problemas de análise combinatória que envolvam arranjos simples e/ou combinações.

Para reforçar as atividades propostas na sequência, o professor pode formular planos de aula baseados nas seguintes referências:

- Princípio Fundamental da Contagem - OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5yr174ozquo8s.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- O Fatorial de um Número e Permutações Simples - OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/da67yrzgim8oc.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Arranjos e Combinações Simples – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/8erjl43irugwk.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

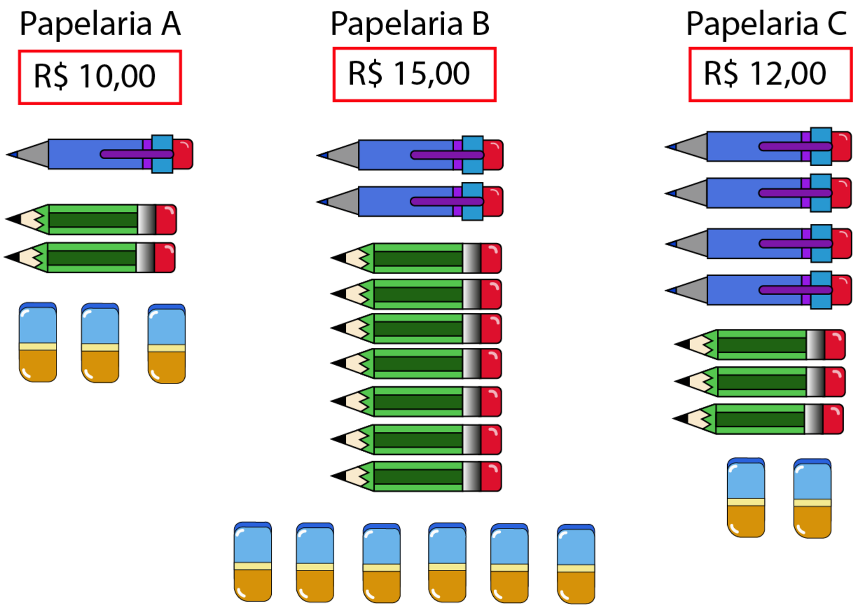
- Fórmula da permutação. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/formula-da-permutacao>. Acesso em: 22 nov. 2019.

- Análise Combinatória. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=769>. Acesso em: 22 nov. 2019.

Habilidade
Relacionar um sistema de equações lineares à matriz correspondente.

Questão 10

Em um determinado bairro de uma cidade, três papelarias vendem produtos consumidos pelos estudantes: caneta, lápis e borracha. As papelarias vendem esses itens em conjuntos compostos por certas quantidades de cada, conforme o esquema abaixo.



Sabendo que o preço de cada item é igual nas três papelarias e que o preço do conjunto de cada papelaria está apresentado acima, qual sistema matricial representa o modelo de resolução matemática para encontrar o preço unitário de cada objeto?

Considere:

x: preço unitário da caneta

y: preço unitário do lápis verde

z: preço unitário da borracha

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix}$

(E) $\boldsymbol{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix}}$

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante selecione a representação matricial adequada para simbolizar o sistema linear do problema. Essa questão envolve a habilidade de relacionar um sistema de equações lineares à matriz correspondente.

Para resolver a questão, o estudante deve decodificar a informação visual contida na figura e traduzi-la como um sistema linear de três equações (papelarias) e três variáveis (produtos), transcrevendo uma notação correspondente. Observando com atenção a figura, pode-se perceber que:

- Na papelaria A, 1 caneta, 2 lápis e 3 borrachas são vendidos a 10 reais.
- Na papelaria B, 2 canetas, 7 lápis e 6 borrachas são vendidos a 15 reais.
- Na papelaria C, 4 canetas, 3 lápis e 2 borrachas são vendidos a 12 reais.

Portanto, sabendo que os custos unitários de cada item são iguais em todas as três papelarias, e considerando x como preço unitário da caneta, y como preço unitário do lápis verde e z como preço unitário da borracha, o sistema linear correspondente é:

$$\begin{cases} 1x + 2y + 3z = 10 \\ 2x + 7y + 6z = 15 \\ 4x + 3y + 2x = 12 \end{cases}$$

Cuja notação matricial é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Conforme mostrado na alternativa **E**, que responde à questão corretamente.

Estudantes que assinalam a alternativa D $\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix}\right)$ provavelmente sinalizam ter problemas na montagem da matriz correspondente ao sistema linear, posicionando incorretamente os coeficientes das variáveis (x, y e z) nas colunas da matriz, resultando na matriz transposta à correta.

Já as alternativas A, B e C apresentam matrizes de coeficientes com permutações das linhas que não são acompanhadas pelas mesmas permutações na matriz de termos independentes: na alternativa A $\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix}\right)$, as linhas 2 e 3 da matriz de coeficientes estão trocadas; em B $\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix}\right)$, as linhas 1 e 3; e em C $\left(\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 12 \end{bmatrix}\right)$, as linhas 1 e 2. Estudantes que assinalam essas alternativas podem não compreender que as igualdades são construídas entre os índices correspondentes das matrizes em cada lado da igualdade, e, portanto, uma permutação de linhas em um lado da igualdade deve ser acompanhada também no outro lado.

Na eventualidade de um grupo de estudantes demonstrar dificuldades com essa questão, sugere-se ao professor que empregue – conforme as possibilidades do seu planejamento e durante o período letivo – Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Ao aplicar essa abordagem, os dividirá os estudantes em equipes, procurando aproximar aqueles com níveis de conhecimento similares. Em seguida, irá propor que os membros da equipe percorram juntos as atividades da sequência, resolvendo as questões colaborativamente. A intenção, aqui, é estimular o debate entre os estudantes, fazendo com que comparem seus métodos de resolução e aprendam em conjunto.

Os seguintes materiais de referência podem ser úteis no preparo dos planos de aula do professor:

- Operações entre Matrizes. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/agora-operacoes-entre-matrizes>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Operações com Matrizes – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/dixrghlgk5cos.pdf>. Acesso em: 22 nov. 2019.

- Sistemas Lineares – Parte 2 – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/83voj5081bwgo.pdf>. Acesso em: 22 nov. 2019.

Habilidade
Resolver problemas de análise combinatória, que envolvam arranjos simples e/ou combinações.

Questão 11

Uma escola está organizando uma competição de vôlei, com times de 6 estudantes. Para o time A, se candidataram 4 meninos e 6 meninas. Quantas combinações são possíveis para que se tenha um número igual de meninos e meninas nesse time?

(A) 1

(B) 24

(C) 80

(D) 210

(E) 2880

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante calcule o número de combinações possíveis para a montagem de um time de vôlei dados o número de candidatos e as regras de seleção. Essa questão envolve a habilidade de resolver problemas de análise combinatória, que envolvam arranjos simples e/ou combinações.

Nessa atividade, o número de meninos e meninas no time deve ser igual. Uma vez que o time é composto por seis jogadores, deve haver três meninos e três meninas em cada time. Se esse número é fixo, a quantidade total de times que pode ser formada é dada pelo produto entre todas as combinações de seis meninas tomadas três a três e todas as combinações de quatro meninos tomados três a três, da seguinte forma:

$$\boxed{M}\boxed{M}\boxed{M}\boxed{H}\boxed{H}\boxed{H}$$

$$N = \overbrace{C_{6,3}}^{\text{Combinação de 6 meninas, 3 a 3}} \cdot \overbrace{C_{4,3}}^{\text{Combinação de 4 meninos, 3 a 3}} \qquad C_{n,p} = \frac{n!}{n! \cdot (n-p)!}$$

$$N = \frac{6!}{3! \cdot (6-3)!} \cdot \frac{4!}{3! \cdot (4-3)!}$$

$$N = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{4 \cdot 3!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \cdot 4 = 80$$

Logo, há 80 maneiras diferentes de se formar o time dentro das condições apresentadas.

Outra maneira de desenvolver a questão é pensar que, ao escolher três dos seis homens, existem seis possibilidades para a primeira escolha, cinco para a segunda e quatro para a terceira. No entanto, como a ordem não importa, essas possibilidades na verdade devem ser divididas por todas as possíveis permutações das três vagas masculinas. De forma análoga, ao escolher três das quatro mulheres, existem quatro possibilidades para a primeira, três possibilidades para a segunda e duas possibilidades para a terceira. Novamente, é necessário dividir esses arranjos pelas permutações das três vagas. A expressão será a seguinte:

$$N = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3!} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!}$$

$$N = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = 20 \cdot 4 = 80$$

Esse número de combinações, obtido por qualquer uma das estratégias, corresponde à alternativa **C** (80), que responde à questão adequadamente.

Os estudantes que selecionam a alternativa E (2880) provavelmente utilizam arranjos de meninos e meninas ao invés de combinações, alcançando um número muito superior ao correto. Já os estudantes que assinalam a alternativa B (24) possivelmente sinalizam não ter compreendido o princípio multiplicativo, posto que somam as combinações de meninos e meninas ao invés de computar seu produto. No caso da alternativa D (210) , provavelmente a regra de seleção não foi observada, uma vez que foi computada a combinação de dez pessoas tomadas seis a seis. A alternativa A (1) é assinalada por estudantes que possivelmente não compreenderam os princípios mais básicos da análise combinatória e precisam de um reforço prioritário nos conhecimentos ligados a esse tópico.

Ao perceber que um grupo de estudantes demonstrou dificuldade com essa questão, a sugestão é que o professor trabalhe, dentro do período letivo e das possibilidades do planejamento, a sequência didática de **Problemas de Contagem**[12]. Há muitas formas diferentes de fazê-lo, mas será especialmente interessante realizar esse trabalho empregando Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Ao adotar essa abordagem, dividirá os estudantes em equipes (aproximando aqueles com níveis de conhecimento similares) e oferecerá atividades para que realizem em conjunto, discutindo suas respostas, construindo colaborativamente suas resoluções, apresentando posteriormente seus resultados e debatendo com a classe suas conclusões.

A sequência didática de Problemas de Contagem envolve as habilidades:

[12] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F3%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FProblemas%20de%20contagem%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

- Resolver problemas que envolvam processos de contagem – princípio multiplicativo.
- Resolver problemas de análise combinatória que envolvam arranjos simples e/ou combinações.

O professor pode procurar inspiração nas referências a seguir para planejar suas atividades:

- Princípio Fundamental da Contagem - OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5yr174ozquo8s.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- O Fatorial de um Número e Permutações Simples - OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/da67yrzgim8oc.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Arranjos e Combinações Simples – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/8erjl43irugwk.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Fórmula da permutação. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/formula-da-permutacao>. Acesso em: 22 nov. 2019.

- Análise Combinatória. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=769>. Acesso em: 22 nov. 2019.

Habilidade
Relacionar um sistema de equações lineares à matriz correspondente.

Questão 12

Em uma praça de alimentação de um *shopping center*, três amigos, Paula, Roberta e Saulo, resolveram fazer uma refeição.

Ao observarem o cardápio disponível, perceberam que teriam que pedir o que era denominado de "Combo", ou seja, um combinado de vários itens por um preço já estabelecido.

Após pagarem por seus combos, os amigos ficaram curiosos para descobrirem o valor de cada um dos itens, que sabiam que era o mesmo, não importando o combo. Para isso, Paula montou, a partir dos pedidos de cada um dos amigos, a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 16 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Em que:

- x é o custo do hambúrguer
- y é o custo do suco
- z é o custo da sobremesa

Para resolverem essa equação, Roberta e Saulo preferiram montar o sistema linear corresponde e, portanto, encontraram:

(A) $\begin{cases} x + 2y + z = 25 \\ x + y = 5 \\ x + 2y + 2z = 18 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} 3x + 3y = 16 \\ x + 4y + 2z = 50 \\ x + 2y + 2z = 18 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} \mathbf{2x + 4y + 2z = 50} \\ \mathbf{3x + 3y = 16} \\ \mathbf{x + 2y + 2z = 18} \end{cases}$

(D) $\begin{cases} 2x + 4y + z = 50 \\ 3x + 3y = 16 \\ x + 2y + 2z = 18 \end{cases}$

(E) $\begin{cases} 2x + 3y + z = 50 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \\ 2x + 2z = 18 \end{cases}$

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante selecione a notação polinomial adequada para representar um sistema linear fornecido em forma matricial, o que envolve a habilidade de relacionar um sistema de equações lineares à matriz correspondente. Embora muitos estudantes enxerguem esse tópico como abstrato, é importante salientar que, conforme afirmado por Emil Artin (1957)[13], em tradução livre, "Álgebra Linear, Topologia e Geometria são ferramentas indispensáveis à matemática do nosso tempo". De fato, nossa habilidade de modelar o espaço e a forma, que se desenvolve a partir da geometria cartesiana, é dependente da álgebra dos sistemas lineares para traduzir as relações geométricas em equações algébricas.

[13] ARTIN, Emil. **Geometric algebra**. New York, NY: Interscience, c1957. p 214.

Já a manipulação de matrizes e suas propriedades está implicitamente conectada às funcionalidades do mundo moderno. Matrizes arquivam dados que permitem customizar experiências em grandes plataformas virtuais, guardam as relações entre diferentes sistemas de referenciais e codificam grandes redes de relacionamento humano e não-humano. Operações lineares permeiam quase todas essas aplicações, de forma que dominar bilateralmente a transcrição de sistemas lineares entre as formas polinomial e matricial é um dos pré-requisitos para aprimorar a percepção do mundo.

Na resolução dessa questão, o estudante deve efetuar adequadamente a multiplicação de matrizes e a comparação das posições equivalentes em ambos os lados da igualdade, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 16 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x + 4y + 2z \\ 3x + 3y + 0z \\ 1x + 2y + 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 16 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4y + 2z = 50 \\ 3x + 3y = 16 \\ x + 2y + 2z = 18 \end{cases}$$

Sistema que corresponde à alternativa **C**.

Alguns estudantes podem alcançar as alternativas A, B ou D por conta de confusões ao executar a multiplicação das matrizes: no caso de A $\left(\begin{cases} x + 2y + z = 25 \\ x + y = 5 \\ x + 2y + 2z = 18 \end{cases}\right)$, a simplificação da equação L_1 está correta, mas a simplificação de L_2 foi realizada de maneira errada. Já em B $\left(\begin{cases} 3x + 3y = 16 \\ x + 4y + 2z = 50 \\ x + 2y + 2z = 18 \end{cases}\right)$ e D $\left(\begin{cases} 2x + 4y + z = 50 \\ 3x + 3y = 16 \\ x + 2y + 2z = 18 \end{cases}\right)$, há um ou outro coeficiente trocado em relação à resposta correta. No entanto, em todos os casos existe uma sinalização de que o algoritmo de multiplicação foi adequadamente executado e que a comparação, por meio da igualdade, está correta.

A multiplicação de matrizes é sempre uma operação cujo algoritmo encontra resistência no domínio pelos estudantes. Essa dificuldade pode ser sinalizada pela alternativa E $\left(\begin{cases} 2x + 3y + z = 50 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \\ 2x + 2z = 18 \end{cases}\right)$, para o qual a multiplicação é feita pelo produto entre as colunas. Estudantes que assinalam essa alternativa precisam de reforço nos conceitos das operações matriciais.

Se um grupo de estudantes apresentar dificuldades com essa questão, será muito interessante que o professor empregue – conforme as possibilidades do seu planejamento – Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Na aplicação dessa abordagem, os estudantes são divididos em equipes (procurando aproximar aqueles com níveis de conhecimento próximos) e cooperam entre si para resolver de maneira colaborativa as situações-problema propostas, buscando caminhos próprios para resolução e apresentando uns aos outros suas descobertas, para que, discutindo em conjunto, alcancem as conclusões pertinentes.

Alguns materiais de referência podem ser encontrados a seguir:

- Operações entre Matrizes. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/agora-operacoes-entre-matrizes>. Acesso em: 21 nov. 2019.
- Operações com Matrizes – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/dixrghlgk5cos.pdf>. Acesso em: 22 nov. 2019.
- Sistemas Lineares – Parte 2 – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/83voj5081bwgo.pdf>. Acesso em: 22 nov. 2019.

Referências bibliográficas

ARTIN, Emil. **Geometric algebra**. New York, NY: Interscience, c1957. p 214.

FILHO, S R A D. **Uma abordagem do ensino de funções trigonométricas por meio de atividades interdisciplinares**. 2017. 129 fl. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2018/05/24112017Sandro-Rog%C3%A9rio-de-Abreu-Duarte-Filho.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

LIMA, E. L. **Números e funções reais**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

Sites pesquisados:

https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F3%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5F%20Raz%C3%B5es%20Trigonom%C3%A9tricas%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1. Acesso em: 07 jan. 2020.

https://www.geogebra.org/m/Bbzfry8U. Acesso em: 20 nov. 2019.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=45743. Acesso em: 21 nov. 2019.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=21944. Acesso em: 20 nov. 2019.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnica.html?id=38216. Acesso em: 20 nov. 2019.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=1203. Acesso em: 20 nov. 2019.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=56740. Acesso em: 20 nov. 2019.

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/dsynurr1hh6w.pdf. Acesso em: 21 nov. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/video/exemplo-trigonometria-para-calcular-os-lados-e-angulos-de-um-triangulo-retangulo. Acesso em: 21 nov. 2019.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=28431. Acesso em: 20 nov. 2019.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=2191. Acesso em: 20 nov. 2019.

https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F3%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FProblemas%20de%20contagem%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1. Acesso em: 07 jan. 2020.

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/5yr1740zquo8s.pdf. Acesso em: 21 nov. 2019.

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/da67yrzgim8oc.pdf. Acesso em: 21 nov. 2019.

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/8erjl43irugwk.pdf. Acesso em: 21 nov. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/video/formula-da-permutacao. Acesso em: 22 nov. 2019.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=769. Acesso em: 22 nov. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/video/exemplo-as-maneiras-de-fazermos-arranjos-com-cores. Acesso em: 22 nov. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/video/agora-operacoes-entre-matrizes. Acesso em: 21 nov. 2019.

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/dixrghlgk5cos.pdf. Acesso em: 22 nov. 2019.

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/83voj5081bwgo.pdf. Acesso em: 22 nov. 2019.

Avaliação da Aprendizagem em Processo

Coordenadorias

Coordenadoria Pedagógica - COPED
Coordenador: Caetano Pansani Siqueira

Coordenadoria de Informação, Tecnologia, Evidência e Matrícula - CMITE
Coordenador: Thiago Guimarães Cardoso

Departamentos

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão Pedagógica - DECEGEP
Diretor: Valéria Arcari Muhi

Centro dos Anos Finais do Ensino Fundamental - CEFAF
Diretora: Carolina dos Santos Batista Murauskas

Centro de Ensino Médio - CEM
Diretora: Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

Equipe Curricular COPED de Matemática – Leitura crítica e validação do material
Ilana Brawerman, João dos Santos Vitalino, Marcos José Traldi, Otávio Yoshio Yamanaka e Vanderley Aparecido Cornatione

Departamento de Avaliação Educacional - DAVED
Diretora: Patricia de Barros Monteiro
Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Planejamento e Análise de Avaliações - CEPAV

Ademilde Ferreira de Souza, Cristiane Dias Mirisola, Ilton Campos Cavalcanti, Juvenal de Gouveia, Márcia Soares de Araújo Feitosa, Soraia Calderoni Statonato, Sylvia Russiano Toledo Casari

Centro de Aplicação de Avaliações - CEAPA
Diretora: Isabelle Regina de Amorim Mesquita

Amanda Morais Cardoso, Denis Delgado dos Santos, José Guilherme Brauner Filho, Kamila Lopes Candido, Nilson Luiz da Costa Paes, Teresa Miyoko Souza Vilela

Departamento de Tecnologia de Sistemas
Diretor: Marcos Aparecido Barros de Lima

Centro de Planejamento e Integração de Sistemas
Diretora: Camila da Silva Alcazar
Viviana Fernandes dos Santos – Analista de Sistemas