GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DE ENTRADA

MATERIAL DE APOIO PARA O PROFESSOR

2ª série do Ensino Médio

Prova de Matemática

São Paulo
1º Semestre de 2020

Avaliação Diagnóstica de Entrada

APRESENTAÇÃO

A política educacional da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo explicita em seu Plano Estratégico 2019-2022 a nossa missão: "garantir a todos os estudantes aprendizagem de excelência e a conclusão de todas as etapas da educação básica na idade certa".

Para alcançar esse propósito, os processos avaliativos exercem um papel essencial. As avaliações diagnósticas e formativas se complementam com a finalidade de apoiar o trabalho dos professores, direcionando-o para as necessidades de aprendizagem dos estudantes. Aqui se inserem a Avaliação Diagnóstica de Entrada – ADE - e a Avaliação da Aprendizagem em Processo – AAP - que neste ano estão planejadas de forma articulada ao Calendário Escolar 2020, em momentos-chave do ano para utilização de seus resultados como apoio às escolas, oferecendo suporte às Semanas de Estudos Intensivos, às ações contínuas de recuperação, aprofundamento e replanejamento ao longo dos bimestres.

O desenho pedagógico das avaliações aplicadas a todos os anos/séries do ensino fundamental e do ensino médio, que inclui a ADE e a AAP, está articulado ao currículo, envolvendo ação integrada dos diferentes departamentos da Coordenadoria Pedagógica. Adota o Currículo Paulista como referencial no ensino fundamental, e no ensino médio o currículo oficial ainda vigente para esta etapa.

A **Avaliação Diagnóstica de Entrada – ADE** – que constitui o conteúdo deste primeiro documento – aplicada no início do ano letivo, **é focada exclusivamente nas habilidades de anos/séries anteriores essenciais para o percurso educacional dos estudantes,** necessárias à aquisição das habilidades do currículo previstas para o ano a ser iniciado. Permitirá a identificação, de forma mais precisa, das reais necessidades de aprendizagem dos estudantes, explicitando tanto as habilidades que mais dominam como aquelas que necessitam de maior atenção.

Já as AAP, enquanto avaliações formativas bimestrais, trarão majoritariamente habilidades previstas no currículo (Currículo Paulista para o ensino fundamental e currículo oficial ainda vigente no ensino médio) para os respectivos bimestres do ano em curso e, como inovação, incluirão também algumas habilidades de percurso - as anteriores que devem ser desenvolvidas ou consolidadas para a continuidade do processo de aprendizagem.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação – Prova do Aluno – foram elaborados os correspondentes materiais de apoio ao docente, contendo os quadros de habilidades, questões, gabaritos, orientações para aplicação (no caso dos anos iniciais do ensino fundamental) e recomendações pedagógicas para cada prova.

Ao contrário das avaliações de sistema em larga escala, as questões das avaliações ADE e AAP não são sigilosas. As provas impressas são enviadas para as Diretorias de Ensino em pacotes abertos, para entrega às escolas, e publicadas na Intranet ao final da sua aplicação. Isso porque é um material de apoio para o trabalho pedagógico. Sendo assim, é fundamental que todos os envolvidos no processo se conscientizem da importância de não divulgar os gabaritos enquanto durar a aplicação, pois isto apenas prejudica a fidedignidade dos diagnósticos e consequentemente o trabalho pedagógico a partir das necessidades dos estudantes.

Os registros resultantes da ADE, das AAP e do Saresp, inseridos na Secretaria Escolar Digital - SED e apresentados na Plataforma Foco Aprendizagem, agregados aos que a escola e o professor já possuem a partir de suas avaliações internas, oferecem informações preciosas para o planejamento, replanejamento e acompanhamento das ações pedagógicas, sobretudo aquelas relacionadas aos processos de recuperação e aprofundamento.

Esperamos que as avaliações e orientações pedagógicas sejam efetivamente subsídios concretos à ação docente para a necessária intervenção pedagógica a favor da melhoria da aprendizagem de todos os nossos estudantes.

Coordenadoria Pedagógica (COPED)

Avaliação Diagnóstica de Entrada - Matemática

A premissa básica a respeito de um processo avaliativo deve ser considerada como instrumento que subsidiará tanto o estudante no seu desenvolvimento cognitivo, quanto ao professor no redimensionamento de sua prática pedagógica.

Desta forma, a avaliação da aprendizagem passa a ser um instrumento que auxiliará o educador a atingir os objetivos propostos em sua prática educativa, neste caso a avaliação sob essa ótica deve ser tomada na perspectiva diagnóstica, servindo como instrumento para detectar as dificuldades e possibilidades de desenvolvimento do educando.

Neste sentido, as 12 questões que constam deste caderno, procuram verificar o nível de desenvolvimento das habilidades descritas para a Avaliação Diagnóstica de Entrada 2020 de Matemática que subsidiarão o trabalho no ano letivo.

Assim, a avaliação haverá que ser percebida como um processo de mapeamento e da diagnose do processo de aprendizagem, ou seja, a obtenção de indicadores qualitativos do processo de ensino-aprendizagem no trabalho docente.

Seguindo esta concepção, o Currículo Paulista destaca que:

> [...] a avaliação produz informações valiosas no que diz respeito à aprendizagem dos estudantes, às necessidades de recuperação e de reforço das aprendizagens, à própria prática em sala de aula, permitindo adequações e mudanças metodológicas.
>
> Desta forma, avaliar demanda um olhar atento do professor em relação aos avanços, assim como pensar em instrumentos pelos quais possa, de fato, diagnosticar as aprendizagens dos estudantes e seus níveis de proficiência a respeito do que lhes foi ensinado e planejar ações necessárias para que todos possam aprender. SÃO PAULO, 2018, p. 42

É importante salientar que as observações que constam nos Comentários e Recomendações Pedagógicas deste caderno são pressupostos de resolução, cabendo ao professor analisar os registros dos estudantes.

É importante o professor realizar uma análise de acordo com a realidade do processo de ensino-aprendizagem desenvolvido em sala de aula.

EQUIPE CURRICULAR DE MATEMÁTICA

COPED – CEFAF e CEM

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DE ENTRADA

Matriz de Referência – 2ª série do Ensino Médio

Questão	Habilidade
1	Determinar um termo qualquer de sequência numérica ou de figuras.
2	Resolver problemas envolvendo PA.
3	Realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras.
4	Determinar um termo qualquer de sequência numérica ou de figuras.
5	Resolver problemas envolvendo PG.
6	Identificar os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas.
7	Resolver problemas envolvendo PA.
8	Identificar os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas.
9	Resolver problemas envolvendo função logarítmica.
10	Resolver problemas envolvendo PG.
11	Resolver problemas envolvendo função logarítmica.
12	Realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras.

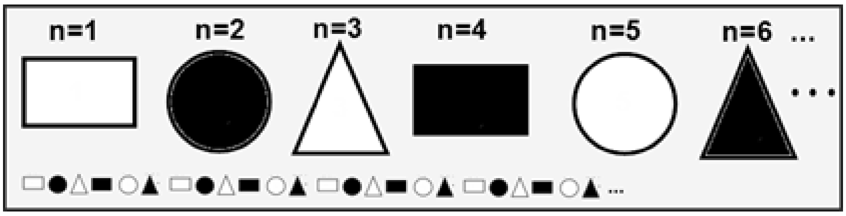
GABARITO

QUESTÃO	A	B	C	D	E
1	X				
2					X
3			X		
4		X			
5			X		
6	X				
7				X	
8		X			
9	X				
10			X		
11				X	
12					X

Habilidade
Determinar um termo qualquer de sequência numérica ou de figuras

Questão 01

Abaixo são apresentados os seis primeiros termos de uma sequência formada apenas por retângulos, círculos e triângulos, coloridos de branco ou de preto. Estes seis termos formam um grupo que se repete periodicamente e indefinidamente, a partir do termo de ordem n = 7, como nos mostra a parte inferior da figura.



Em tal sequência, o termo de ordem n = 351 é um

(A) triângulo branco.

(B) triângulo preto.

(C) retângulo branco.

(D) círculo branco.

(E) círculo preto.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada pede que o estudante assinale a identidade de um termo de posição específica em uma sequência de figuras que segue um padrão, o que emprega a habilidade de determinar um termo qualquer de sequência numérica ou de figuras.

Conforme já afirmado por Lynn Steen (1988)[1], a matemática é "a ciência dos padrões". Dessa forma, ser capaz de identificar padrões, inclusive quando a informação numérica é implícita ou quando é substituída por relações de espaço e forma ou outras grandezas, é fundamental para o desenvolvimento cognitivo do estudante, habilidade que também pode ser transportada para outras áreas do conhecimento, como as Ciências da Natureza, as Linguagens e as Ciências Humanas.

[1] STEEN, L. A. The Science of Patterns. **Science**, v. 240, n. 4852, p. 611-616, abr. 1988. Disponível em: <https://science.sciencemag.org/content/240/4852/611/tab-pdf. Acesso em: 16 jan. 2020.

Nessa questão, especificamente, o estudante deve ser capaz de reconhecer que as figuras exibidas se repetem em blocos de seis elementos, dentro dos quais estão ordenadas de acordo com uma identidade geométrica específica (retângulo, círculo, triângulo, retângulo, círculo e triângulo) e uma identidade estética – no caso, a cor – também específica (branco, preto, branco, preto, branco e preto).

A percepção de que esse sexteto se repete indefinidamente na sequência deve ser, então, traduzida em uma relação numérica entre o índice da figura e suas características. Se a série é periódica, é possível identificar a n-ésima figura traduzindo seu índice absoluto para um índice relativo ao bloco que ocupa. Para realizar essa transformação, é possível utilizar o resto da divisão euclidiana entre o índice absoluto e o comprimento do bloco periódico.

Dessa forma, o estudante – munido dessa percepção – deve performar a seguinte divisão:

$$\begin{array}{r|l} 351 & 6 \\ \cline{2-2} -348 & 58 \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

Identificando que a posição 351 é ocupada por um elemento similar ao 3º elemento do bloco que se repete periodicamente, que, conforme a figura exibida, é um triângulo branco, denotado na alternativa **A**.

Diversos caminhos podem levar aos equívocos, desde dificuldades aritméticas na divisão euclidiana até confusões pontuais em estratégias sucessivas, de modo que não existe uma preferência cognitiva natural entre as alternativas B ("triângulo preto"), C ("retângulo branco"), D ("círculo branco") e E ("círculo preto"). É possível julgar, no entanto, que um erro pequeno levará à figura imediatamente anterior ou posterior ao triângulo branco, ou seja, à alternativa E.

Na eventualidade de um grupo de estudantes demonstrar dificuldades com essa questão, sugere-se ao professor que trabalhe – conforme as possibilidades do seu planejamento e durante o período letivo – a sequência didática de **Generalização de Padrões**[2] do 9º ano do Ensino Fundamental[3]. Para tal, pode empregar

[2] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FGeneraliza%C3%A7%C3%A3o%20de%20padr%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

[3] Nota do autor: Destaca-se a importância da utilização de uma sequência didática do 9º ano do Ensino Fundamental, dada a relevância da habilidade em questão, também presente na programação da 2ª série do Ensino Médio.

Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Ao aplicar essa abordagem, dividirá os estudantes em equipes, procurando aproximar aqueles com níveis de conhecimento similares. Em seguida, irá propor que os membros da equipe percorram juntos as atividades da sequência, resolvendo as questões colaborativamente. A intenção, aqui, é estimular o debate entre os estudantes, fazendo com que comparem seus métodos de resolução e aprendam em conjunto. As habilidades pertencentes a essa sequência são:

- Resolver problemas geométricos aplicando a generalização de padrões.

- Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.

- Relacionar uma expressão matemática a uma expressão na língua materna e vice-versa.

- Identificar o sistema de equações lineares que resolve um problema.

- Realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras e resolver a equação resultante.

O seguinte material de referência pode ser útil no preparo dos planos de aula do professor:

- Plano de aula - Padrões em sequências de figuras. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/898/padroes-em-sequencias-de-figuras>. Acesso em: 25 nov. 2019.

Habilidade
Resolver problemas envolvendo PA.

Questão 02

A alternativa em que a sequência numérica é uma Progressão Aritmética é:

(A) 2; 4; 8; 16; 32

(B) 1,5; 3,5; 4,5; 6,5; 8,5

(C) 4,4; 3,4; 5,4; 4,4; 6,4

(D) 0,25; 0,5; 1; 2; 4

(E) 0,25; 0,5; 0,75; 1; 1,25

Comentários e Recomendações Pedagógicas

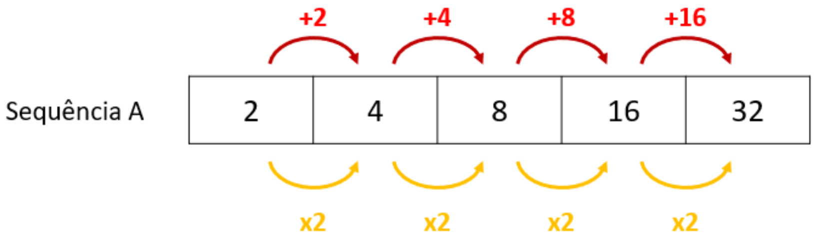
Essa questão exige que o estudante selecione qual das sequências numéricas apresentadas é uma Progressão Aritmética. A habilidade envolvida é a de resolver problemas envolvendo PA. A capacidade de reconhecer as propriedades de sequências e progressões para realizar previsões e interpolações se faz presente em diversas situações no cotidiano, como, por exemplo, ao tentarmos estimar o valor final de uma corrida de táxi durante o percurso. Assim, espera-se que o estudante seja capaz de identificar relações simples de recorrência aritmética e derivar razões e expressões que permitam modelar fenômenos reais.

Para desenvolver a questão, é importante mobilizar os conceitos relacionados a progressões aritméticas. Esse tipo de sequência pode ser formalizado tanto na sua forma recursiva (no caso em que cada termo equivale ao seu antecessor acrescido de uma razão constante) quanto na forma explícita (na qual cada termo equivale ao valor do primeiro termo combinado ao produto entre uma razão fixa e uma função do índice). Ambas as interpretações são difundidas em obras didáticas do Ensino Médio, tal como analisado por Lima (2001)[4]:

Forma Recursiva	Forma Explícita
$a_n = a_{(n-1)} + r$	$a_n = a_1 + (n-1) \times r$

Dessa maneira, basta analisar cada uma das sequências apresentadas e perceber se elas se encaixam em pelo menos uma dessas expressões possíveis.

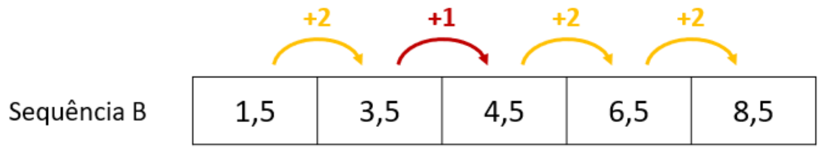
As sequências apresentadas em A (2; 4; 8; 16; 32) e D (0,25; 0,5; 1; 2; 4) são Progressões Geométricas de razão 2. Conforme ilustrado a seguir, a variação entre os termos não é constante, pois na PG o princípio de construção é multiplicativo:

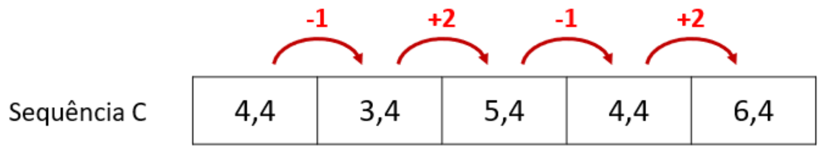


[4] LIMA, E. L. **Exame de textos**: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

Portanto, as sequências A e D não são Progressões Aritméticas. Elas podem ser assinaladas por estudantes que percebem que estas apresentam propriedades de alguma sequência notável, mas confundem a PA com a PG.

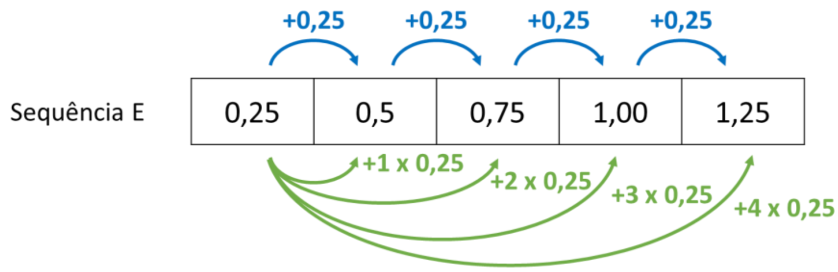
Já as sequências apresentadas em B (1,5; 3,5; 4,5; 6,5; 8,5) e C (4,4; 3,4; 5,4; 4,4; 6,4) aparentam ser construídas por um princípio aditivo, mas, conforme mostrado a seguir, a variação entre os termos não é constante:





Portanto, as sequências B e C não são Progressões Aritméticas. Elas podem ser assinaladas por estudantes que recordam que a PA é construída por um princípio aditivo, mas ignoram a necessidade – fundamental – de que a razão adicionada seja constante.

Por fim, resta a sequência apresentada em **E** (0,25; 0,5; 0,75; 1; 1,25), que se adequa a ambas as interpretações (recursiva ou explícita) da Progressão Aritmética e corresponde à alternativa correta:



Exemplos como os anos em que se pode observar determinados fenômenos astronômicos (a passagem do cometa Halley, por exemplo) ou geológicos (como a ocorrência de erupções em gêiseres ativos), ou situações mais palpáveis como a altura alcançada depois de subir cada lance de escada em um edifício ou o horário em que um ônibus vai passar, por exemplo, são exemplos de Progressões Aritméticas.

Ao perceber que um grupo de estudantes demonstrou dificuldade com essa questão, a sugestão é que o professor trabalhe, dentro do período letivo e das possibilidades do planejamento, a sequência didática de **Progressões**[5]. Há muitas formas diferentes de fazê-lo, mas será especialmente interessante realizar esse trabalho empregando Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Ao adotar essa abordagem, dividirá os estudantes em equipes (aproximando aqueles com níveis de conhecimento similares) e oferecerá atividades para que realizem em conjunto, discutindo suas respostas, construindo colaborativamente suas resoluções, apresentando posteriormente seus resultados e debatendo com a classe suas conclusões.

A sequência didática de **Progressões** envolve as habilidades:

- Identificar se uma determinada sequência é uma PA ou uma PG.

- Resolver problemas envolvendo PA ou PG.

O professor pode procurar inspiração na referência a seguir para planejar suas atividades:

- Sequências Numéricas e Progressões. Disponível em: <http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/condigital2/sequencias/sequencias.html>. Acesso em: 25 nov. 2019.

Habilidade
Realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras.

Questão 03

Uma fábrica produz um componente eletrônico crítico para a montagem de smartphones, sendo que o custo unitário de produção deste componente é R$ 40,00. O diretor de produção afirma que existe um custo adicional por unidade de 10% do preço de venda devido à tributação específica do mercado local. Com

[5] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F2%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FProgress%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

o objetivo de motivar a equipe de vendas, a firma decidiu pagar à área comercial um adicional de R$ 2,00 por cada unidade vendida.

A expressão algébrica que calcula o lucro L resultante da venda de x unidades do produto em um mês, considerando o preço de venda unitário do produto igual a y, é:

(A) $L = x(0{,}1y - 38)$

(B) $L = x(y - 52)$

(C) $\boldsymbol{L = x(0,9y - 42)}$

(D) $L = xy - 0{,}1y - 42$

(E) $L = 0{,}9xy - 40x - 2$

Comentários e Recomendações Pedagógicas

Essa questão exige que o estudante indique uma expressão numérica que relacione o lucro obtido à quantidade de itens vendidos e ao preço unitário de cada um. A habilidade envolvida é a de realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras.

Dentro do contexto dessa questão, essa habilidade aparece aplicada à determinação do lucro líquido de uma empresa, dadas as informações sobre custos e impostos. Essa contextualização é muito útil, numa era em que tanto se fala sobre empreendedorismo e sobre a autonomia do gerenciamento do próprio orçamento. Trabalhando essa habilidade no contexto proposto, o estudante poderá perceber como ele pode traduzir as relações absorvidas de documentos técnicos, textos de jornais e informações bancárias em equações que irão permitir a ele tomar decisões sobre o próprio dinheiro, seja numa situação pessoal ou microempresarial.

A construção do significado do lucro, nessa questão, deve levar em consideração as seguintes proposições:

I. O lucro total é diretamente proporcional ao número de unidades vendidas (x) e ao lucro líquido individual de cada unidade;

II. O lucro líquido individual de cada unidade é dado pela diferença entre o valor faturado na sua venda (receita), após a aplicação das taxas, e o custo fixo de produção e venda (despesas);

III. O custo fixo de produção e venda é dado pela combinação entre o custo de produção de cada unidade (R$ 40,00) e o custo de venda de cada unidade (R$ 2,00), sendo, portanto, equivalente a R$ 42,00;

IV. 10% da receita y por unidade vendida é abatido do valor na forma de imposto. Portanto, o faturamento após a aplicação das taxas é equivalente a 90% de y, ou $0{,}9y$.

A combinação dessas prerrogativas permite a produção da seguinte expressão algébrica para cálculo do lucro total:

$$L = x(0{,}9y - 42)$$

na qual estão contemplados todos os componentes relevantes:

$$\underbrace{L}_{Lucro} = \underbrace{x}_{\substack{unidades\\ vendidas}} \underbrace{(\underbrace{0{,}9y}_{\substack{receita\\ unitária}} - \underbrace{42}_{\substack{custo\ fixo\\ unitário}})}_{\substack{lucro\\ unitário}}$$

Essa expressão está denotada na alternativa **C**, que responde adequadamente à questão.

Os estudantes que assinalam a alternativa A ($L = x(0{,}1y - 38)$) compreendem as proposições I e II, mas realizam operações opostas nas proposições III e IV, descontando do custo o bônus de venda e considerando apenas o imposto como receita. Um panorama similar é encontrado nas respostas dos estudantes que assinalam a alternativa B ($L = x(y - 52)$), uma vez que compreendem as relações de proporcionalidade, mas embutem o imposto como um valor absoluto no custo total.

Já os estudantes que assinalam a alternativa D ($L = xy - 0{,}1y - 42$) falham em construir o significado do lucro individual, ao considerar o imposto e o custo apenas sobre uma unidade do produto. A alternativa E ($L = 0{,}9xy - 40x - 2$) propõe uma expressão que mescla todos os componentes por meio de operações básicas sem respeitar a lógica do cálculo do lucro.

Se um grupo de estudantes apresentar dificuldades com essa questão, será muito interessante que o professor trabalhe – conforme as possibilidades do seu planejamento – a sequência didática de **Generalização de Padrões**[6] do 9º ano do Ensino Fundamental[7]. Ao fazê-lo, pode empregar Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Na aplicação dessa abordagem, os estudantes são divididos em equipes (procurando aproximar aqueles com níveis

[6] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FGeneraliza%C3%A7%C3%A3o%20de%20padr%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

[7] Nota do autor: Destaca-se a importância da utilização de uma sequência didática do 9º ano do Ensino Fundamental, dada a relevância da habilidade em questão, também presente na programação da 2ª série do Ensino Médio.

de conhecimento próximos) e cooperam entre si para resolver de maneira colaborativa as situações-problema propostas, buscando caminhos próprios para resolução e apresentando uns aos outros suas descobertas, para que, discutindo em conjunto, alcancem as conclusões pertinentes. As habilidades pertencentes a essa sequência são:

- Resolver problemas geométricos aplicando a generalização de padrões.

- Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.

- Relacionar uma expressão matemática a uma expressão na língua materna e vice-versa.

- Identificar o sistema de equações lineares que resolve um problema.

- Realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras e resolver a equação resultante.

Alguns materiais de referência podem ser encontrados a seguir:

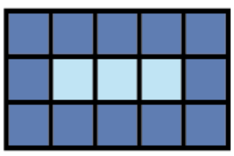
- Do Português para o Matematiquês. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/do-portugues-para-o-matematiques>. Acesso em: 26 nov. 2019.

- Generalizações algébricas. Disponível em: <https://novaescola.org.br/conteudo/2707/generalizacoes-algebricas>. Acesso em: 26 nov. 2019.

Habilidade
Determinar um termo qualquer de sequência numérica ou de figuras

Questão 04

Na construção de mosaicos para a indústria de interiores, desenvolveu-se a uma determinada série de painéis formados por uma linha de ladrilhos claros envoltos em uma moldura de ladrilhos escuros.



A quantidade de ladrilhos escuros varia de acordo com a quantidade de ladrilhos claros conforme a tabela a seguir:

Ladrilhos claros	1	2	3	4	...	n
Ladrilhos escuros	8	10	12	14	...	?

Qual é a expressão matemática que representa a quantidade de ladrilhos escuros compondo o painel de posição n da sequência?

(A) $n + 7$

(B) $\mathbf{2n + 6}$

(C) $3n + 6$

(D) $4n + 2$

(E) $4n + 4$

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada demanda que o estudante selecione a expressão matemática adequada para representar o número de ladrilhos escuros em função do número de ladrilhos claros, para uma sequência de figuras. Nessa questão, é avaliada a habilidade de determinar um termo qualquer de sequência numérica ou de figuras.

O reconhecimento de padrões e a extrapolação desses padrões são habilidades muito utilizadas no dia-a-dia, mesmo que subconscientemente. Ao exigir a tradução desses percursos cognitivos particulares para uma expressão matemática analítica, essa habilidade busca aferir a capacidade de um estudante de traduzir sua compreensão de fenômenos recorrentes ou recursivos a uma linguagem universal, que é a da matemática.

Para responder a essa questão, o estudante pode pensar de diversas maneiras. A primeira estratégia é comparar uma combinação de ladrilhos aos ladrilhos separados, da seguinte forma: "quando há apenas um ladrilho claro, existem oito ladrilhos escuros. Quando dois ladrilhos claros são combinados, cada combinação elimina seis ladrilhos escuros". Dessa forma, a expressão determinada seria:

Estratégia 1

$$N = \underbrace{8n}_{\substack{\text{Oito ladrilhos escuros} \\ \text{para cada ladrilho claro} \\ \text{(separadamente)}}} - \underbrace{6}_{\substack{\text{Ladrilhos escuros} \\ \text{subtraídos} \\ \text{por junção}}} \times \underbrace{(n-1)}_{\substack{\text{Número de} \\ \text{junções}}}$$

$$N = 8n - 6n + 6 = 2n + 6$$

Outra estratégia possível é a seguinte: "há sempre seis ladrilhos escuros nas extremidades horizontais, independentemente do número de ladrilhos claros.

Para cada ladrilho claro no mosaico, são acrescentados dois ladrilhos escuros verticais". Nessa situação, o número de ladrilhos escuros seria:

Estratégia 2

$$N = \underbrace{2n}_{\substack{dois\ ladrilhos\ escuros \\ verticais \\ por\ ladrilho\ claro}} + \underbrace{6}_{\substack{ladrilhos\ escuros \\ nas\ estremidades}}$$

Em ambas as estratégias apresentadas (e em qualquer outro algoritmo correto), a resposta será sempre a mesma, a alternativa **B** ($2n + 6$).

Os estudantes que escolhem a alternativa A ($n + 7$) provavelmente desenvolvem um raciocínio análogo à Estratégia 1 apresentada, mas determinam incorretamente que sete ladrilhos escuros são perdidos na junção de dois ladrilhos claros, alcançando a seguinte expressão:

$$N = \underbrace{8n}_{\substack{Oito\ ladrilhos\ escuros \\ para\ cada\ ladrilho\ claro \\ (separadamente)}} - \underbrace{7}_{\substack{Ladrilhos\ escuros \\ subtraídos \\ por\ junção}} \times \underbrace{(n-1)}_{\substack{Número\ de \\ junções}}$$

$$N = 8n - 7n + 7 = n + 7$$

Os estudantes que assinalam a alternativa C ($3n + 6$) interpretam incorretamente o enunciado, escolhendo uma expressão que modela o número total de ladrilhos, ao invés de escolher aquela que modela o número de ladrilhos escuros, embora façam essa determinação com sucesso.

Aqueles que assinalam a alternativa D ($4n + 2$) provavelmente pensam de forma similar à Estratégia 2, porém consideram o número errado de ladrilhos nas extremidades, realizando a adição constante de quatro ladrilhos ao invés de seis:

$$N = \underbrace{2n}_{\substack{dois\ ladrilhos\ escuros \\ verticais \\ por\ ladrilho\ claro}} + \underbrace{4}_{\substack{ladrilhos\ escuros \\ nas\ extremidades}}$$

Por fim, os estudantes que escolhem a alternativa E ($4n + 4$) desenvolvem novamente um raciocínio análoga à Estratégia 1 apresentada, dessa vez considerando que quatro ladrilhos escuros são perdidos na junção de dois ladrilhos claros, alcançando a seguinte expressão:

$$N = \underbrace{8n}_{\substack{Oito\ ladrilhos\ escuros \\ para\ cada\ ladrilho\ claro \\ (separadamente)}} - \underbrace{4}_{\substack{Ladrilhos\ escuros \\ subtraídos \\ por\ junção}} \times \underbrace{(n-1)}_{\substack{Número\ de \\ junções}}$$

$$N = 8n - 4n + 4 = 4n + 4$$

Se o professor identificar que um grupo de estudantes sinalizou dificuldades com essa questão, uma boa atividade será trabalhar – dentro do período letivo e das possibilidades do planejamento – a sequência didática de **Generalização de Padrões**[8] do 9º ano do Ensino Fundamental[9]. Uma forma de fazê-lo é empregar Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem Baseada em Problemas. Nessa abordagem, o professor apresentará as situações da sequência, problematizando a determinação de expressões algébricas que expressem as regularidades percebidas. Os estudantes discutirão entre si as diferentes estratégias possíveis para resolver os problemas e construirão resoluções em conjunto, de modo a instigar a descoberta de caminhos para resolução e o debate saudável entre os estudantes. As habilidades contidas nessa sequência didática são:

- Resolver problemas geométricos aplicando a generalização de padrões.

- Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.

- Relacionar uma expressão matemática a uma expressão na língua materna e vice-versa.

- Identificar o sistema de equações lineares que resolve um problema.

- Realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras e resolver a equação resultante.

Para apoiar o trabalho dessa sequência didática, pode ser útil a consulta às seguintes referências:

- Números Poligonais – OBMEP (Atividade interativa). Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=82&tipo=5#>. Acesso em: 25 nov. 2019.

- Plano de aula - Padrões em Sequências Numéricas. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/631/padroes-em-sequencias-numericas>. Acesso em: 25 nov. 2019.

- BORRALHO, A. Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. In: XIII CIAEM-IACME, 2011, Pernambuco, Brasil. **Anais**. Pernambuco: Comitê Interamericano de Educación Matemática, 2011. Disponível em:

[8] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FGeneraliza%C3%A7%C3%A3o%20de%20padr%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

[9] Nota do autor: Destaca-se a importância da utilização de uma sequência didática do 9º ano do Ensino Fundamental, dada a relevância da habilidade em questão, também presente na programação da 2ª série do Ensino Médio.

<http://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1111/604>. Acesso em: 16 jan. 2020.

- BRANCO, N. C. V. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2008. 250 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1197/1/17737_ULFC086729_TM.pdf>. Acesso em: 16 jan. 2020.

Habilidade
Resolver problemas envolvendo PG.

Questão 05

Os juros compostos cobrados por uma loja são de 10%.

Roberto, que tomou um empréstimo de R$ 1 000,00, observa sua dívida crescer todo mês: em março era R$ 1 000,00, em abril R$ 1 100,00, em maio R$ 1 210,00 e em junho R$ 1 331,00.

Pode-se observar que a sequência de valores da sua dívida de março até junho forma uma progressão geométrica de razão

(A) 0,01.

(B) 0,1.

(C) 1,1.

(D) 10.

(E) 100.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão pede que o estudante determine a razão de uma Progressão Geométrica que modela o montante de uma dívida dado o empréstimo inicial e a taxa de juros. Essa questão envolve a habilidade de resolver problemas envolvendo PG.

Os conceitos de progressão e os cálculos da Matemática Financeira estão intrinsecamente conectados, uma vez que, conforme Morgado, Wagner & Zani

(1993)[10], é possível modelar o montante proveniente da aplicação de juros compostos conforme uma Progressão Geométrica:

$$\underbrace{M}_{a_n} = \underbrace{M_0}_{a_1} \times \underbrace{(1+j)}_{r}^{(n-1)}$$

Em que M é o montante aferido ao final do período considerado, M_0 é o montante inicial e $(1+j)$, em que j é a taxa de juros (devidamente convertida à notação decimal), corresponde à razão da progressão geométrica. Dessa forma, pode-se determinar que, considerando uma taxa de juros de 10% (equivalente a 0,1), a razão da PG correspondente será:

$$r = 1 + j$$

$$r = 1 + 0{,}1$$

$$r = 1{,}1$$

Levando à alternativa **C** (1,1).

Estudantes que alcançam as alternativas B (0,1) e D (10) ignoram a metodologia adequada de transposição da taxa de juros para a notação de PG, inferindo que a razão deverá ser o próprio valor da taxa de juros, em notação decimal adequada $(0{,}1 = 10\%)$ ou não.

Já os estudantes que optam pela alternativa E (100) consideram que a razão será equivalente à variação observada no primeiro mês de incidência dos juros, determinando seu valor como:

$$r = 1\,100 - 1\,000 = 100$$

Esses estudantes sinalizam não ter compreendido as relações de progressão numa PG e o significado da razão, ou os algoritmos para sua determinação. Alguns estudantes podem inclusive evocar alguns conceitos básicos ou desconexos sobre razões e progressões para perceber que esse valor (100) é elevado demais para ser a razão da PG em questão, optando por assinalar a alternativa A que contém seu inverso (0,01).

Diferentes situações em que incorrem juros compostos, não só em empréstimos ou financiamentos, mas em várias modalidades de investimento, como a caderneta de poupança e fundos de renda fixa, podem ser utilizados em sala de aula para exemplificar o uso de PG, modelando o desenvolvimento do montante.

O professor deve ficar sempre atento para identificar estudantes que demonstrem dificuldades com esse tipo de questão. Se isso acontecer,

[10] MORGADO, A. C. de.; WAGNER, E.; ZANI, S. C. **Progressões e matemática financeira**. Rio de Janeiro, RJ: IMPA: VITAE, 1993.

recomenda-se o trabalho da sequência didática de **Progressões**[11], durante o período letivo e dentro das possibilidades do planejamento. Uma maneira interessante de realizar esse trabalho é empregando Metodologias Ativas de ensino, como a Gamificação. Para empregar essa abordagem, o professor convidará os estudantes a se dividir em equipes e participar de um jogo em que devem percorrer a sequência didática em conjunto, de maneira que cada equipe apresente a resolução das atividades correspondentes. A cada rodada, pontuarão aqueles que alcançarem respostas adequadas dentro do tempo máximo estipulado pelo professor, de modo que os vencedores devem explicar seu raciocínio. Essa estratégia engaja os estudantes ao mesmo tempo que cria oportunidades para que eles discutam entre si as soluções, aprendendo uns com os outros. As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Identificar se uma determinada sequência é uma PA ou uma PG.

- Resolver problemas envolvendo PA ou PG.

Para complementar os trabalhos com essa sequência didática, sugere-se a consulta à seguinte referência:

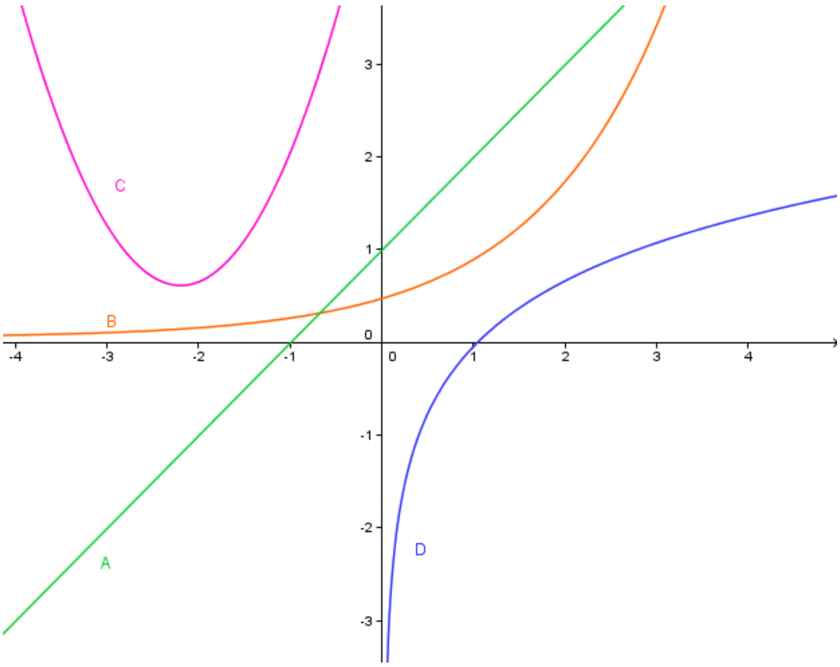
- Juros Compostos e PG - Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=24132>. Acesso em: 26 nov. 2019.

Habilidade
Identificar os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas.

Questão 06

Observe os gráficos a seguir e determine as funções A, B, C e D, respectivamente:

[11] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F2%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FProgress%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.



(A) função 1º grau; função exponencial; função 2º grau; função logarítmica.

(B) função 1º grau, função 2º grau; função logarítmica; função exponencial.

(C) função exponencial; função logarítmica; função 2º grau; função 1º grau.

(D) função exponencial, função 2º grau; função logarítmica; função 1º grau.

(E) função 1º grau; função logarítmica; função 2º grau; função exponencial.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão pede que o estudante associe o gráfico de diferentes formas funcionais às funções correspondentes, o que envolve a habilidade de identificar os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas. Conforme mostrado por Zuffi (2001)[12], desde meados do século XX até hoje, na maioria dos textos introdutórios ao estudo de função, na Educação Básica, utiliza-se em larga medida a definição de Drichlet, conforme sumarizada por Sierpisnka (1992)[13]: "Se uma variável y está relacionada a uma variável x de modo que, ao se atribuir qualquer valor numérico a x, existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então y é dito ser uma função da variável independente x".

Essa questão envolve transformações entre diferentes registros matemáticos, desde a interpretação de uma imagem contendo os gráficos dessas funções até

[12] ZUFFI, E. M. et al. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n. 9/10, abr. 2001. p. 10-16. Disponível em: <https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/436/75>. Acesso em: 16 jan. 2020.

[13] SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.) **The concept of function**: aspects of epistemology and pedagogy. Washington, USA: Mathematical Association of America, 1992. p. 25-58.

sua associação com os nomes dos formatos funcionais em linguagem literal, passando possivelmente pela sua representação analítica em linguagem algébrica. A esse processo de mudança de registro, dá-se o nome de conversão, e esse tipo de questão é pertinente porque, segundo Duval (2003)[14], é justamente nos momentos em que as conversões são realizadas que se dá o aprendizado da Matemática, por três motivos: primeiro porque alguns registros ganham novos significados nas representações convertidas; segundo, porque a própria conversão incita diversos sistemas cognitivos e para a atividade matemática; terceiro porque todo registro tem suas limitações, e é justamente entendendo as restrições e potencialidades de cada um que o estudante constrói uma visão integrada da Matemática.

É possível resolver a essa questão recordando e identificando alguns comportamentos de cada tipo de função envolvida:

Propriedade	**Função 1º grau**	**Função 2º grau**	**Exponencial**	**Logarítmica**
Formato	Linear (Reta)	Parábola	Exponencial	Logarítmica
Ponto crítico (máximo ou mínimo)	Nenhum	1 ponto crítico	Nenhum	Nenhum
Taxa de Crescimento	Constante	Sofre inversão após o ponto crítico	Aumenta conforme o aumento de x	Diminui conforme o aumento de x
Domínio	$]-\infty,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$	$]-\infty,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$	$]-\infty,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$	$]0,+\infty[$ ou $\mathbb{R}_+$
Contradomínio	$]-\infty,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$	$]-\infty,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$	$]0,+\infty[$ ou $\mathbb{R}_+$	$]-\infty,+\infty[$ ou $\mathbb{R}$

Portanto, a curva A representa uma função linear (de 1º grau); a curva B representa uma função exponencial (pode receber qualquer valor real, mas só retorna reais positivos); a curva C representa uma função de 2º grau (parabólica, com um ponto de mínimo); a curva D representa uma função logarítmica (só pode receber valores reais positivos, mas pode retornar qualquer valor real). A alternativa que apresenta corretamente essas associações é a alternativa **A** ("função 1º grau; função exponencial; função 2º grau; função logarítmica").

As alternativas B ("função 1º grau, função 2º grau; função logarítmica; função exponencial") e E ("função 1º grau; função logarítmica; função 2º grau; função

[14] DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. 4ª ed. Campinas, SP. Papirus, p.11-33, 2003.

exponencial”) podem ser assinaladas por estudantes que identificam corretamente apenas a função de 1º grau (linear), que apresenta maior familiaridade por eles; contudo, a identificação dos outros tipos de função é parcialmente ou totalmente incorreta. No caso da alternativa C (“função exponencial; função logarítmica; função 2º grau; função 1º grau”), apenas a função de 2º grau (parabólica) é adequadamente interpretada, também por ter um formato característico e um ponto crítico que são familiares aos estudantes. Por fim, a alternativa D (“função exponencial, função 2º grau; função logarítmica; função 1º grau”) é aquela em que nenhuma das funções é corretamente identificada.

Ao perceber que um grupo de estudantes sinalizou dificuldade com essa questão, a sugestão que fazemos ao professor é que reserve um momento dentro do período letivo e das possibilidades do seu planejamento para trabalhar a sequência didática de **Funções - Exponencial e Logarítmica**[15]. Uma das maneiras de fazê-lo é empregar Metodologias Ativas de ensino, a exemplo da Aprendizagem entre Pares ou Times. Selecionando essa abordagem, o professor dividirá os estudantes em equipes, aproximando aqueles com nível de conhecimento similar, e proporá que os membros dessas equipes percorram a sequência didática em conjunto, discutindo as atividades entre si, aprendendo uns com os outros e construindo as soluções de forma colaborativa. As habilidades pertencentes a essa sequência são:

- Resolver problemas envolvendo função logarítmica.

- Identificar os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas

O aplicativo de código aberto GeoGebra pode ser muito útil na construção e visualização das soluções, além de aumentar o grau de engajamento dos estudantes. Para elaborar as atividades de trabalho da sequência didática, o professor pode procurar suporte nas referências a seguir:

- Funções – GeoGebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/t/functions>. Acesso em: 27 nov. 2019.

- Relacionando as funções e seus gráficos. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/relacionando-as-funcoes-e-seus-graficos>. Acesso em: 27 nov. 2019.

[15] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F2%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5F%20Fun%C3%A7%C3%B5es%20%2D%20Exponencial%20e%20Logar%C3%ADtmica%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

- Funções e Gráficos. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=22279>. Acesso em: 27 nov. 2019.

Habilidade
Resolver problemas envolvendo PA.

Questão 07

Jorge é o dono de uma confeitaria cuja especialidade é o bolo de coco. A receita original do bolo serve apenas 2 pessoas e, por isso, para ajudar as suas funcionárias a prepararem bolos maiores e capazes de servir um número maior de pessoas, Jorge indica as quantidades necessárias de cada ingrediente, por meio da seguinte tabela:

	Tabela com receitas para um número maior de pessoas			
Ingredientes	2 pessoas (Rec. Original)	10 pessoas	20 pessoas	30 pessoas
Óleo (xícaras)	$\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	5	$7\frac{1}{2}$
Coco ralado	250 g	1,25 kg	2,5 kg	3,75 kg
Ovos	4	20	40	60
Açúcar (xícaras)	2	10	20	30
Farinha de trigo (xícaras)	$2\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	25	$37\frac{1}{2}$
Fermento em pó (colher de chá)	1	5	10	15

É correto afirmar que as respectivas quantidades (xícaras) de óleo recomendadas nas receitas para 10, 20 e 30 pessoas formam, nessa ordem, uma progressão aritmética cuja razão é

(A) 10.

(B) $5\frac{1}{2}$.

(C) $3\frac{1}{2}$.

(D) $2\frac{1}{2}$.

(E) $\frac{1}{2}$.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

Essa questão exige que o estudante identifique a razão entre três termos que estão em Progressão Aritmética. A habilidade envolvida é a de resolver problemas envolvendo PA.

Para resolvê-la, o estudante pode utilizar as fórmulas de termos gerais de uma PA (Lima, 2001)[16] para representar os três termos em questão, tanto sugerindo uma abordagem sequencial (a_1, a_2, a_3) quanto uma abordagem independente de índice $(a_n - r, a_n, a_n + r)$. A resolução do problema se dará da seguinte forma:

Quantidades fornecidas pelo enunciado	$2\,\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$	5	$7\,\frac{1}{2} = \frac{15}{2}$
Abordagem sequencial	a_1	$a_2 = a_1 + r$	$a_3 = a_1 + 2r$
Abordagem genérica	$a_n - r$	a_n	$a_n + r$

Portanto, na abordagem sequencial:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{5}{2} \\ a_2 = \frac{5}{2} + r = 5 \\ a_3 = \frac{5}{2} + 2r = \frac{15}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{5}{2} \\ 2r = 5 \therefore r = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Ou na abordagem genérica:

$$\begin{cases} a_n - r = \frac{5}{2} \\ a_n = 5 \end{cases} \Rightarrow r = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\begin{cases} a_n + r = \frac{15}{2} \\ a_n = 5 \end{cases} \Rightarrow r = \frac{15}{2} - 5 = \frac{5}{2}$$

De qualquer forma, a razão deve ser corretamente identificada como $\frac{5}{2}$, número que também pode ser representado como $2\frac{1}{2}$ ou 2,5 conforme indica a alternativa **D**.

Os estudantes que assinalam a alternativa A (10) possivelmente confundem a quantidade questionada (xícaras de óleo) com outra quantidade fornecida no enunciado (xícaras de açúcar), determinando a razão da PA para esse ingrediente,

[16] LIMA, E. L. **Exame de textos**: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

ou até mesmo obtêm a razão para a PA formada pelos números de pessoas (10, 20 e 30).

Já os estudantes que assinalam C $\left(3\frac{1}{2}\right)$ sinalizam dificuldade em lidar com números mistos, entendendo-os como multiplicação de frações e interpretando a PA não-ordenada $1; 3{,}5; 5$, cuja razão é $1{,}5$ ou $\frac{3}{2}$, novamente transportado incorretamente para número misto na escolha da alternativa. De forma similar, os estudantes que escolhem a alternativa B $\left(5\frac{1}{2}\right)$ interpretam corretamente os números mistos na determinação da razão $2{,}5 = \frac{5}{2}$, mas escolhem o número misto $5\frac{1}{2}$.

Por fim, os estudantes que selecionam a alternativa E $\left(\frac{1}{2}\right)$ são aqueles que simplesmente observam a alternância do número $\frac{1}{2}$ em cada quantidade mista apresentada, ignorando o número precedente e julgando que essa deve ser a razão. Outra hipótese é terem identificado a unidade básica da receita para duas pessoas como a razão da PA, demonstrando não ter compreendido a proposta do enunciado.

Se um grupo de estudantes sinalizar dificuldades com essa questão, será muito interessante que o professor trabalhe – dentro das possibilidades do planejamento e durante o período letivo – a sequência didática de **Progressões**[17]. Uma sugestão é que seja empregada uma Metodologia Ativa de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Ao fazê-lo, o professor dividirá os estudantes em equipes (atentando para aproximar aqueles com níveis de conhecimento similares) para que executem em conjunto as tarefas da sequência, cooperando entre si para resolver de maneira colaborativa as situações-problema propostas, buscando seus caminhos para resolução e debatendo suas descobertas. As habilidades pertencentes a essa sequência são:

- Identificar se uma determinada sequência é uma PA ou uma PG.

- Resolver problemas envolvendo PA ou PG.

[17] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F2%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FProgress%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

Para se aprimorar nas bases teóricas das sequências e progressões, o professor pode consultar os materiais e conteúdos selecionados a seguir:

- Como converter entre a fórmula recursiva e a fórmula explícita de uma progressão aritmética. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/como-converter-entre-a-formula-recursiva-e-a-formula-explicita-de-uma-progressao-aritmetica>. Acesso em: 25 nov. 2019.

- Como modelar situações usando progressões aritméticas e geométricas. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/como-modelar-situacoes-usando-progressoes-aritmeticas-e-geometricas-exemplo>. Acesso em: 25 nov. 2019.

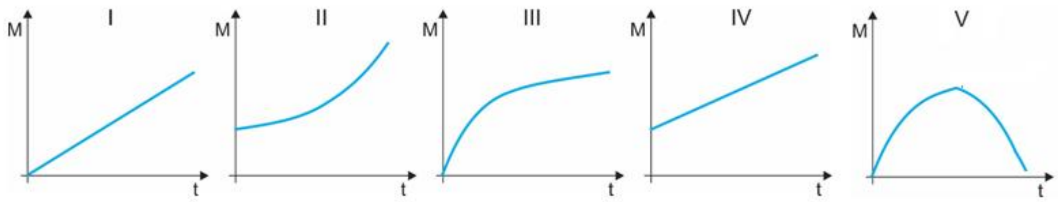
- O termo geral de uma Progressão Aritmética e suas propriedades. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/o-termo-geral-de-uma-progressao-aritmetica-e-suas-propriedades>. Acesso em: 25 nov. 2019.

- Sequências Numéricas e Progressões. Disponível em: <http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/condigital2/sequencias/sequencias.html>. Acesso em: 25 nov. 2019.

Habilidade
Identificar os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas

Questão 08

Dentre os gráficos a seguir, o único que pode ser associado a uma função exponencial é o:



(A) I

(B) II

(C) III

(D) IV

(E) V

Comentários e Recomendações Pedagógicas

Essa questão exige que o estudante identifique o gráfico que corresponde a uma função exponencial, o que envolve a habilidade de identificar os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas. A capacidade de interpretar curvas de função, sobretudo quando se apresentam apenas no primeiro quadrante do plano cartesiano, é uma habilidade importante para a compreensão de diversos fenômenos do cotidiano, e com amplos exemplos nas Ciências da Natureza, em que grande parte das quantidades tem significado em números reais e positivos.

Para responder a essa questão, o estudante precisa recordar algumas das propriedades da função exponencial: seu domínio é o conjunto dos reais e seu contradomínio e sua imagem são os números reais e positivos; a função exponencial tem taxa de crescimento variável, que é tão maior quanto maior o valor da abscissa (ou argumento) da função. Além disso, não apresenta nenhum ponto crítico (mínimo ou máximo).

Dentre todos os gráficos apresentados, aquele que não viola nenhuma dessas características é o exibido na alternativa **B** (II). As alternativas A (I) e D (IV) apontam para esboços de gráficos de funções de 1º grau, cuja taxa de crescimento é constante; a alternativa E (V) aponta possivelmente para o esboço do gráfico de uma função de 2º grau, que exibe formato parabólico e apresenta um ponto de máximo. Por fim, a alternativa C (III) aponta para o esboço do gráfico de uma função logarítmica, cuja taxa de crescimento é inversamente proporcional ao aumento no valor do argumento.

O professor deve atentar para grupos de estudantes que sinalizem dificuldades com essa questão. Ao perceber isso, recomenda-se o trabalho da sequência didática de **Funções - Exponencial e Logarítmica**[18], durante o período letivo e dentro das possibilidades do planejamento. Uma maneira interessante de realizar esse trabalho é empregando Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem baseada em Problemas. Para empregar essa abordagem, o professor percorrerá a sequência didática junto com os estudantes, apresentando as situações-problema a cada atividade e problematizando suas soluções,

---

[18] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F2%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5F%20Fun%C3%A7%C3%B5es%20%2D%20Exponencial%20e%20Logar%C3%ADtmica%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

construindo junto com a sala de aula as metodologias para resolução e estimulando que os estudantes debatam entre si os possíveis algoritmos. As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Resolver problemas envolvendo função logarítmica.

- Identificar os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas.

As referências a seguir podem suportar a realização dessas atividades:

- Funções – GeoGebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/t/functions>. Acesso em: 27 nov. 2019.

- Relacionando as funções e seus gráficos. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/relacionando-as-funcoes-e-seus-graficos>. Acesso em: 27 nov. 2019.

- Funções e Gráficos. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=22279>. Acesso em: 27 nov. 2019.

Habilidade
Resolver problemas envolvendo função logarítmica.

Questão 09

Alpha Centauri é a terceira estrela mais brilhante do céu, podendo ser vista a olho nu. É a estrela mais próxima do Sol, estando a uma distância $d = 40 \cdot 10^{15}$ metros do Sol.

Sabendo que $\log(40)$ é aproximadamente igual a 1,6, então o $\log(d)$ vale aproximadamente

(A) 16,6.

(B) 18,2.

(C) 22,8.

(D) 23,4.

(E) 24,0.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante indique uma quantidade que pode ser calculada a partir de uma equação logarítmica, o que está ligado justamente à habilidade de resolver problemas envolvendo esse tipo de função. Uma das aplicações práticas das funções logarítmicas é expressar valores muito grandes ou muito pequenos, especialmente no âmbito das ciências naturais, quando se utilizam níveis de escala muito pequenos (nas ciências moleculares e na mecânica quântica) ou muito grandes (na mecânica estatística ou na astronomia), por exemplo. Para ilustrar essa habilidade, a questão utiliza como contexto um exemplo de quantidade física de extensa magnitude, da ordem de quadrilhões de metros, e pede que o estudante calcule o valor do logaritmo dessa quantidade por meio das propriedades da função logarítmica.

A propriedade aditiva dos logaritmos, que é primordial, datando da sua proposição por Napier (1641), apud Hobson (1914)[19], indica, de forma sintética, que o logaritmo de uma quantidade computada por meio de um produto simples é equivalente à soma dos logaritmos dos fatores, ou:

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

Dessa forma, o estudante deve aplicar a propriedade aditiva para a resolução do problema proposto, da seguinte maneira (recordando que, no escopo da Educação Básica, quando a base do logaritmo está implícita, ela equivale a dez):

$$\log(d) = \log(40 \cdot 10^{15})$$

$$\Leftrightarrow \log_{10}(d) = \underbrace{\log_{10}(40)}_{\substack{fornecido \\ no \\ enunciado}} + \underbrace{\log_{10}(10^{15})}_{\substack{calculado \\ por\ meio\ da \\ definição}}$$

$$\therefore \log_{10}(d) = 1{,}6 + 15 = 16{,}6$$

Valor que está expresso na alternativa **A**.

Os estudantes que elegem a alternativa B (18,2) escolhem o valor correspondente a $\log_{10}(d) = 2 \times \log_{10}(40) + \log_{10}(10^{15})$, sinalizando problemas com outras propriedades da função logarítmica que não a aditiva. Já aqueles que assinalam a alternativa E (24,0) sinalizam não ter compreendido inclusive a propriedade aditiva, visto que elegem o número equivalente ao produto dos logaritmos, como se $\log_{10}(d) = 1{,}6 \times 15$. De forma análoga o fazem os estudantes que escolhem C (22,8) e D (23,4), que correspondem, respectivamente, a $\log_{10}(d) = 1{,}6 \times 15 - 1{,}6$ e $\log_{10}(d) = 1{,}6 \times 15 - 3{,}2$.

Ao perceber que algum grupo de estudantes sinalizou dificuldade nessa questão, o professor pode (durante o período letivo e conforme surgir oportunidade)

[19] HOBSON, E. W. **John Napier and the invention of logarithms**, 1614; a lecture. University of California Libraries. Cambridge: University Press, 1914. Disponível em: <https://archive.org/details/johnnapierinvent00hobsiala/page/10>. Acesso em: 16 jan. 2020.

trabalhar a sequência didática de **Funções - Exponencial e Logarítmica**[20]. Nesse caso, será interessante propor atividades que empreguem Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Ao adotar essa abordagem, dividirá os estudantes em equipes (aproximando aqueles com níveis de conhecimento similares) e oferecerá atividades para que realizem em conjunto, discutindo suas respostas, construindo colaborativamente suas resoluções, apresentando posteriormente seus resultados e debatendo com a classe suas conclusões.

As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Resolver problemas envolvendo função logarítmica.

- Identificar os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas.

Além do já citado trabalho de Ernest W Hobson (1914), algumas outras referências podem ser, também, úteis aos professores na sua capacitação e na elaboração de seus planos de aula:

- Resolvendo equações logarítmicas. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/resolvendo-equacoes-logaritmicas-1>. Acesso em: 26 nov. 2019.

- Introdução às propriedades de logaritmos. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/introducao-as-propriedades-de-logaritmos>. Acesso em: 26 nov. 2019.

- Propriedade dos logaritmos. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=20966>. Acesso em: 26 nov. 2019.

Habilidade
Resolver problemas envolvendo PG.

Questão 10

Observe a sequência numérica a seguir.

[20] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F2%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5F%20Fun%C3%A7%C3%B5es%20%2D%20Exponencial%20e%20Logar%C3%ADtmica%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

2	6	18		162

Para que essa sequência seja considerada uma PG o valor do 4º termo deve ser:

(A) 30

(B) 36

(C) 54

(D) 72

(E) 81

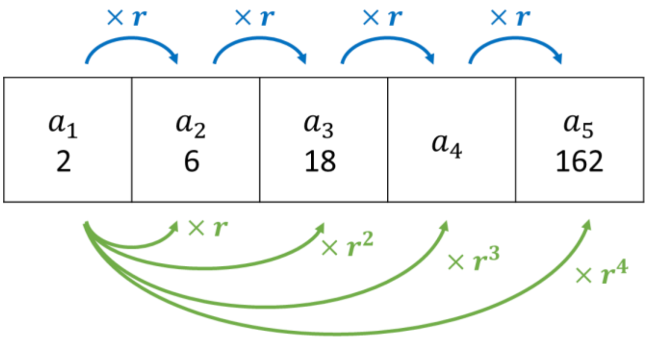
Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada exige o cálculo do quarto termo de uma sequência numérica, supondo que se trata de uma Progressão Geométrica. Trata-se, portanto, de uma questão que aborda a habilidade de resolver problemas envolvendo progressões geométricas.

Aqui, novamente evocam-se as expressões numéricas amplamente difundidas para o termo geral de uma progressão geométrica, conforme observado por Lima (2001)[21], tanto na sua Forma Explícita quanto Recursiva, nas quais cada termo é dado por:

Forma Explícita	Forma Recursiva
$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$	$a_n = a_{n-1} \cdot r$

Portanto, para calcular o termo, deve-se primeiramente determinar a razão (r) da PG utilizando os dados já fornecidos. A partir dessa razão, qualquer forma da expressão geral permite calcular o número pedido (a_4). A razão pode ser determinada de diferentes maneiras, conforme mostrado a seguir:



[21] LIMA, E. L. **Exame de textos**: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

Algumas expressões possíveis para esse fim são, portanto:

$$6 = 2 \cdot r$$

$$18 = 6 \cdot r$$

$$18 = 2 \cdot r^2$$

Cujos resultados são todos equivalentes a 3. Utilizando esse valor, novamente é possível calcular o valor de a_4 por diferentes caminhos, por exemplo:

$$a_4 = 18 \cdot r$$

$$a_4 = 2 \cdot r^3$$

$$a_4 = \frac{162}{r}$$

E, novamente, o resultado de qualquer uma das expressões sugeridas será $a_4 = 54$, número apresentado na alternativa **C**, que responde corretamente à questão.

O assinalamento de algumas das demais alternativas podem ser consequência da determinação incorreta da razão. Por exemplo, se for determinado que $r = 2$, os estudantes podem chegar às alternativas B (36) ou E (81), uma vez que determinariam o valor questionado pelos seguintes caminhos:

$$a_4 = 18 \cdot 2 = 36\ (B)$$

$$a_4 = \frac{162}{2} = 81\ (E)$$

O estudante que seleciona alguma dessas duas alternativas (B ou E) não chegou a validar o resultado obtido, determinando o número desconhecido simultaneamente pelo seu antecessor e pelo seu sucessor na progressão. Isso pode indicar que o estudante compreende apenas parcialmente os processos de construção dessa sequência. Ou seja, estudantes que escolhem a alternativa B possivelmente ignoram que, da mesma forma que $a_n = a_{n-1} \cdot r$, também é válido que $a_n = a_{n+1} \div r$. Similarmente, estudantes que escolhem a alternativa E podem não saber que, da mesma forma que $a_n = a_{n+1} \div r$, é verdade também que $a_n = a_{n-1} \cdot r$.

De forma análoga, se for determinado que $r = 4$, o valor de a_4 será $18 \cdot 4 = 72$ (D). Novamente, seria possível confirmar o erro observado se fossem testados diferentes caminhos para determinação do valor questionado.

Já a alternativa A (30) é assinalada por estudantes que se confundem com as propriedades das Progressões Aritméticas e que incorretamente validam a seguinte relação:

$$a_4 - 18 = 18 - 6 \Rightarrow a_4 = 30$$

Professor, ao perceber que certo grupo de estudantes demonstrou dificuldades com essa questão, será proveitoso trabalhar – durante o período letivo e dentro das possibilidades do planejamento – a sequência didática de **Progressões**[22]. Sugere--se aqui a aplicação de Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Para tal, o professor dividirá os estudantes em equipes, aproximando aqueles com níveis de conhecimento próximos, para que executem em conjunto as tarefas da sequência, cooperando entre si para resolver de maneira colaborativa as situações-problema propostas, buscando seus caminhos para resolução e debatendo suas descobertas. As habilidades pertencentes a essa sequência são:

- Identificar se uma determinada sequência é uma PA ou uma PG.

- Resolver problemas envolvendo PA ou PG.

Os seguintes materiais de referência podem se provar úteis para o professor que desejar se capacitar para o desenvolvimento das atividades em questão:

- Introdução às progressões geométricas. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/introducao-as-progressoes-geometricas>. Acesso em: 25 nov. 2019.

- Como modelar situações usando progressões aritméticas e geométricas. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/como-modelar-situacoes-usando-progressoes-aritmeticas-e-geometricas-exemplo>. Acesso em: 25 nov. 2019.

Habilidade
Resolver problemas envolvendo função logarítmica.

Questão 11

Em grandes eventos, é comum a emissão de sons muito altos. A organização é responsável por medir o nível sonora dos sons emitidos, através de aparelhos

[22] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F2%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FProgress%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

específicos. Suponha que o nível sonoro N e a intensidade I de um destes sons estejam relacionados pela expressão:

$$N = 120 + 10 \cdot \log_{10} I$$

Em que N é medido em decibéis e I em W/m². Dado dois ruídos sonoros medidos em eventos distintos $N_1 = 110\ db$ e $N_2 = 90\ db$, calcule $\frac{I_1}{I_2}$.

(A) 0,001

(B) 0,1

(C) 10

(D) 100

(E) 1000

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante indique uma quantidade que pode ser calculada a partir de um conjunto de equações logarítmicas, o que está ligado justamente à habilidade de resolver problemas envolvendo esse tipo de função. Para tal, a questão utiliza como contexto um exemplo de exploração na relação entre as artes e a matemática, na construção de diversos significados da sonoridade, tal qual observado por Abdounur (1999)[23].

Para responder à questão, é necessário calcular os valores de I_1 e I_2 utilizando a equação fornecida e os valores de N_1 e N_2, da seguinte forma:

$$\begin{array}{cc} N_1 = 120 + 10 \cdot \log_{10} I_1 & N_2 = 120 + 10 \cdot \log_{10} I_2 \\ 110 = 120 + 10 \cdot \log_{10} I_1 & 90 = 120 + 10 \cdot \log_{10} I_2 \\ -10 = 10 \cdot \log_{10} I_1 & -30 = 10 \cdot \log_{10} I_2 \\ \log_{10} I_1 = -1 & \log_{10} I_2 = -3 \\ & \\ \therefore I_1 = 10^{-1} = 0{,}1 & \therefore I_2 = 10^{-3} = 0{,}001 \end{array}$$

Dessa forma, a quantidade questionada é dada pela razão entre ambos os valores:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{10^{-1}}{10^{-3}} = 10^2 = 100$$

Correspondente à alternativa **D**.

Os estudantes que assinalaram as alternativas A (0,001) ou B (0,1) identificam apenas o valor individual, respectivamente, de I_1 ou I_2, sem denotar a razão entre eles. Essas alternativas provavelmente indicam que os estudantes sabem resolver

[23] ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música**: o pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: Escrituras Editora, 1999.

corretamente uma equação logarítmica individual, tendo apresentado problemas ao compreender, interpretar e obedecer à comanda.

Já aqueles que assinalam as alternativas C (10) e E (1000) determinaram valores incorretos para as intensidades I_1 ou I_2 (senão para ambas), possivelmente porque tiveram problemas ao resolver a equação logarítmica, sinalizando que têm dificuldades em manipular esse tipo de expressão algébrica. Outro erro comum, que não pode ser descartado no caso da escolha dessas alternativas, é que os estudantes tenham tido dificuldade em calcular o resultado da divisão entre potências de dez.

Professor, ao perceber que algum grupo de estudantes sinalizou dificuldade nessa questão, a sugestão é que trabalhe com eles a sequência didática de **Funções - Exponencial e Logarítmica**[24]. Essa atividade deve ser realizada durante o período letivo, em momento oportuno no planejamento. Dentre as diferentes formas de realizar esse trabalho, destaca-se a utilização de Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Seguindo essa abordagem, deve-se dividir os estudantes em equipes, respeitando os níveis de conhecimento de cada um, propondo posteriormente que realizem as atividades em colaboração, debatendo seus caminhos e conclusões. A intenção é estimular descobertas e permitir que os estudantes aprendam uns com os outros.

As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Resolver problemas envolvendo função logarítmica.

- Identificar os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas.

Para complementar seus conhecimentos e aprimorar o trabalho da sequência, o professor pode consultar as seguintes referências:

- Música e Matemática – Uma Antiga Relação. Disponível em: <http://comciencia.br/dossies-1-72/reportagens/modelagem/mod11box.htm>. Acesso em: 26 nov. 2019.

MIRITZ, José Carlos Dittgen. **Matemática e música**. 94 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Rio Grande/RS, 2015.

[24] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F2%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5F%20Fun%C3%A7%C3%B5es%20%2D%20Exponencial%20e%20Logar%C3%ADtmica%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

Disponível em: <https://profmat.furg.br/images/TCC/TCCJoseCarlos_versaofinal.pdf>. Acesso em: 26 nov. 2019.

- Resolvendo equações logarítmicas. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/resolvendo-equacoes-logaritmicas-1>. Acesso em: 26 nov. 2019.

Habilidade
Realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras.

Questão 12

Um professor de matemática deseja descobrir o segredo de um mágico. Para isso, o professor precisa transformar em linguagem matemática a charada que o mágico diz:

"O número que penso é igual ao quadrado do triplo do seu antecessor somado à quinta parte do seu sucessor."

Qual equação expressa corretamente a charada?

(A) $x = 3(x-1)^2 + 5x + 5$

(B) $x = (3x+3)^2 + 5x - 5$

(C) $x = 3(x+1)^2 + \frac{(x-1)}{5}$

(D) $x = 3(x-1)^2 + \frac{(x+1)}{5}$

(E) $\boldsymbol{x = (3x-3)^2 + \frac{(x+1)}{5}}$

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante selecione a expressão numérica cuja solução expresse a resposta a uma charada algébrica. A habilidade aferida nessa questão é aquela de realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras. O domínio desse conhecimento está conectado à capacidade de abstração do estudante, que, na etapa intermediária do Ensino Médio, deve estar desenvolvida à altura da construção de equações que relacionam ou resumem múltiplas informações sobre um mesmo conjunto de variáveis, empregando números literais.

Para traduzir o problema em uma expressão, deve-se primeiro adotar uma notação para o número em questão, seu antecessor e seu sucessor. Seja x o número em que o professor pensa, seu antecessor pode ser representado por $(x-1)$, e seu sucessor, por $(x+1)$. A partir dessa notação, é possível construir as parcelas seguindo a ordem da frase construída:

"O número que penso"	$\boldsymbol{x}$
"é igual"	$=$
"ao quadrado do triplo do seu antecessor"	$[3 \cdot (x-1)]^2 ou\ (\mathbf{3}\boldsymbol{x}-\mathbf{3})^{\mathbf{2}}$
"somado"	**+**
"à quinta parte do seu sucessor."	$\boldsymbol{\frac{(x+1)}{5}}$

A concatenação de todos os termos interpretados permite concluir que a equação que expressa corretamente a charada é $x = (3x-3)^2 + \frac{(x+1)}{5}$, que corresponde à alternativa **E**.

Os estudantes que assinalam a alternativa A $(x = 3(x-1)^2 + 5x + 5)$ possivelmente confundem o quadrado do triplo do antecessor com o triplo do quadrado do antecessor, além de confundir a quinta parte do sucessor com o quíntuplo do sucessor. Os estudantes que optam pela alternativa B $(x = (3x+3)^2 + 5x - 5)$ provavelmente confundem o sucessor com o antecessor e a quinta parte com o quíntuplo. Ao assinalar a alternativa C $\left(x = 3(x+1)^2 + \frac{(x-1)}{5}\right)$, os estudantes provavelmente confundem antecessor e sucessor, além de confundir o quadrado do triplo com o triplo do quadrado. Por fim, na alternativa D $\left(x = 3(x-1)^2 + \frac{(x+1)}{5}\right)$, a única confusão que é feita é em relação ao triplo do quadrado ao invés do quadrado do triplo.

Dada a importância de dominar os conhecimentos procedimentais relacionados à transcrição matemática de relações do cotidiano, o professor deve estar sempre atento para dificuldades que os estudantes podem apresentar nesse tipo de questão. Ao identificar ocorrências desse tipo, sugere-se trabalhar – dentro do período letivo e das possibilidades do planejamento – a sequência didática de

Generalização de Padrões[25] do 9º ano do Ensino Fundamental[26]. Dentre as formas de fazê-lo, destaca-se o uso de Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem Baseada em Problemas. Nessa abordagem, o professor apresentará as situações-problema da sequência didática, problematizando a determinação de expressões algébricas para as relações codificadas em linguagem verbal ou visual. Posteriormente, os estudantes serão estimulados a discutir entre si as diferentes estratégias possíveis para resolver os problemas e construirão resoluções colaborativamente, de modo a instigar a descoberta de caminhos para resolução e o debate saudável entre os estudantes.

As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Resolver problemas geométricos aplicando a generalização de padrões.
- Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.
- Relacionar uma expressão matemática a uma expressão na língua materna e vice-versa.
- Identificar o sistema de equações lineares que resolve um problema.
- Realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras e resolver a equação resultante.

Para reforçar as atividades propostas na sequência, o professor pode formular planos de aula baseados na seguinte referência:

- Do Português para o Matematiquês. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/do-portugues-para-o-matematiques>. Acesso em: 26 nov. 2019.

[25] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FGeneraliza%C3%A7%C3%A3o%20de%20padr%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

[26] Nota do autor: Destaca-se a importância da utilização de uma sequência didática do 9º ano do Ensino Fundamental, dada a relevância da habilidade em questão, também presente na programação da 2ª série do Ensino Médio.

Referências bibliográficas

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música**: o pensamento analógico na construção de significados. São Paulo: Escrituras Editora, 1999.

BORRALHO, A. Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. In: XIII CIAEM-IACME, 2011, Pernambuco, Brasil. **Anais**. Pernambuco: Comité Interamericano de Educación Matemática, 2011. Disponível em: <http://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1111/604>. Acesso em: 16 jan. 2020.

BRANCO, N. C. V. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2008. 250 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1197/1/17737_ULFC086729_TM.pdf>. Acesso em: 16 jan. 2020.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org). **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. 4ª ed. Campinas, SP. Papirus, p.11-33, 2003.

HOBSON, E. W. **John Napier and the invention of logarithms**, 1614; a lecture. University of California Libraries. Cambridge: University Press, 1914. Disponível em: <https://archive.org/details/johnnapierinventoohobsiala/page/10>. Acesso em: 16 jan. 2020.

LIMA, E. L. **Exame de textos**: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

MIRITZ, J. C. D. **Matemática e música**. 94 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Programa de Pós-graduação Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, Rio Grande/RS, 2015. Disponível em: <https://profmat.furg.br/images/TCC/TCCJoseCarlos_versaofinal.pdf>. Acesso em: 26 nov. 2019.

MORGADO, A. C. de.; WAGNER, E.; ZANI, S. C. **Progressões e matemática financeira**. Rio de Janeiro, RJ: IMPA: VITAE, 1993.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Ed.) **The concept of function**: aspects of epistemology and pedagogy. Washington, USA: Mathematical Association of America, 1992. p. 25-58.

STEEN, L. A. The Science of Patterns. **Science**, v. 240, n. 4852, p. 611-616, abr. 1988. Disponível em: <https://science.sciencemag.org/content/240/4852/611/tab-pdf. Acesso em: 16 jan. 2020.

ZUFFI, E. M. et al. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, n. 9/10, abr. 2001. p. 10-16. Disponível em: <https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/view/436/75>. Acesso em: 16 jan. 2020.

Sites pesquisados:

https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FGeneraliza%C3%A7%C3%A3o%20de%20padr%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1. Acesso em: 07 jan. 2020.

https://novaescola.org.br/plano-de-aula/898/padroes-em-sequencias-de-figuras. Acesso em: 25 nov. 2019.

https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F2%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FProgress%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1. Acesso em: 07 jan. 2020.

http://webeduc.mec.gov.br/portaldoprofessor/matematica/condigital2/sequencias/sequencias.html. Acesso em: 25 nov. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/video/do-portugues-para-o-matematiques. Acesso em: 26 nov. 2019.

https://novaescola.org.br/conteudo/2707/generalizacoes-algebricas. Acesso em: 26 nov. 2019.

https://portaldosaber.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=82&tipo=5#. Acesso em: 25 nov. 2019.

https://novaescola.org.br/plano-de-aula/631/padroes-em-sequencias-numericas. Acesso em: 25 nov. 2019.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=24132. Acesso em: 26 nov. 2019.

https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F2%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5F%20Fun%C3%A7%C3%B5es%20%2D%20Exponencial%20e%20Logar%C3%ADtmica%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1. Acesso em: 07 jan. 2020.

https://www.geogebra.org/t/functions. Acesso em: 27 nov. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/video/relacionando-as-funcoes-e-seus-graficos. Acesso em: 27 nov. 2019.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=22279. Acesso em: 27 nov. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/video/como-converter-entre-a-formula-recursiva-e-a-formula-explicita-de-uma-progressao-aritmetica. Acesso em: 25 nov. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/video/como-modelar-situacoes-usando-progressoes-aritmeticas-e-geometricas-exemplo. Acesso em: 25 nov. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/video/o-termo-geral-de-uma-progressao-aritmetica-e-suas-propriedades. Acesso em: 25 nov. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/video/resolvendo-equacoes-logaritmicas-1. Acesso em: 26 nov. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/video/introducao-as-propriedades-de-logaritmos. Acesso em: 26 nov. 2019.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=20966. Acesso em: 26 nov. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/video/introducao-as-progressoes-geometricas. Acesso em: 25 nov. 2019.

http://comciencia.br/dossies-1-72/reportagens/modelagem/mod11box.htm. Acesso em: 26 nov. 2019.

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

COORDENADORIAS

Coordenadoria Pedagógica - COPED
Coordenador: Caetano Pansani Siqueira

Coordenadoria de Informação, Tecnologia, Evidência e Matrícula - CMITE
Coordenador: Thiago Guimarães Cardoso

DEPARTAMENTOS

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão Pedagógica - DECEGEP
Diretor: Valéria Arcari Muhi

Centro dos Anos Finais do Ensino Fundamental - CEFAF
Diretora: Carolina dos Santos Batista Murauskas

Centro de Ensino Médio - CEM
Diretora: Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

Equipe Curricular COPED de Matemática – Leitura crítica e validação do material
Ilana Brawerman, João dos Santos Vitalino, Marcos José Traldi, Otávio Yoshio Yamanaka e Vanderley Aparecido Cornatione

Departamento de Avaliação Educacional - DAVED
Diretora: Patricia de Barros Monteiro
Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Planejamento e Análise de Avaliações - CEPAV

Ademilde Ferreira de Souza, Cristiane Dias Mirisola, Ilton Campos Cavalcanti, Juvenal de Gouveia, Márcia Soares de Araújo Feitosa, Soraia Calderoni Statonato, Sylvia Russiano Toledo Casari

Centro de Aplicação de Avaliações - CEAPA
Diretora: Isabelle Regina de Amorim Mesquita

Amanda Morais Cardoso, Denis Delgado dos Santos, José Guilherme Brauner Filho, Kamila Lopes Candido, Nilson Luiz da Costa Paes, Teresa Miyoko Souza Vilela

Departamento de Tecnologia de Sistemas
Diretor: Marcos Aparecido Barros de Lima

Centro de Planejamento e Integração de Sistemas
Diretora: Camila da Silva Alcazar
Viviana Fernandes dos Santos – Analista de Sistemas