GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DE ENTRADA

MATERIAL DE APOIO PARA O PROFESSOR

1ª série do Ensino Médio

Prova de Matemática

São Paulo
1º Semestre de 2020

Avaliação Diagnóstica de Entrada

APRESENTAÇÃO

A política educacional da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo explicita em seu Plano Estratégico 2019-2022 a nossa missão: "garantir a todos os estudantes aprendizagem de excelência e a conclusão de todas as etapas da educação básica na idade certa".

Para alcançar esse propósito, os processos avaliativos exercem um papel essencial. As avaliações diagnósticas e formativas se complementam com a finalidade de apoiar o trabalho dos professores, direcionando-o para as necessidades de aprendizagem dos estudantes. Aqui se inserem a Avaliação Diagnóstica de Entrada – ADE - e a Avaliação da Aprendizagem em Processo – AAP - que neste ano estão planejadas de forma articulada ao Calendário Escolar 2020, em momentos-chave do ano para utilização de seus resultados como apoio às escolas, oferecendo suporte às Semanas de Estudos Intensivos, às ações contínuas de recuperação, aprofundamento e replanejamento ao longo dos bimestres.

O desenho pedagógico das avaliações aplicadas a todos os anos/séries do ensino fundamental e do ensino médio, que inclui a ADE e a AAP, está articulado ao currículo, envolvendo ação integrada dos diferentes departamentos da Coordenadoria Pedagógica. Adota o Currículo Paulista como referencial no ensino fundamental, e no ensino médio o currículo oficial ainda vigente para esta etapa.

A **Avaliação Diagnóstica de Entrada – ADE** – que constitui o conteúdo deste primeiro documento – aplicada no início do ano letivo, **é focada exclusivamente nas habilidades de anos/séries anteriores essenciais para o percurso educacional dos estudantes,** necessárias à aquisição das habilidades do currículo previstas para o ano a ser iniciado. Permitirá a identificação, de forma mais precisa, das reais necessidades de aprendizagem dos estudantes, explicitando tanto as habilidades que mais dominam como aquelas que necessitam de maior atenção.

Já as AAP, enquanto avaliações formativas bimestrais, trarão majoritariamente habilidades previstas no currículo (Currículo Paulista para o ensino fundamental e currículo oficial ainda vigente no ensino médio) para os respectivos bimestres do ano em curso e, como inovação, incluirão também algumas habilidades de percurso - as anteriores que devem ser desenvolvidas ou consolidadas para a continuidade do processo de aprendizagem.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação – Prova do Aluno – foram elaborados os correspondentes materiais de apoio ao docente, contendo os quadros de habilidades, questões, gabaritos, orientações para aplicação (no caso dos anos iniciais do ensino fundamental) e recomendações pedagógicas para cada prova.

Ao contrário das avaliações de sistema em larga escala, as questões das avaliações ADE e AAP não são sigilosas. As provas impressas são enviadas para as Diretorias de Ensino em pacotes abertos, para entrega às escolas, e publicadas na Intranet ao final da sua aplicação. Isso porque é um material de apoio para o trabalho pedagógico. Sendo assim, é fundamental que todos os envolvidos no processo se conscientizem da importância de não divulgar os gabaritos enquanto durar a aplicação, pois isto apenas prejudica a fidedignidade dos diagnósticos e consequentemente o trabalho pedagógico a partir das necessidades dos estudantes.

Os registros resultantes da ADE, das AAP e do Saresp, inseridos na Secretaria Escolar Digital - SED e apresentados na Plataforma Foco Aprendizagem, agregados aos que a escola e o professor já possuem a partir de suas avaliações internas, oferecem informações preciosas para o planejamento, replanejamento e acompanhamento das ações pedagógicas, sobretudo aquelas relacionadas aos processos de recuperação e aprofundamento.

Esperamos que as avaliações e orientações pedagógicas sejam efetivamente subsídios concretos à ação docente para a necessária intervenção pedagógica a favor da melhoria da aprendizagem de todos os nossos estudantes.

Coordenadoria Pedagógica (COPED)

Avaliação Diagnóstica de Entrada - Matemática

A premissa básica a respeito de um processo avaliativo deve ser considerada como instrumento que subsidiará tanto o estudante no seu desenvolvimento cognitivo, quanto ao professor no redimensionamento de sua prática pedagógica.

Desta forma, a avaliação da aprendizagem passa a ser um instrumento que auxiliará o educador a atingir os objetivos propostos em sua prática educativa, neste caso a avaliação sob essa ótica deve ser tomada na perspectiva diagnóstica, servindo como instrumento para detectar as dificuldades e possibilidades de desenvolvimento do educando.

Neste sentido, as 12 questões que constam deste caderno, procuram verificar o nível de desenvolvimento das habilidades descritas para a Avaliação Diagnóstica de Entrada 2020 de Matemática que subsidiarão o trabalho no ano letivo.

Assim, a avaliação haverá que ser percebida como um processo de mapeamento e da diagnose do processo de aprendizagem, ou seja, a obtenção de indicadores qualitativos do processo de ensino-aprendizagem no trabalho docente.

Seguindo esta concepção, o Currículo Paulista destaca que:

> [...] a avaliação produz informações valiosas no que diz respeito à aprendizagem dos estudantes, às necessidades de recuperação e de reforço das aprendizagens, à própria prática em sala de aula, permitindo adequações e mudanças metodológicas.
>
> Desta forma, avaliar demanda um olhar atento do professor em relação aos avanços, assim como pensar em instrumentos pelos quais possa, de fato, diagnosticar as aprendizagens dos estudantes e seus níveis de proficiência a respeito do que lhes foi ensinado e planejar ações necessárias para que todos possam aprender. SÃO PAULO, 2018, p. 42

É importante salientar que as observações que constam nos Comentários e Recomendações Pedagógicas deste caderno são pressupostos de resolução, cabendo ao professor analisar os registros dos estudantes.

É importante o professor realizar uma análise de acordo com a realidade do processo de ensino-aprendizagem desenvolvido em sala de aula.

EQUIPE CURRICULAR DE MATEMÁTICA

COPED – CEFAF e CEM

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DE ENTRADA

Matriz de Referência – 1ª série do Ensino Médio

Questão	Habilidade
1	Diferenciar número racional de número irracional.
2	Identificar situações que envolvem proporcionalidade direta, inversa e não proporcionalidade.
3	Identificar situações que envolvem proporcionalidade direta, inversa e não proporcionalidade.
4	Diferenciar número racional de número irracional.
5	Aplicar o Teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade em diferentes contextos.
6	Resolver problemas envolvendo proporcionalidade direta ou inversa.
7	Identificar a expressão algébrica que representa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.
8	Identificar o sistema de equações lineares que resolve um problema e realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras e resolver a equação resultante.
9	Identificar o sistema de equações lineares que resolve um problema e realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras e resolver a equação resultante.
10	Aplicar o Teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade em diferentes contextos e resolver problemas envolvendo proporcionalidade direta ou inversa.
11	Identificar a expressão algébrica que representa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.
12	Resolver problemas envolvendo proporcionalidade direta ou inversa.

GABARITO

QUESTÃO	A	B	C	D	E
1	X				
2				X	
3				X	
4					X
5					X
6			X		
7				X	
8				X	
9			X		
10		X			
11			X		
12			X		

Habilidade
Diferenciar número racional de número irracional.

Questão 01

Observe a tabela a seguir:

Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5
65,31313...	149	$\frac{\pi}{2}$	1,020304...	6,5712
- 1,212121...	0	- 78,12598...	- 92	8,08008008...
5,003	- π	16,34985...	14	π

Indique a coluna que apresenta apenas números racionais.

(A) Coluna 1

(B) Coluna 2

(C) Coluna 3

(D) Coluna 4

(E) Coluna 5

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante selecione a coluna de uma tabela que contém apenas números racionais. Essa questão envolve a habilidade de diferenciar número racional de número irracional.

Para responder à questão, o estudante precisa rever seus conhecimentos sobre números racionais, lembrando que se tratam daqueles representados por meio de uma fração $\frac{p}{q}$, onde p e q são números inteiros e q diferente de zero. Dessa maneira, são números racionais todos os números inteiros, os números que apresentam decimais exatos e os decimais periódicos, ou seja, aqueles que apresentam uma unidade de repetição bem definida e podem ser transformados em frações irredutíveis pela eliminação subtrativa da porção periódica, como no exemplo a seguir:

$$a = 6{,}666\ldots$$

$$10a = 66{,}666\ldots$$

$$\Leftrightarrow 9a = 66{,}666\ldots - 6{,}666\ldots = 60$$

$$\therefore \boldsymbol{a} = \frac{\mathbf{60}}{\mathbf{9}} = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{3}}$$

$$\mathbf{6,666}\ \ldots\ \text{é, portanto, } \mathbf{racional}.$$

Por exclusão, todos os outros números reais são, portanto, irracionais. Além disso, é importante lembrar que o número π, presente em algumas colunas, é um exemplo de número irracional, que simboliza a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro, dois números que não podem ser simultaneamente inteiros.

Analisando cada uma das colunas individualmente, à vista dessas proposições, é possível fazer as seguintes considerações:

Número	**Classificação**	**Justificativa**
65,31313...	Racional	Decimal periódico equivalente a $\frac{32330}{495}$
- 1,212121...	Racional	Decimal periódico equivalente a $-\frac{40}{33}$
5,003	Racional	Número decimal exato
149	Racional	Número Inteiro
0	Racional	Número Inteiro
- π	Irracional	Produto do número irracional π por -1
$\frac{\pi}{2}$	Irracional	Produto do número irracional π por $\frac{1}{2}$
- 78,12598...	Irracional	Decimal não-periódico
16,34985...	Irracional	Decimal não-periódico
1,020304...	Irracional	Decimal não-periódico
- 92	Racional	Número Inteiro
14	Racional	Número Inteiro
6,5712	Racional	Número decimal exato
8,08008008...	Racional	Decimal periódico equivalente a $\frac{8072}{999}$
π	Irracional	Produto do número irracional π por 1

Que podem ser resumidas na tabela apresentada a seguir:

Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4	Coluna 5
racional	racional	irracional	irracional	racional
racional	racional	irracional	racional	racional
racional	irracional	irracional	racional	irracional

Portanto, apenas a Coluna 1 apresenta somente números racionais, correspondente à alternativa **A**.

Os estudantes que assinalam as alternativas B ("Coluna 2") e E ("Coluna 5") possivelmente não se atentaram que o número π é irracional. É possível endereçar esse erro discutindo as origens do número π e as diferentes demonstrações possíveis dessa irracionalidade, que remontam à demonstração referencial de Lambert, no século XVIII[1]. Já os estudantes que assinalaram as alternativas C ("Coluna 3") ou D ("Coluna 4") não identificam os números decimais aperiódicos como irracionais, e requerem um trabalho mais profundo de recuperação do sentido de número racional.

Professor, ao perceber que certo grupo de estudantes demonstrou dificuldades com essa questão, será proveitoso trabalhar – durante o período letivo e dentro das possibilidades do planejamento – a sequência didática de **Conjuntos Numéricos**[2]. Sugere-se aqui a aplicação de Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Para tal, o professor dividirá os estudantes em equipes, aproximando aqueles com níveis de conhecimento próximos, para que executem em conjunto as tarefas da sequência, cooperando entre si para resolver de maneira colaborativa as situações-problema propostas, buscando seus caminhos para resolução e debatendo suas descobertas. As habilidades pertencentes a essa sequência são:

- Identificar relações entre os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

- Diferenciar número racional de número irracional - critérios.

- Localizar números reais na reta.

---

[1] LACZKOVICH, M. On Lambert's proof of the irrationality of π. **American Mathematical Monthly**, v. 104, n. 5, p. 439–443, 1997. JSTOR 2974737. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2974737>. Acesso em: 16 jan. 2020.

[2] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F1%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FConjuntos%20Num%C3%A9ricos%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

Diversos materiais podem ser utilizados para apoiar a discussão da sequência didática. Alguns exemplos são:

- Reconhecendo racional e irracional. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/reconhecendo-racional-e-irracional-exemplo-expressoes>. Acesso em: 20 nov. 2019.

- Desvendando os Números Reais. Disponível em: <http://www.ime.ufg.br/bienal/2006/mini/cristina.cerri.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2019.

- As dízimas periódicas e a calculadora. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat3_1_1.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2019.

- Plano de aula - Diferenças entre números racionais e irracionais. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/246/diferencas-entre-numeros-racionais-e-irracionais>. Acesso em: 20 nov. 2019.

Habilidade
Identificar situações que envolvem proporcionalidade direta, inversa e não proporcionalidade.

Questão 02

Analise as afirmações abaixo e conclua se são verdadeiras ou falsas:

1) A idade de uma pessoa e o número de filhos são grandezas que não envolvem proporcionalidade;

2) A velocidade média de um velocista e o tempo gasto para ele completar o percurso são grandezas inversamente proporcionais;

3) A quantidade de água consumida em uma casa e o valor da conta paga no final do mês são grandezas inversamente proporcionais;

4) O número de torneiras enchendo um tanque e o tempo de enchimento deste tanque são grandezas diretamente proporcionais.

Assinale a alternativa que indica, respectivamente, se as afirmações são verdadeiras (V) ou falsas (F):

(A) F, F, V, V.

(B) F, F, F, V.

(C) F, V, F, F.

(D) V, V, F, F.

(E) V, V, V, V.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante conclua quais são as afirmações que relacionam adequadamente uma situação e sua relação de proporcionalidade. Essa questão está relacionada à habilidade de identificar situações que envolvem proporcionalidade direta, inversa e não proporcionalidade.

Nesse estudo não devemos ignorar os conhecimentos que os estudantes já trazem consigo, porque sua percepção, no final do Ensino Fundamental e no início do Ensino Médio, absorve elementos do cotidiano para motivar o desvendamento de relações entre as grandezas observadas. Sobre isso, trazemos um trecho de Fioreze (2010)[3]:

> O aluno traz para a escola muitos conceitos espontâneos ligados à proporcionalidade e que foram construídos nas mais diversas situações cotidianas: ao comprar o pão, o preço a pagar em função do número de pães estabelece uma relação proporcional direta; ao dividir uma quantia ganha em um prêmio, a quantia a ganhar por pessoa em função do número de pessoas que ganharam o prêmio estabelece uma relação proporcional inversa, dentre outras situações. Estas situações devem ser valorizadas e resgatadas pelo professor ao trabalhar [proporcionalidade] com seus alunos. (FIOREZE, L. A., 2010)

Desse modo, existe a necessidade de organização desse conhecimento, por meio de ações que venham a favorecer a construção de conceitos e aplicabilidade, tornando-se possível a formalização desses conteúdos com a aplicação no contexto investigativo. Um exemplo de como fazer isso é mostrar para os estudantes como essas percepções cotidianas envolvem diferentes relações de proporcionalidade, de que tipo (direta ou inversa).

Portanto, é importante que o estudante compreenda a proporção como uma propriedade da taxa de variação entre as grandezas, saiba entender, primeiramente, quando ela existe ou não (observando ou inferindo, direta ou indiretamente, essa correlação) e, caso ela exista, qual é a relação de proporcionalidade entre cada grandeza. Dessa maneira, a questão pode ser

---

[3] FIOREZE, L. A. **Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade: uma análise a partir da teoria dos campos conceituais.** Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, 2010, Porto Alegre, BR-RS. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/19011>. Acesso em: 10 jan. 2020.

decomposta nestes dois componentes: identificar a existência de proporcionalidade e identificar o tipo de relação, quando ela é presente. Analisando cada afirmativa separadamente:

1) A idade de uma pessoa e o número de filhos são grandezas que não envolvem proporcionalidade;

Verdadeira. O estudante pode examinar diversos exemplos do seu conhecimento particular e verificar que, de fato, não se observa nenhum tipo de proporcionalidade entre idade de uma pessoa e número de filhos.

2) A velocidade média de um velocista e o tempo gasto para ele completar o percurso são grandezas inversamente proporcionais;

Verdadeira. A velocidade escalar média expressa a distância percorrida por unidade de tempo. Portanto, quanto maior a velocidade, para uma distância fixa, menor o tempo gasto para percorrer essa distância. Logo, velocidade e tempo são grandezas inversamente proporcionais.

3) A quantidade de água consumida em uma casa e o valor da conta paga no final do mês são grandezas inversamente proporcionais;

Falsa. O valor total da conta de água depende do custo de cada unidade de volume de água e da quantidade de água gasta. Se o custo unitário é fixo, quanto mais água for consumida, maior será o valor da conta. Dessa forma, o valor da conta e a quantidade de água consumida são grandezas diretamente proporcionais.

4) O número de torneiras enchendo um tanque e o tempo de enchimento deste tanque são grandezas diretamente proporcionais.

Falsa. O número de torneiras, nessa proposição, é um indicador indireto da velocidade de enchimento do tanque, ou da vazão de água. Quanto mais torneiras enchendo o tanque, menor é o tempo necessário para o preenchimento total. Portanto, o número de torneiras enchendo um tanque e o tempo de enchimento deste são grandezas inversamente proporcionais.

Dessa maneira, a alternativa correta é **D** (V, V, F, F), que julga adequadamente as proposições.

Professor, ao perceber que algum grupo de estudantes sinalizou dificuldade nessa questão, a sugestão é que trabalhe com eles a sequência didática de **Proporcionalidade**[4]. Essa atividade deve ser realizada durante o período letivo,

[4] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3

em momento oportuno no planejamento. Dentre as diferentes formas de realizar esse trabalho, destaca-se a utilização de Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Seguindo essa abordagem, deve-se dividir os estudantes em equipes, respeitando os níveis de conhecimento de cada um, propondo posteriormente que realizem as atividades em colaboração, debatendo seus caminhos e conclusões. A intenção é estimular descobertas e permitir que os estudantes aprendam uns com os outros.

As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Identificar situações que envolvem proporcionalidade direta, inversa ou não proporcionalidade.

- Resolver problemas envolvendo proporcionalidade direta ou inversa.

- Aplicar o Teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade em diferentes contextos.

Para complementar seus conhecimentos e aprimorar o trabalho da sequência, o professor pode consultar as seguintes referências:

- Plano de aula - Diferenciando a proporcionalidade da não proporcionalidade. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1004/diferenciando-a-proporcionalidade-da-nao-proporcionalidade>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Plano de aula - Situações em que não há proporcionalidade. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1586/situacoes-em-que-nao-ha-proporcionalidade>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Plano de aula - Proporcionalidade inversa. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1322/proporcionalidade-inversa>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Plano de aula - Relações de proporcionalidade em situações cotidianas. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/224/relacoes-de-proporcionalidade-em-situacoes-cotidianas>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Números Diretamente e Inversamente Proporcionais – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c89zmwon6cgks.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F1%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FProporcionalidade%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

- Propriedades de Proporções – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bqdfaxbu33cow.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

Habilidade
Identificar situações que envolvem proporcionalidade direta, inversa e não proporcionalidade.

Questão 03

Abaixo estão indicadas tabelas que apresentam a relação entre duas grandezas x e y. Estas grandezas podem apresentar relações diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e não apresentar nenhuma delas:

Tabela I

x	1	2	3	4
y	0,5	0,25	0,125	0,0625

Tabela II

x	1	2	3	4
y	12	6	4	3

Tabela III

x	40	30	20	10
y	120	90	60	30

Tabela IV

x	2	4	6	8
y	10	5	$\frac{10}{3}$	$\frac{5}{2}$

Assinale a alternativa que apresenta duas tabelas em que as grandezas apresentam a mesma relação:

(A) I e II.

(B) I e III.

(C) II e III.

(D) II e IV.

(E) III e IV.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante identifique, dentre as tabelas fornecidas, aquelas nas quais as grandezas x e y apresentam a mesma relação de proporcionalidade. Essa questão novamente busca aferir a habilidade de identificar situações que envolvem proporcionalidade direta, inversa e não proporcionalidade.

Ressalta-se outra vez a importância da capacidade do estudante de identificar os tipos de relação de proporcionalidade, e a maneira como as grandezas variam em concorrência ou contraste umas com as outras a depender dessa relação. Nessa questão, além de reconhecer a existência ou não de proporcionalidade, aprofunda-se na significância dos termos "direta" ou "indireta", que envolvem, no primeiro caso, a constância da razão entre as grandezas, e, no segundo caso, do seu produto, tal qual definido por Weisstein no Glossário de Matemática da renomada fundação Wolfram Mathworld[5,6], em tradução livre:

Se duas grandezas x e y são diretamente proporcionais, $\frac{x}{y}$ é sempre igual para todos os pares de valores; do contrário, se duas grandezas x e y são inversamente proporcionais, xy é sempre igual para todos os pares de valores.

À luz do que foi exposto, é possível examinar cada uma das tabelas apresentadas:

Tabela I

x	1	2	3	4
y	0,5	0,25	0,125	0,0625

Na tabela I, observa-se que o valor de y diminui conforme o valor de x aumenta, o que poderia sugerir que as grandezas x e y são inversamente proporcionais. No entanto, é sempre necessário realizar a verificação:

[5] Tradução livre: *"Duas grandezas x e y são ditas diretamente proporcionais ou "em proporção direta" se y for um múltiplo constante de x, ou seja, $y = cx$, onde c é constante. Essa relação geralmente é escrita $y \propto x$"*. WEISSTEIN, E. W. **Directly Proportional**. MathWorld - A Wolfram Web Resource. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/DirectlyProportional.html>. Acesso em: 20 nov. 2019.

[6] Tradução livre: *"Duas grandezas x e y são ditas inversamente proporcionais ou "em proporção inversa" se y for um múltiplo constante de $\frac{1}{x}$, ou seja, $y = \frac{c}{x}$, onde c é constante. Essa relação geralmente é escrita $y \propto x^{-1}$"*. WEISSTEIN, E. W. **Inversely Proportional**. MathWorld - A Wolfram Web Resource. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/InverselyProportional.html>. Acesso em: 20 nov. 2019.

Verificando a proporcionalidade direta	Verificando a proporcionalidade inversa
$\frac{1}{0{,}5} = 2$ $\frac{2}{0{,}25} = 8$ $\frac{3}{0{,}125} = 24$ $\frac{4}{0{,}0625} = 64$ A razão não é sempre a mesma, logo as grandezas não são diretamente proporcionais.	$1 \times 0{,}5 = 0{,}5$ $2 \times 0{,}25 = 0{,}5$ $3 \times 0{,}125 = 0{,}375$ $4 \times 0{,}0625 = 0{,}25$ O produto não é sempre o mesmo, logo as grandezas não são inversamente proporcionais.

Portanto, **a Tabela I apresenta grandezas não-proporcionais.**

Tabela II

x	1	2	3	4
y	12	6	4	3

Na tabela II, observa-se que o valor de y diminui conforme o valor de x aumenta, o que poderia sugerir que as grandezas x e y são inversamente proporcionais. No entanto, é sempre necessário realizar a verificação:

Verificando a proporcionalidade direta	Verificando a proporcionalidade inversa
$\frac{1}{12} = 0{,}0833 \ldots$ $\frac{2}{6} = 0{,}33 \ldots$ $\frac{3}{4} = 0{,}75$ $\frac{4}{3} = 1{,}33 \ldots$ A razão não é sempre a mesma, logo as grandezas não são diretamente proporcionais.	$1 \times 12 = 12$ $2 \times 6 = 12$ $3 \times 4 = 12$ $4 \times 3 = 12$ O produto é sempre o mesmo, logo as grandezas são inversamente proporcionais.

Portanto, **a Tabela II apresenta grandezas inversamente proporcionais.**

Tabela III

x	40	30	20	10
y	120	90	60	30

Na tabela III, observa-se que o valor de y diminui conforme o valor de x aumenta, o que poderia sugerir que as grandezas x e y são inversamente proporcionais. No entanto, é sempre necessário realizar a verificação:

Verificando a proporcionalidade direta	Verificando a proporcionalidade inversa
$\frac{40}{120} = 0{,}33\ldots$ $\frac{30}{90} = 0{,}33\ldots$ $\frac{20}{60} = 0{,}33\ldots$ $\frac{10}{30} = 0{,}33\ldots$ A razão <u>é</u> sempre a mesma, logo as grandezas <u>são</u> diretamente proporcionais.	$40 \times 120 = 4800$ $30 \times 90 = 2700$ $20 \times 60 = 1200$ $10 \times 30 = 300$ O produto <u>não é</u> sempre o mesmo, logo as grandezas <u>não são</u> inversamente proporcionais.

Portanto, **a Tabela III apresenta grandezas diretamente proporcionais.**

Tabela IV

x	2	4	6	8
y	10	5	$\frac{10}{3}$	$\frac{5}{2}$

Na tabela IV, observa-se que o valor de y diminui conforme o valor de x aumenta, o que poderia sugerir que as grandezas x e y são inversamente proporcionais. No entanto, é sempre necessário realizar a verificação:

Verificando a proporcionalidade direta	Verificando a proporcionalidade inversa
$\frac{2}{10} = 0{,}2$ $\frac{4}{5} = 0{,}8$ $\frac{6}{10/3} = 1{,}8$ $\frac{8}{5/2} = 3{,}2$	$2 \times 10 = 20$ $4 \times 5 = 20$ $6 \times \frac{10}{3} = 20$ $8 \times \frac{5}{2} = 20$

A razão não é sempre a mesma, logo as grandezas não são diretamente proporcionais.	O produto é sempre o mesmo, logo as grandezas são inversamente proporcionais.

Portanto, **a Tabela IV apresenta grandezas inversamente proporcionais.**

Uma vez analisados todos os casos, é possível concluir que apenas as tabelas II e IV apresentam a mesma relação de proporcionalidade (no caso, ambas são inversamente proporcionais), conforme denotado na alternativa **D** (II e IV)**.**

Os estudantes que assinalam a alternativa A (I e II) identificam em ambas as tabelas a seguinte relação: "y diminui conforme x aumenta. A taxa de diminuição de y é menor em valores maiores de x", julgando erroneamente que essa é uma relação de proporcionalidade inversa. Outra possibilidade é que o fazem por observar os mesmos valores em ambas as tabelas na variável x, sem, contudo, fazer julgamentos acerca do tipo de proporcionalidade em cada uma.

Os estudantes que optam pela alternativa B (I e III) possivelmente identificam que há proporcionalidade direta na tabela I, ou que não há relação de proporcionalidade na tabela III. Já o assinalamento das alternativas C (II e III) e E (III e IV) demonstra que o estudante provavelmente considerou a relação de proporcionalidade contrária para uma das tabelas.

Dada a importância de dominar os conhecimentos procedimentais relacionados ao reconhecimento de relações de proporcionalidade, o professor deve estar sempre atento para dificuldades que os estudantes podem apresentar nesse tipo de questão. Ao identificar ocorrências desse tipo, sugere-se trabalhar – dentro do período letivo e das possibilidades do planejamento – a sequência didática de **Proporcionalidade**[7]. Dentre as formas de fazê-lo, destaca-se o uso de Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem Baseada em Problemas. Nessa abordagem, o professor apresentará as situações-problema da sequência didática, problematizando a investigação das relações entre as grandezas. Posteriormente, os estudantes serão estimulados a discutir entre si as diferentes estratégias possíveis para resolver os problemas e construirão resoluções colaborativamente, de modo a instigar a descoberta de caminhos para resolução e o debate saudável entre os estudantes.

[7] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F1%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FProporcionalidade%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Identificar situações que envolvem proporcionalidade direta, inversa ou não proporcionalidade.

- Resolver problemas envolvendo proporcionalidade direta ou inversa.

- Aplicar o Teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade em diferentes contextos.

Para reforçar as atividades propostas na sequência, o professor pode formular planos de aula baseados nas seguintes referências:

- Plano de aula - Proporcionalidade direta. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1386/proporcionalidade-direta>. Acesso em: 22 nov. 2019.

- Plano de aula - Proporcionalidade inversa. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1322/proporcionalidade-inversa>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Plano de aula - Diferenciando a proporcionalidade da não proporcionalidade. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1004/diferenciando-a-proporcionalidade-da-nao-proporcionalidade>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Plano de aula - Situações em que não há proporcionalidade. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1586/situacoes-em-que-nao-ha-proporcionalidade>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Números Diretamente e Inversamente Proporcionais – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c89zmwon6cgks.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Propriedades de Proporções – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bqdfaxbu33cow.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

Habilidade
Diferenciar número racional de número irracional.

Questão 04

Dentre as opções abaixo indique a que representa um número irracional.

(A) $-\sqrt{3^2}$

(B) $\frac{\sqrt{81}}{3}$

(C) $-\sqrt{2^5 + 2^5}$

(D) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$

(E) $\boldsymbol{\sqrt{5^2 + 20}}$

Comentários e Recomendações Pedagógicas

Essa questão requer que o estudante identifique qual, entre os números apresentados, é irracional, diferenciando números racionais de irracionais. Pode haver dificuldade na compreensão de muitos estudantes, conforme explorado no trabalho de Nick Lord (2008)[8], que o fato de uma expressão numérica envolver números irracionais não é condição suficiente para que seu resultado (ou série de resultados) seja, também, irracional. Alguns exemplos disso podem ser apreciados a seguir:

$$a = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$$

$\sqrt{20}$ é irracional;

$\sqrt{5}$ é irracional;

$a = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{4} = 2$ é racional.

$$b = \sqrt{20} \times \sqrt{5}$$

$\sqrt{20}$ é irracional;

$\sqrt{5}$ é irracional;

$b = \sqrt{20} \times \sqrt{5} = \sqrt{100} = 10$ é racional.

Não basta, portanto, observar uma representação qualquer de um número para julgá-la, sendo necessário avaliá-la (fatorá-la ou aplicar as propriedades das operações básicas) para, enfim, solucionar a questão.

Para chegar à alternativa correta, é necessário que o estudante compreenda que, dentro do universo de alternativas apresentadas, só são irracionais as raízes quadradas **não exatas.** Portanto, examinando cada uma das alternativas:

Alternativa	Desenvolvimento	Conclusão
A	$-\sqrt{3^2} = -3$	Racional
B	$\frac{\sqrt{81}}{3} = \frac{9}{3} = 3$	Racional

[8] LORD, N. Maths bite: irrational powers of irrational numbers can be rational. **Mathematical Gazette**. 2008, v. 92, p. 534. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/mathematical-gazette/article/9275-maths-bite-irrational-powers-of-irrational-numbers-can-be-rational/D1AA21526A7095CF73064E0609127061>. Acesso em: 16 jan. 2020.

C	$-\sqrt{2^5+2^5} = -\sqrt{2\times 2^5} = -\sqrt{2^6} = -2^3 = -8$	Racional
D	$\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$	Racional
E	$\sqrt{5^2+20} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = 6{,}708203932\ldots$	Irracional

Pode-se perceber que a única expressão cujo desenvolvimento resulta num radical não-exato é a alternativa **E** ($\sqrt{5^2+20}$), que responde corretamente ao comando apresentado.

Os estudantes que assinalam a alternativa D $\left(\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}\right)$ percebem que ambos os componentes da fração proposta (o numerador $\sqrt{8}$ e o demoninador $\sqrt{2}$) são números irracionais; contudo, ignoram que é possível que a razão entre dois números seja um número racional, conforme é o caso nessa alternativa.

Já os estudantes que marcam a alternativa C ($-\sqrt{2^5+2^5}$) são aqueles que provavelmente não percebem ou desconhecem que é possível aplicar as propriedades das operações multiplicação, potenciação e radiciação para simplificar a expressão até que se torne a raiz de um quadrado perfeito. Em alguns casos, podem chegar a desenvolver as potências de dois e realizar a soma, mas, por erros de aritmética, alcançar resultados diferentes de 64 (equivalente a $2^5 + 2^5$), mas aproximados, cujas raízes quadradas são números irracionais.

Os estudantes que assinalam as alternativas A $\left(-\sqrt{3^2}\right)$ e B $\left(\frac{\sqrt{81}}{3}\right)$ podem não perceber que os radicandos, em ambos os casos, já são quadrados perfeitos, e, portanto, resultam em raízes quadradas não só exatas, mas também inteiras.

Na eventualidade de um grupo de estudantes demonstrar dificuldades com essa questão, sugere-se ao professor que trabalhe – conforme as possibilidades do seu planejamento e durante o período letivo – a sequência didática de **Conjuntos Numéricos**[9]. Para tal, pode empregar Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Ao aplicar essa abordagem, os dividirá os estudantes em equipes, procurando aproximar aqueles com níveis de conhecimento similares. Em seguida, irá propor que os membros da equipe

[9] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F1%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FConjuntos%20Num%C3%A9ricos%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

percorram juntos as atividades da sequência, resolvendo as questões colaborativamente. A intenção, aqui, é estimular o debate entre os estudantes, fazendo com que comparem seus métodos de resolução e aprendam em conjunto. As habilidades pertencentes a essa sequência são:

- Identificar relações entre os conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

- Diferenciar número racional de número irracional - critérios.

- Localizar números reais na reta.

Os seguintes materiais de referência podem ser úteis no preparo dos planos de aula do professor:

- Demonstração de que a raiz quadrada de 2 é um número irracional. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/demonstracao-de-que-a-raiz-quadrada-de-2-e-um-numero-irracional>. Acesso em: 20 nov. 2019.

- Reconhecendo racional e irracional. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/reconhecendo-racional-e-irracional-exemplo-expressoes>. Acesso em: 20 nov. 2019.

- Racionalização de denominadores. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/racionalizacao-de-denominadores>. Acesso em: 20 nov. 2019.

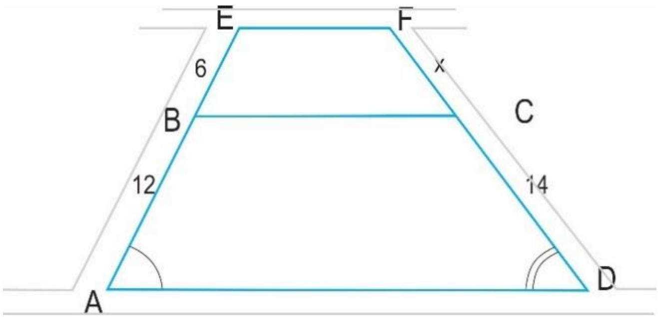
- Desvendando os Números Reais. Disponível em: <http://www.ime.ufg.br/bienal/2006/mini/cristina.cerri.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2019.

- Plano de aula - Diferenças entre números racionais e irracionais. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/246/diferencas-entre-numeros-racionais-e-irracionais>. Acesso em: 20 nov. 2019.

Habilidade
Aplicar o Teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade em diferentes contextos.

Questão 05

Inicialmente uma praça foi desenhada na forma de um trapézio ABCD. Agora os engenheiros querem fazer uma ampliação nessa praça, indicada pela figura BEFC, mantendo sua forma de trapézio.



Para isso o valor de x deve ser:

(A) 15
(B) 13
(C) 11
(D) 9
(E) 7

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante calcule o comprimento de um dos lados de um trapézio, dado outro trapézio semelhante a ele que possui uma das bases em comum, avaliando a habilidade do estudante em aplicar o Teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade em diferentes contextos.

O Teorema de Tales é um dos elementos fundamentais da chamada Geometria Euclidiana, tal qual sumarizado na metade do século XX por Thomas Heath (1956)[10]. Aferir essa habilidade é importante porque, no âmbito do Ensino de Matemática na Educação Básica, as abordagens em voga na atualidade seguem, quase todas, um perfil axiomático do qual o Teorema de Tales é um dos elementos primordiais (Borceux, 2014)[11]. Portanto, avaliar essa habilidade significa, indiretamente, avaliar a extensão do domínio de um estudante dos princípios fundamentais da Geometria Plana. Para responder adequadamente, o estudante precisa recordar que o Teorema de Tales denota: *"se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos correspondentes da outra"*. (FERREIRA, 2017[12]).

Tendo mobilizado esse conhecimento, deve notar em seguida que tanto a figura original (o trapézio ABCD) quanto sua ampliação (o trapézio BEFC) têm o segmento BC em comum como uma de suas bases. Isso faz com que os segmentos AD, BC e EF sejam paralelos. Esse feixe de segmentos interseccionam

---

[10] HEATH, T. L. **The Thirteen Books of Euclid's Elements, Books 1 and 2**. New York: Dover Publications, Inc, 1956.
[11] BORCEUX, F. **An Axiomatic Approach to Geometry**. [s.l]: Springer International Publishing, 2014.
[12] FERREIRA, L. S. **Como o teorema de Tales é apresentado em livros didáticos do nono ano.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Ilhéus: UESC, 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160110518>. Acesso em: 16 jan. 2020.

os segmentos transversais AE e DF, dando origem a um conjunto de relações de proporcionalidade de acordo com o Teorema de Tales.

Essas relações devem ser utilizadas para resolução da situação-problema apresentada. Um dos desenvolvimentos que o estudante poderá registrar está exemplificado a seguir:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{DC}{DF}$$

$$\frac{12}{(12+6)} = \frac{14}{(14+x)}$$

$$12 \cdot (14 + x) = 14 \cdot (12 \; + \; 6)$$

$$12x = 14 \cdot (18 - 12) = 84$$

$$x = \frac{84}{12} = 7$$

Logo, a medida de x, na situação apresentada, equivale a 7, levando à alternativa **E**. Outras estratégias podem ser exploradas, levando, certamente, ao mesmo resultado.

Cada uma das alternativas apresenta um valor que pode ser obtido por incongruências aritméticas ou derivação de relações aleatórias, inadequadas à aplicação do Teorema de Tales, sem que se observe um grau explícito de diferenciação cognitiva dentre os caminhos que levam a eles. Um exemplo de como isso pode acontecer é o emprego da seguinte relação incorreta:

$$\frac{AE}{AB} = \frac{CF}{BE} \Leftrightarrow \frac{(12+6)}{12} = \frac{x}{6}$$

$$\Leftrightarrow 12x = 108$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{108}{12} = 9$$

Se um grupo de estudantes apresentar dificuldades com essa questão, será muito interessante que o professor trabalhe – conforme as possibilidades do seu planejamento – a sequência didática de **Proporcionalidade**[13]. Ao fazê-lo, pode empregar Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Na aplicação dessa abordagem, os estudantes são divididos em equipes (procurando aproximar aqueles com níveis de conhecimento próximos) e

[13] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F1%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FProporcionalidade%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

cooperam entre si para resolver de maneira colaborativa as situações-problema propostas, buscando caminhos próprios para resolução e apresentando uns aos outros suas descobertas, para que, discutindo em conjunto, alcancem as conclusões pertinentes. As habilidades pertencentes a essa sequência são:

- Identificar situações que envolvem proporcionalidade direta, inversa ou não proporcionalidade.

- Resolver problemas envolvendo proporcionalidade direta ou inversa.

- Aplicar o Teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade em diferentes contextos.

Alguns materiais de referência podem ser encontrados a seguir:

- Semelhança entre Figuras e Polígonos – OBMEP. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=H70ftiaKCmM>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Teorema de Tales - Parte I – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/dsvqlq1lrux4.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Teorema de Tales - Parte II – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/a3zlqf5kcp3.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Como ter certeza da semelhança? Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/busca?q=Semelhan%C3%A7a&p=1>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Teorema de Tales: verificações experimentais, aplicação e demonstração. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaColecaoAula.html?id=489>. Acesso em: 21 nov. 2019.

Habilidade
Resolver problemas envolvendo proporcionalidade direta ou inversa.

Questão 06

Vinicius e Carolina são estudantes de uma mesma escola, mas estudam em salas diferentes. Certo dia resolveram aplicar seu conhecimento de matemática e começaram a contar o número de colegas que entravam em suas salas no começo do período. Durante a contagem tanto um como o outro se distraiu e acabaram perdendo alguns dados. Abaixo estão anotados os resultados minuto a minuto.

Tempo	Vinicius	Carolina
1º minuto	5	4
2º minuto	15	x
3º minuto	y	24
4º minuto	60	z

Para que o trabalho ficasse completo, consideraram que os valores obtidos em cada sala apresentavam proporção direta entre eles. Usando as considerações feitas pelos estudantes, assinale a alternativa que apresenta os valores de x, y e z respectivamente:

(A) 15; 24 e 60

(B) 15; 30 e 60

(C) 12; 30 e 48

(D) 12; 24 e 60

(E) 14; 27,5 e 34

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante calcule um conjunto de números faltantes em um conjunto de valores de duas grandezas diretamente proporcionais, envolvendo a habilidade de resolver problemas de proporcionalidade direta ou inversa. Mobilizar os conhecimentos de proporcionalidade para extrair relações entre grandezas do cotidiano e utilizar essas relações para complementar padrões – interpolando valores em sequências incompletas ou extrapolando conjuntos de dados – faz parte dos mecanismos de compreensão do mundo do estudante.

Como os dados obtidos apresentam proporção direta entre si, conforme afirmado no enunciado, a razão entre o número de estudantes em cada uma das salas será constante a cada minuto considerado, ou seja:

$$\frac{4}{5} = \frac{x}{15} = \frac{24}{y} = \frac{z}{60}$$

Essas relações podem ser combinadas para determinação de cada um dos valores desconhecidos. Uma possível solução é:

$$\frac{4}{5} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = \frac{4 \times 15}{5} = 12$$

$$\frac{4}{5} = \frac{24}{y} \Rightarrow y = \frac{5 \times 24}{4} = 30$$

$$\frac{4}{5} = \frac{z}{60} \Rightarrow z = \frac{4 \times 60}{5} = 48$$

De tal forma que o conjunto de números encontrado está adequadamente relacionado na alternativa **C** (12; 30 e 48).

Os estudantes que assinalam a alternativa A (15; 24 e 60) não compreendem a hipótese feita sobre a proporcionalidade direta entre as variáveis, interpretando-a como uma relação de igualdade ou equivalência, e assinalando valores de x, y e z iguais àqueles na outra coluna de sua respectiva linha.

Já os estudantes que assinalam as alternativas B (15; 30 e 60) ou D (12; 24 e 60) estimam parcialmente a resposta, observando apenas uma ou duas relações de proporcionalidade com eficácia, mas não alcançam o conjunto completo com os três valores corretos.

Por fim, os estudantes que selecionam a alternativa E (14; 27,5 e 34) são aqueles que realizam interpolações locais em cada variável individualmente, desconsiderando a correlação entre as duas variáveis (e a relação de proporcionalidade que é fundamental para a resolução do problema). Por exemplo, ao determinar os valores de x e z, os estudantes possivelmente interpretam que $(4, x, 24, z)$ é uma sequência numérica de variação constante. Portanto, seriam verdadeiras as relações

$$x - 4 = 24 - x = z - 24$$

De que deriva $x = 14$ e $z = 34$. Nesse caso, os números $(4, 14, 24, 34)$ guardam entre si a variação constante de 10, indicando a escolha da opção que exibe esses números.

Saber realizar interpolações de valores de grandezas utilizando relações de proporcionalidade é muito importante pois torna o estudante competente em utilizar seus conhecimentos matemáticos para inferir informações no cotidiano. Dessa maneira, se o professor identificar que um grupo de estudantes sinalizou dificuldades com essa questão, uma boa atitude será trabalhar – dentro do período letivo e das possibilidades do planejamento – a sequência didática de **Proporcionalidade**[14]. Uma forma de fazê-lo é empregar Metodologias Ativas de

[14] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F1%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FProporcionalidade%2Epdf&parent=%2Fsit

ensino, como a Aprendizagem Baseada em Problemas. Nessa abordagem, o professor apresentará as situações da sequência, problematizando a determinação de valores desconhecidos utilizando relações como "diretamente proporcional" e "inversamente proporcional". Os estudantes discutirão entre si as diferentes estratégias possíveis para resolver os problemas e construirão resoluções em conjunto, de modo a instigar a descoberta de caminhos para resolução e o debate saudável entre os estudantes. As habilidades contidas nessa sequência didática são:

- Identificar situações que envolvem proporcionalidade direta, inversa ou não proporcionalidade.
- Resolver problemas envolvendo proporcionalidade direta ou inversa.
- Aplicar o Teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade em diferentes contextos.

Ao professor que objetivar compor planos de aula para aprimorar a habilidade em questão, recomenda-se a leitura motivadora dos seguintes materiais de referência:

- Plano de aula - Proporcionalidade direta. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1386/proporcionalidade-direta>. Acesso em: 22 nov. 2019.

- Números Diretamente e Inversamente Proporcionais – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c89zmwon6cgks.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

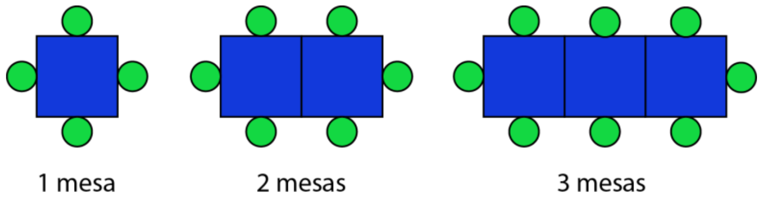
- Propriedades de Proporções – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bqdfaxbu33cow.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

Habilidade
Identificar a expressão algébrica que representa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.

Questão 07

Num restaurante, de acordo com o tamanho do grupo que deseja se sentar junto, é adicionada uma nova mesa, conforme indica a figura abaixo.

es%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.



Assim, com uma mesa podem se sentar até 4 pessoas; com 2 mesas até 6 pessoas e assim por diante. A expressão matemática que representa o número máximo de pessoas que podem se sentar caso sejam colocadas M mesas, uma ao lado da outra como na figura acima, é

(A) 4M + 2

(B) 4M – 2

(C) 4M

(D) 2M + 2

(E) 2M + 4

Comentários e Recomendações Pedagógicas

Essa questão requer que o estudante componha uma expressão matemática que compute adequadamente o número de lugares obtidos a partir da combinação de certo número de mesas numa disposição predefinida. Essa atividade trata da habilidade de identificar a expressão algébrica que representa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.

Existem diferentes maneiras de construir o raciocínio que fornecerá a expressão questionada. Apresentaremos duas estratégias a seguir:

O primeiro caminho possível é pensar que "cada mesa tem quatro cadeiras. Toda vez que duas mesas são juntadas, dois lugares são perdidos. Para uma combinação de M mesas, são feitas $(M-1)$ junções." Nesse caso, o número de lugares será:

Estratégia 1

$$N = \underbrace{4M}_{\substack{Quatro\ lugares \\ por\ mesa \\ (originalmente)}} - \underbrace{2}_{\substack{Cadeiras\ perdidas \\ por\ junção}} \times \underbrace{(M-1)}_{\substack{Número\ de \\ junções}}$$

$$N = 4M - 2M + 2 = 2M + 2$$

Outro pensamento possível é o seguinte: "há sempre dois lugares nas cabeceiras (horizontais), independente do número de mesas. Para cada mesa, o número de lugares verticais aumenta em dois". Nessa situação, o número de lugares será:

Estratégia 2

$$N = \underbrace{2M}_{\substack{dois\ lugares \\ verticais \\ por\ mesa}} + \underbrace{2}_{\substack{lugares \\ na \\ cabeceira}}$$

Em ambos os raciocínios apresentados (e em qualquer outro algoritmo correto), a resposta será sempre a mesma, a alternativa **D** (2M + 2).

Os estudantes que selecionam a alternativa A (4M + 2) possivelmente desenvolvem um raciocínio similar à Estratégia 2, uma vez que chegam a perceber que todos os casos apresentam constantemente dois lugares horizontais (de cabeceira), mas, ao compor sua expressão numérica, contabilizam quatro lugares para cada mesa (como na situação original com uma mesa só), obtendo a seguinte expressão:

$$N = \underbrace{4M}_{\substack{quatro\ lugares \\ por\ mesa \\ (originalmente)}} + \underbrace{2}_{\substack{lugares \\ na \\ cabeceira}}$$

Aqueles que escolhem a alternativa B (4M - 2) possivelmente desenvolvem um caminho similar à Estratégia 1, mas esquecem de multiplicar o número de lugares descontados pelo número de junções realizadas, ao construir suas expressões numéricas, como mostrado a seguir:

$$N = \underbrace{4M}_{\substack{Quatro\ lugares \\ por\ mesa \\ (originalmente)}} - \underbrace{2}_{\substack{Cadeiras\ perdidas \\ por\ junção}}$$

Para escolher a alternativa C (4M), os estudantes possivelmente se concentram no fato de que cada mesa originalmente possui quatro lugares, e ignoram a necessidade de descontar lugares quando as mesas são juntadas, construindo a expressão a seguir:

$$N = \underbrace{4M}_{\substack{Quatro\ lugares \\ por\ mesa}}$$

Por fim, aqueles que selecionam a alternativa E (2M + 4) possivelmente desenvolvem um caminho alinhado à Estratégia 1, mas computam uma perda de dois lugares a cada mesa intermediária (ou seja, descontando as mesas de cabeceira). Nessa situação, o número de lugares descontados seria multiplicado por $(M-2)$, como mostrado a seguir:

$$N = \underbrace{4M}_{\substack{Quatro\ lugares \\ por\ mesa \\ (originalmente)}} - \underbrace{2}_{\substack{Cadeiras\ perdidas \\ por\ mesa \\ intermediária}} \times \underbrace{(M-2)}_{\substack{Número\ de \\ mesas \\ intermediárias}}$$

$$N = 4M - 2M + 4 = 2M + 4$$

O professor deve ficar sempre atento para identificar estudantes que demonstrem dificuldades com esse tipo de questão. Se isso acontecer, recomenda-se o trabalho da sequência didática de **Generalização de Padrões**[15] do 9º ano do Ensino Fundamental[16], durante o período letivo e dentro das possibilidades do planejamento. Uma maneira interessante de realizar esse trabalho é empregando Metodologias Ativas de ensino, como a Gamificação. Para empregar essa abordagem, o professor convidará os estudantes a se dividir em equipes e participar de um jogo em que devem percorrer a sequência didática em conjunto, de maneira que cada equipe apresente a resolução das atividades correspondentes. A cada rodada, pontuarão aqueles que alcançarem respostas adequadas dentro do tempo máximo estipulado pelo professor, de modo que os vencedores devem explicar seu raciocínio. Essa estratégia engaja os estudantes ao mesmo tempo que cria oportunidades para que eles discutam entre si as soluções, aprendendo uns com os outros. As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Resolver problemas geométricos aplicando a generalização de padrões.

- Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.

- Relacionar uma expressão matemática a uma expressão na língua materna e vice-versa.

- Identificar o sistema de equações lineares que resolve um problema.

- Realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras e resolver a equação resultante.

---

[15] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FGeneraliza%C3%A7%C3%A3o%20de%20padr%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

[16] Nota do autor: Destaca-se a importância da utilização de uma sequência didática do 9º ano do Ensino Fundamental, dada a relevância da habilidade em questão, também presente na programação da 1ª série do Ensino Médio.

Para complementar os trabalhos com essa sequência didática, sugere-se a consulta às seguintes referências:

- Plano de aula - Padrões em Sequências Numéricas. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/631/padroes-em-sequencias-numericas>. Acesso em: 22 nov. 2019.

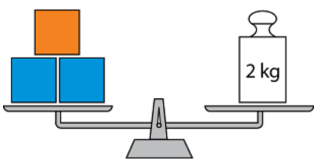
- BORRALHO, A. Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. In: XIII CIAEM-IACME, 2011, Pernambuco, Brasil. **Anais**. Pernambuco: Comité Interamericano de Educación Matemática, 2011. Disponível em: <http://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1111/604>. Acesso em: 16 jan. 2020.

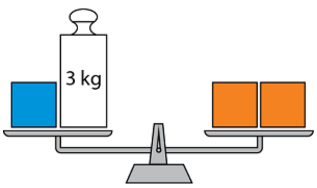
- BRANCO, N. C. V. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2008. 250 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1197/1/17737_ULFC086729_TM.pdf>. Acesso em: 23 dez. 2019.

Habilidade
Identificar o sistema de equações lineares que resolve um problema e realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras e resolver a equação resultante.

Questão 08

Três cubos azuis e três cubos laranjas exatamente iguais estão sendo analisados em uma balança de pratos em duas situações diferentes como indicam as figuras.





A massa de um cubo laranja é de

(A) 0,20 kg.

(B) 1,00 kg.

(C) 1,25 kg.

(D) 1,60 kg.

(E) 3,00 kg.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante calcule a massa de um cubo laranja a partir de um sistema de equações lineares que ele construirá por meio da ilustração fornecida. Essa questão envolve identificar o sistema de equações lineares que resolve um problema e realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras e resolver a equação resultante.

A capacidade de representar algebricamente situações-problema percebidas em linguagens diferentes (como no caso dessa questão, em que é oferecido um registro imagético e não-verbal) é uma habilidade da Matemática que encontra aplicações em diversas disciplinas das Ciências da Natureza ou Humanas. Durante esse processo, o estudante deve estar atento para identificar a recorrência das mesmas variáveis (no caso, a massa dos blocos azul e laranja) em ambas as figuras, atribuindo a elas notação adequada; e para construir as relações de equivalência corretamente (utilizando em cada equação os dois lados da mesma balança equilibrada).

Dessa forma, pode-se equacionar o problema proposto da seguinte maneira:

Sendo a a massa de um cubo azul e l a massa de um cubo laranja, é possível derivar as seguintes expressões:

$$\begin{cases} l + 2a = 2 \ (L_1) \\ a + 3 = 2l \ (L_2) \end{cases}$$

A reorganização da expressão L_2 fornece uma expressão para o cálculo de a:

$$a = 2l - 3kg$$

Substituindo essa expressão na equação L_1, é possível obter a seguinte equação de uma única variável:

$$l + 2(2l - 3) = 2$$

$$\Leftrightarrow l + 4l - 6 = 2$$

$$\Leftrightarrow 5l = 8$$

$$\therefore l = \frac{8}{5} = 1{,}60\ kg$$

Valor que está expresso na alternativa **D** (1,60 kg).

Os estudantes que confundirem a relação entre o nome escolhido para as variáveis e o que elas representam podem chegar a sistemas inadequados, como, por exemplo:

$$\begin{cases} a + 2l = 2\ (E_1) \\ l + 3 = 2a\ (E_2) \end{cases}$$

Cuja solução $l = 0{,}20\ kg$ (que, na verdade, é a massa do cubo azul) está expressa na alternativa A (0,20 kg). A mesma solução pode ser encontrada se houver confusão na representação das massas determinadas (blocos em branco):

$$\begin{cases} l + 2a = 3\ (E_3) \\ a + 2 = 2l\ (E_4) \end{cases}$$

Outros erros, no valor dos coeficientes, sinais ou massas, ou expressões incompletas, levarão a outras respostas incorretas, por exemplo:

$$\begin{cases} l + 2a = 3\ (E_5) \\ a + 2 = 3l\ (E_6) \end{cases} \Rightarrow l = 1{,}00\ kg \text{ (alternativa B)}$$

$$\begin{cases} l + a = 2\ (E_7) \\ a + 3 = 3l\ (E_8) \end{cases} \Rightarrow l = 1{,}25\ kg \text{ (alternativa C)}$$

O assinalamento da alternativa E (3,00 kg) só pode se originar de um conjunto de erros tanto na construção do sistema quanto na sua manipulação.

Ao perceber que um grupo de estudantes sinalizou dificuldade com essa questão, a sugestão que fazemos ao professor é que reserve um momento dentro do período letivo e das possibilidades do seu planejamento para trabalhar a sequência didática de **Generalização de Padrões**[17] do 9º ano do Ensino Fundamental[18]. Uma das maneiras de fazê-lo é empregar Metodologias Ativas de ensino, a exemplo da Aprendizagem entre Pares ou Times. Selecionando essa abordagem, o professor dividirá os estudantes em equipes, aproximando aqueles com nível de conhecimento similar, e proporá que os membros dessas equipes

[17] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FGeneraliza%C3%A7%C3%A3o%20de%20padr%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

[18] Nota do autor: Destaca-se a importância da utilização de uma sequência didática do 9º ano do Ensino Fundamental, dada a relevância da habilidade em questão, também presente na programação da 1ª série do Ensino Médio.

percorram a sequência didática em conjunto, discutindo as atividades entre si, aprendendo uns com os outros e construindo as soluções de forma colaborativa. As habilidades pertencentes a essa sequência são:

- Resolver problemas geométricos aplicando a generalização de padrões.

- Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.

- Relacionar uma expressão matemática a uma expressão na língua materna e vice-versa.

- Identificar o sistema de equações lineares que resolve um problema.

- Realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras e resolver a equação resultante.

Para elaborar as atividades de trabalho da sequência didática, o professor pode procurar suporte nas referências a seguir:

- Resolução de sistemas lineares por substituição. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/resolucao-de-sistemas-lineares-por-substituicao>. Acesso em: 22 nov. 2019.

- Plano de aula - Sistema de Equações Lineares (Ampliação). Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1356/sistema-de-equacoes-lineares-ampliacao>. Acesso em: 22 nov. 2019.

Habilidade
Identificar o sistema de equações lineares que resolve um problema e realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras e resolver a equação resultante.

Questão 09

Joana e seu sobrinho compraram salgados para o lanche da tarde. Na lanchonete foram atendidos pelo garçom que anotou os pedidos, conforme descrito abaixo:

- Joana: 2 coxinhas e 1 empada;
- Sobrinho de Joana: 1 coxinha e 2 empadas.

Após receberem os pedidos, Joana se dirigiu ao caixa para efetuar o pagamento da comanda, e observou que pagaria ao todo R$ 13,50, sendo R$ 6,50 referente ao seu pedido e R$ 7,00 referente ao pedido de seu sobrinho. O valor pago por cada coxinha e por cada empada foi respectivamente:

(A) R$ 5,50 e R$ 6,00.

(B) R$ 2,40 e R$ 4,10.

(C) R$ 2,00 e R$ 2,50.

(D) R$ 3,00 e R$ 3,50.

(E) R$ 2,50 e R$ 2,00.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante equacione e resolva um sistema de equações lineares para determinar o valor unitário de cada produto consumido por Joana e seu sobrinho. Novamente, a questão aborda a habilidade de resolver um problema e realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras e resolver a equação resultante.

Dessa maneira, o recurso motivador e definidor do sistema linear é literal, ou seja, está expresso na linguagem escrita, de maneira que os estudantes devem considerar as relações de determinação linguística entre as informações oferecidas e traduzi-las a expressões matemáticas e condições de contorno[19]. Espera-se que os estudantes percebam os seguintes pontos:

I. O problema tem duas variáveis a serem determinadas: o valor unitário de cada coxinha e o valor unitário de cada empada.

II. Os pedidos podem ser traduzidos, individualmente, a equações lineares, em que cada variável (produto pedido) é multiplicado pelo seu coeficiente (quantidade pedida) e a combinação dessas parcelas deve ser igualada ao valor final de cada compra, que foi fornecido mais à frente no enunciado (*"Joana [...] observou que pagaria ao todo R$ 13,50, sendo R$ 6,50 referente ao seu pedido e R$ 7,00 referente ao pedido de seu sobrinho").*

III. As duas equações construídas a partir da proposição II formam, em conjunto, um sistema linear contendo duas equações linearmente independentes e duas variáveis, de maneira que o sistema tem solução possível e determinada.

Dessa maneira, denotando por c o valor unitário de cada coxinha e por m o valor unitário de cada empada, serão construídas as seguintes equações:

Joana: 2 coxinhas e 1 empada, perfazendo um total de R$ 6,50

$$2c + 1m = \text{R\$ } 6{,}50$$

[19] Nota do autor: entenda-se aqui "condições de contorno" como um conjunto de informações que, ao mesmo tempo em que restringe o universo possível de soluções de um sistema, pode ser utilizado durante seu desenvolvimento para alcançar a resposta correta. Exemplos disso podem ser: "a energia do sistema tem que se conservar", ou "o número de pessoas deve ser sempre ímpar" ou "o valor da concentração não pode ser negativo".

Sobrinho de Joana: 1 coxinha e 2 empadas, perfazendo um total de R$ 7,00

$$1c + 2m = \text{R\$ } 7{,}00$$

Sistema linear resultante:

$$\begin{cases} 2c + m = \text{R\$ } 6{,}50 \\ c + 2m = \text{R\$ } 7{,}00 \end{cases}$$

Solução do sistema linear:

$$\begin{cases} 2c + m = \text{R\$ } 6{,}50 \quad (L_1) \\ c + 2m = \text{R\$ } 7{,}00 \quad (L_2) \end{cases} \xRightarrow{L_2 - 2L_1} -3c = -\text{R\$ } 6{,}00 \therefore c = \text{R\$ } 2{,}00$$

$$2c + m = \text{R\$ } 6{,}50 \Leftrightarrow \text{R\$ } 4{,}00 + m = \text{R\$ } 6{,}50 \therefore m = \text{R\$ } 2{,}50$$

De maneira que a alternativa **C** (R$ 2,00 e R$ 2,50) responde corretamente à questão.

Alguns estudantes podem optar pela alternativa E (R$ 2,50 e R$ 2,00) ao confundirem a atribuição de variáveis no problema, invertendo os valores encontrados entre a coxinha e a empada. Outra hipótese é que atribuam valores invertidos para os totais dos pedidos de cada personagem, resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2c + m = \text{R\$ } 7{,}00 \\ c + 2m = \text{R\$ } 6{,}50 \end{cases}$$

Caso em que sinalizam a necessidade de reforçar elementos relacionados à interpretação de textos, mas não têm problema em resolver o sistema linear encontrado, ainda que seja incompatível com a situação apresentada.

Para os estudantes que selecionam as alternativas B (R$ 2,40 e R$ 4,10) ou D (R$ 3,00 e R$ 3,50), há duas hipóteses concorrentes: a primeira é que sinalizam não ter compreendido que a situação-problema apresentada é modelada por um sistema linear; tampouco compreenderam o papel do número de unidades pedido e sua relação com o coeficiente linear de cada variável. Nesse caso, selecionam uma alternativa que apresenta dois valores que, somados, correspondem ao valor individual do pedido de Joana ($\text{R\$ } 2{,}40 + \text{R\$ } 4{,}10 = \text{R\$ } 6{,}50$). Outra hipótese é que tenham construído um sistema linear incorreto, combinando aleatoriamente dados fornecidos no enunciado e empregando estratégias incorretas na sua resolução, alcançando equações e soluções tais como as mostradas a seguir:

$$2m + 3m = \text{R\$ } 13{,}50 + \text{R\$ } 7{,}00 \Rightarrow m = \text{R\$ } 4{,}10$$

$$c + m = \text{R\$ } 6{,}50 \Rightarrow c = \text{R\$ } 2{,}40$$

$$m + m = \text{R\$ } 7{,}00 \Rightarrow m = \text{R\$ } 3{,}50$$

$$c + m = \text{R\$ } 6{,}50 \Rightarrow c = \text{R\$ } 3{,}00$$

Por fim, o assinalamento da alternativa A (R$ 5,50 e R$ 6,00) sinaliza problema, visto que os valores não podem ser alcançados por nenhuma estratégia que empregue os dados fornecidos no texto. Além disso, os estudantes que selecionam essa alternativa não percebem que os próprios valores fornecidos, se forem combinados, excedem os valores individuais de cada pedido, de forma que, além dos reforços combinados de todos os outros que erraram a questão, precisam também de algum reforço em relação à verificação da verossimilhança das soluções propostas.

Se um grupo de estudantes sinalizar dificuldades com essa questão, será muito interessante que o professor trabalhe – dentro das possibilidades do planejamento e durante o período letivo – a sequência didática de **Generalização de Padrões**[20] do 9º ano do Ensino Fundamental[21]. Uma sugestão é que seja empregada uma Metodologia Ativa de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Ao fazê-lo, o professor dividirá os estudantes em equipes (atentando para aproximar aqueles com níveis de conhecimento similares) para que executem em conjunto as tarefas da sequência, cooperando entre si para resolver de maneira colaborativa as situações-problema propostas, buscando seus caminhos para resolução e debatendo suas descobertas. As habilidades pertencentes a essa sequência são:

- Resolver problemas geométricos aplicando a generalização de padrões.

- Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.

- Relacionar uma expressão matemática a uma expressão na língua materna e vice-versa.

- Identificar o sistema de equações lineares que resolve um problema.

- Realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras e resolver a equação resultante.

Para se aprimorar nas bases teóricas da transcrição algébrica de situações-problemas expressas em linguagem verbal, o professor pode consultar os materiais e conteúdos selecionados a seguir:

---

[20] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FGeneraliza%C3%A7%C3%A3o%20de%20padr%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

[21] Nota do autor: Destaca-se a importância da utilização de uma sequência didática do 9º ano do Ensino Fundamental, dada a relevância da habilidade em questão, também presente na programação da 1ª série do Ensino Médio.

- JACOMELLI, K. Z. **A linguagem natural e a linguagem algébrica**: nos livros didáticos e em uma classe de 7ª série do ensino fundamental. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina. 2006. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/88270/230927.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 22 nov. 2019.

- Do Português para o Matematiquês. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/do-portugues-para-o-matematiques>. Acesso em: 22 nov. 2019.

- Resolução de sistemas lineares por substituição. Disponível em: <http://mecflix.mec.gov.br/video/resolucao-de-sistemas-lineares-por-substituicao>. Acesso em: 22 nov. 2019.

- Plano de aula - Sistema de Equações Lineares (Ampliação). Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1356/sistema-de-equacoes-lineares-ampliacao>. Acesso em: 22 nov. 2019.

Habilidade
Aplicar o Teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade em diferentes contextos e resolver problemas envolvendo proporcionalidade direta ou inversa.

Questão 10

Na figura, as ruas Adrianópolis, Otelo Rizzo e Mozart de Andrade, situadas no bairro do Tatuapé na cidade de São Paulo, são paralelas.

Dessa forma, pode-se concluir que a medida indicada por x na figura, que é um trecho da Rua Emília Marengo, entre as ruas Otelo Rizzo e Mozart de Andrade, é igual a:

(A) 56 m

(B) 60 m

(C) 76 m

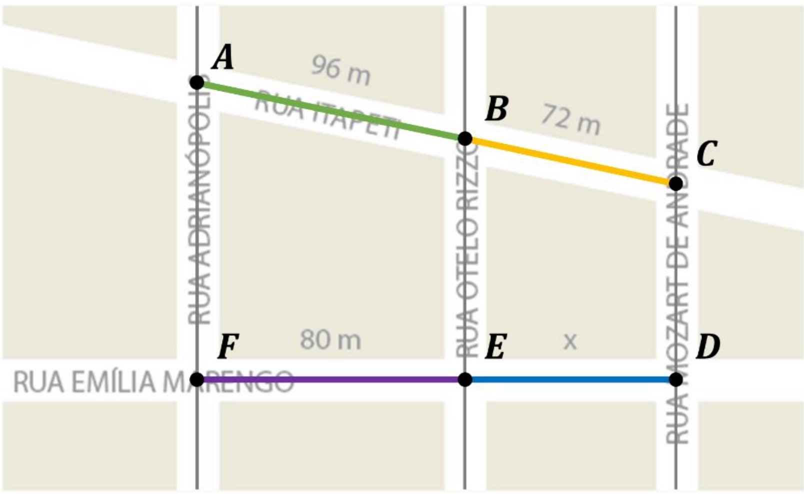
(D) 86 m

(E) 104 m

Comentários e Recomendações Pedagógicas

Essa atividade requer que o estudante calcule o comprimento de uma quadra de rua, dadas algumas relações geométricas entre outras ruas próximas. Nessa questão está envolvida a habilidade de aplicar o Teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade em diferentes contextos e resolver problemas envolvendo proporcionalidade direta ou inversa.

Para resolver a situação proposta, o estudante precisa perceber que, dado que as ruas Adrianópolis, Otelo Rizzo e Mozart de Andrade são paralelas, de acordo com o Teorema de Tales, elas determinarão sobre as ruas transversais (Itapeti e Emília Marengo) diferentes conjuntos de segmentos de reta que serão sempre proporcionais entre si dois a dois. A figura a seguir apresenta esses segmentos sobrepostos à ilustração do enunciado:



Algumas das relações previstas pelo Teorema de Tales, que podem ser utilizadas pelo estudante em seu desenvolvimento, são apresentadas:

Relação 1:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{FE}{ED}$$

$$\frac{96}{72} = \frac{80}{x}$$

$$96x = 5760$$

$$\therefore x = \frac{5760}{96} = 60$$

Relação 2:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{FD}{FE}$$

$$\frac{(96 + 72)}{96} = \frac{(80 + x)}{80}$$

$$7680 + 96x = 13440$$

$$96x = 5760$$

$$\therefore x = \frac{5760}{96} = 60$$

Relação 3:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{FD}{ED} ou \frac{AC}{FD} = \frac{BC}{ED}$$

$$\frac{(96 + 72)}{72} = \frac{(80 + x)}{x}$$

$$168x = 5760 + 72x$$

$$96x = 5760$$

$$\therefore x = \frac{5760}{96} = 60$$

Em todos os casos apresentados, a resolução adequada da situação aponta que o valor de x equivale a 60 m, conforme representado na alternativa **B**, que responde corretamente à questão.

Alguns estudantes podem desenvolver o problema por meio de uma razão que não é prevista pelo Teorema de Tales, porque não representa a proporção entre segmentos correspondentes. Esses estudantes possivelmente chegam a reconhecer que precisam empregar os conceitos desse teorema no seu desenvolvimento, mas têm dificuldades em fazê-lo. É o caso daqueles que assinalam a alternativa D (86 m), que equivale ao valor aproximado de x encontrado utilizando a seguinte relação inválida:

$$\frac{BC}{ED} = \frac{AB}{FE}$$

$$\frac{x}{72} = \frac{96}{80}$$

$$x = 86{,}4 \cong 86$$

Já os estudantes que optam pela alternativa C (76 m) sinalizam não ter identificado que se trata de uma situação-problema que requer a aplicação do Teorema de Tales, mas pelo menos chegam a propor um desenvolvimento que emprega uma operação de divisão, procurando, erroneamente, determinar o valor de x utilizando a média aritmética entre dois dos valores fornecidos:

$$x = \frac{(72 + 80)}{2} = 76$$

Por fim, ao escolher as alternativas A (56 m) ou E (104 m), os estudantes sinalizam ignorar que o desenvolvimento do problema se dará por meio do teorema em questão, que envolve equivalência entre **razões (divisões)** de segmentos em polígonos semelhantes, utilizando, ao invés de operações do campo multiplicativo, operações de soma ou subtração dos valores fornecidos:

$$(96 + x) = (72 + 80)$$

$$x = 72 - 96 + 80 = 56$$

$$(72 + x) = (96 + 80)$$

$$x = 96 - 72 + 80 = 104$$

O professor deve atentar para grupos de estudantes que sinalizem dificuldades com essa questão. Ao perceber isso, recomenda-se o trabalho da sequência didática de **Proporcionalidade**[22], durante o período letivo e dentro das possibilidades do planejamento. Uma maneira interessante de realizar esse trabalho é empregando Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem baseada em Problemas. Para empregar essa abordagem, o professor percorrerá

[22] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F1%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FProporcionalidade%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

a sequência didática junto com os estudantes, apresentando as situações-problema a cada atividade e problematizando suas soluções, construindo junto com a sala de aula as metodologias para resolução e estimulando que os estudantes debatam entre si os possíveis algoritmos. As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Identificar situações que envolvem proporcionalidade direta, inversa ou não proporcionalidade.

- Resolver problemas envolvendo proporcionalidade direta ou inversa.

- Aplicar o Teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade em diferentes contextos.

As referências a seguir podem suportar a realização dessas atividades:

- Semelhança entre Figuras e Polígonos – OBMEP. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=H70ftiaKCmM>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Teorema de Tales - Parte I – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/dsvqlq1lrux4.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Teorema de Tales - Parte II – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/a3zlqf5kcp3.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

Habilidade
Identificar a expressão algébrica que representa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.

Questão 11

Observe a sequência numérica abaixo.

2	5	10	17	26	...	n

Qual é a expressão que representa o número que ocupa a posição n da sequência numérica?

(A) $2n + 1$

(B) $3n - 1$

(C) $\mathbf{n^2 + 1}$

(D) $3n^2 - n$

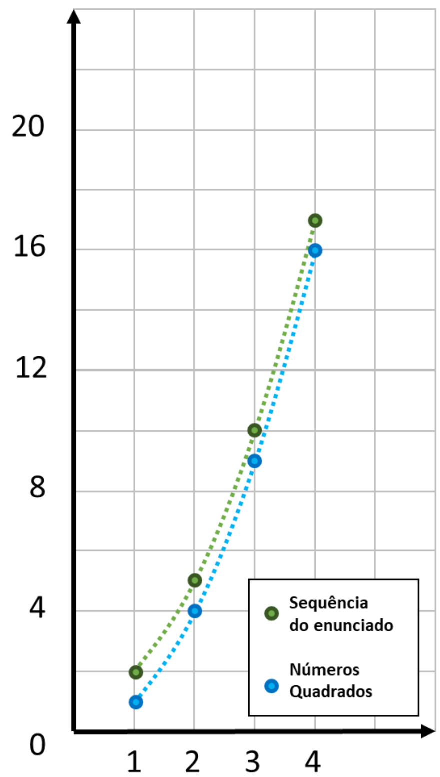
(E) $2n^2 - 3$

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A atividade apresentada requer que o estudante defina a expressão numérica que fornece um determinado número em função da sua posição na sequência. Essa questão se enquadra na habilidade de identificar a expressão algébrica que representa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.

Para responder à questão, o estudante deverá perceber as seguintes relações na sequência apresentada:

1. A sequência é sempre crescente. Ou seja, posições maiores implicam em números maiores.
2. Além da sequência ser crescente, a taxa de crescimento (ou seja, a variação entre os números) não é constante. Com efeito, quanto maior a posição considerada, maior é a variação entre o número que ocupa essa posição e seu antecessor.
3. Se for considerada a sequência dos números quadrados, que apresenta as mesmas propriedades dessa sequência, é possível perceber que os termos correspondentes em ambas as sequências estão sempre defasados de uma unidade, sendo sempre superiores na sequência do enunciado. Isso pode ser percebido no seguinte gráfico (que os estudantes podem possivelmente esboçar durante a construção do raciocínio):



Portanto, a sequência que responde corretamente à questão é uma sequência crescente, na qual todas as posições são sempre uma unidade superiores à sequência dos números quadrados (n^2). Portanto, à luz dessas considerações, a expressão adequada para sua representação é $n^2 + 1$, correspondente à alternativa **C** e para a qual os dados fornecidos são iguais aos resultados previstos:

Posição	1	2	3	4	5
Informação fornecida	2	5	10	17	26
Resultado da expressão	2	5	10	17	26

Verifica-se que os estudantes que escolhem as alternativas A ($2n + 1$) ou B ($3n - 1$) possivelmente não percebem o que foi exposto na proposição 2 do desenvolvimento, que é o fato da taxa de crescimento da sequência fornecida ser variável. Por conta de desobedecer a essa tendência, observa-se a seguir que as expressões exibidas nessas alternativas não reproduzem a sequência:

A) $2n + 1$

Posição	1	2	3	4	5
Informação fornecida	2	5	10	17	26
Resultado da expressão	3	5	7	9	11

Portanto, a expressão $2n + 1$ não representa os dados fornecidos.

B) $3n - 1$

Posição	1	2	3	4	5
Informação fornecida	2	5	10	17	26
Resultado da expressão	2	5	8	11	14

Portanto, a expressão $3n - 1$ não representa os dados fornecidos.

Os estudantes que escolhem a alternativa D ($3n^2 - n$) chegam a perceber que a taxa de variação da sequência não é constante; contudo, não identificam o que foi afirmado na segunda parte da proposição 3 sobre a defasagem constante entre a sequência-problema e a sequência dos números quadrados, escolhendo uma expressão que forneceria uma defasagem variável. Para fins ilustrativos, é exibido o quadro de posições da expressão sugerida nessa alternativa:

D) $3n^2 - n$

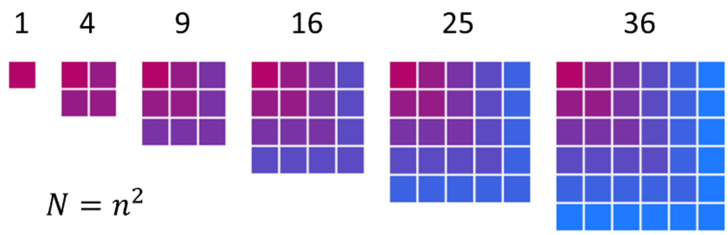
Posição	1	2	3	4	5
Informação fornecida	2	5	10	17	26
Resultado da expressão	2	10	24	44	70

Por fim, os estudantes que escolhem a alternativa E ($2n^2 - 3$) chegam a perceber corretamente que se trata de uma sequência de formato correspondente aos números quadrados, mas escolhem o valor incorreto para a defasagem constante em relação a essa referência. A seguir, novamente para fins ilustrativos, uma tabela com a correspondência das posições:

E) $2n^2 - 3$

Posição	1	2	3	4	5
Informação fornecida	2	5	10	17	26
Resultado da expressão	-1	5	15	29	47

Uma maneira simples e interessante de trabalhar esse tipo de problema em sala de aula é utilizando como exemplos os chamados Números Poligonais, nos quais o incremento corresponde à adição de uma camada de pontos que reproduz a forma do polígono original. Por exemplo, os seis primeiros números quadrados são os seguintes:



Ao perceber que algum grupo de estudantes sinalizou dificuldade nessa questão, o professor pode (durante o período letivo e conforme surgir oportunidade) trabalhar a sequência didática de **Generalização de Padrões**[23] do 9º ano do

[23] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FGeneraliza%C3%A7%C3%A3o%20de%20padr%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

Ensino Fundamental[24]. Nesse caso, será interessante propor atividades que empreguem Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Ao adotar essa abordagem, dividirá os estudantes em equipes (aproximando aqueles com níveis de conhecimento similares) e oferecerá atividades para que realizem em conjunto, discutindo suas respostas, construindo colaborativamente suas resoluções, apresentando posteriormente seus resultados e debatendo com a classe suas conclusões.

As habilidades contempladas pela sequência didática em questão são:

- Resolver problemas geométricos aplicando a generalização de padrões.
- Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras.
- Relacionar uma expressão matemática a uma expressão na língua materna e vice-versa.
- Identificar o sistema de equações lineares que resolve um problema.
- Realizar generalizações utilizando linguagem escrita e expressões matemáticas que envolvem o uso de letras e resolver a equação resultante.

Nas seguintes referências estão elencados alguns materiais que podem ajudar o professor a se capacitar para as atividades propostas:

- Plano de aula - Padrões em Sequências Numéricas. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/631/padroes-em-sequencias-numericas>. Acesso em: 22 nov. 2019.

- BORRALHO, A. Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. In: XIII CIAEM-IACME, 2011, Pernambuco, Brasil. **Anais**. Pernambuco: Comité Interamericano de Educación Matemática, 2011. Disponível em: <http://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1111/604>. Acesso em: 16 jan. 2020.

- BRANCO, N. C. V. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2008. 250 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1197/1/17737_ULFC086729_TM.pdf>. Acesso em: 23 dez. 2019.

Habilidade
Resolver problemas envolvendo proporcionalidade direta ou inversa.

[24] Nota do autor: Destaca-se a importância da utilização de uma sequência didática do 9º ano do Ensino Fundamental, dada a relevância da habilidade em questão, também presente na programação da 1ª série do Ensino Médio.

Questão 12

Quatro amigos vão alugar um apartamento para passar duas semanas de férias numa cidade praiana. O valor do aluguel será dividido igualmente entre eles. Cada um pagará R$ 175,00. No dia que sairiam em viagem Pedro resolveu ir junto com os quatro amigos. Refizeram as contas com o gasto do aluguel e saiu para cada um deles o valor de:

(A) R$ 35,00.

(B) R$ 70,00.

(C) R$ 140,00.

(D) R$ 150,00.

(E) R$ 218,00.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A questão apresentada requer que o estudante calcule o valor individual de um aluguel dividido em cinco pessoas a partir de seu valor quando é dividido por quatro pessoas, evocando a habilidade de resolver problemas envolvendo proporcionalidade direta ou inversa. Essa habilidade, no contexto da questão, é aplicada a uma situação real, envolvendo a relação entre custos individuais e número de pessoas que dividirão um valor fixo, grandezas que são inversamente proporcionais.

A evocação desse contexto é interessante porque ressalta o que foi observado por Zilma Lemos (2014):

> No estudo da proporcionalidade não devemos ignorar os conhecimentos que os alunos já trazem consigo. Deste modo, existe a necessidade de organização desse conhecimento, por meio de implantações de ações que venham a favorecer a construção de conceitos e aplicabilidade, tornando-se assim possível a formalização desses conteúdos com a aplicação dos mesmos dentro do contexto investigativo. (LEMOS, 2014, p. 6)[25]

Dessa maneira a questão desperta familiaridade no estudante, ao remeter a situações em que a habilidade em questão foi, ainda que subconscientemente, empregada em um problema do cotidiano.

[25] LEMOS, Z. C. **Proporcionalidade no ensino fundamental**: investigando para conceituar e aplicar. Paraná: Universidade de Londrina, 2014.

Seja v o novo valor a ser pago por cada amigo, e sabendo que o custo total do apartamento é igual nas duas hipóteses, é possível derivar a seguinte relação:

$$4 \cdot \text{R\$ } 175{,}00 = 5 \cdot v$$

$$v = \frac{4 \cdot \text{R\$ } 175{,}00}{5} = \text{R\$ } 140{,}00$$

Além disso, o estudante pode realizar o caminho sequencial indireto, em que calcula primeiro o custo total na primeira situação, com quatro amigos ($4 \cdot \text{R\$ } 175{,}00 = \text{R\$ } 700{,}00$) e, posteriormente, dividir esse valor por cinco para alcançar o mesmo resultado que no raciocínio direto, assinalando a alternativa **C**.

Os estudantes que assinalaram a alternativa E (R$ 218,00) confundem a relação de proporcionalidade (direta ao invés de inversa) entre custo por pessoa e número de pessoas, provavelmente incorrendo na seguinte relação:

$$\frac{4}{\text{R\$ } 175{,}00} = \frac{5}{v}$$

Já os estudantes que assinalam as alternativas A (R$ 35,00) e B (R$ 70,00) alcançam resultados duas e quatro vezes menores que o resultado adequado, seja por interpretar o enunciado incorretamente ou por empregar a informação "duas semanas" de maneira errônea, calculando, por exemplo, o que seria o custo por semana.

A alternativa D (R$ 150,00), por fim, é um resultado aproximado que pode ser atingido por estudantes que não constroem a relação de proporcionalidade, mas inferem que o valor deve ser ligeiramente inferior a R$ 175,00, escolhendo uma opção menor e mais próxima.

O professor deve sempre trabalhar o reconhecimento de relações de proporcionalidade como uma maneira de explorar correlações entre os fenômenos do cotidiano. Dessa maneira, ao perceber que um grupo de estudantes demonstrou dificuldade com essa questão, a sugestão é que o professor trabalhe, dentro do período letivo e das possibilidades do planejamento, a sequência didática de **Proporcionalidade**[26]. Há muitas formas diferentes de fazê-lo, mas será especialmente interessante realizar esse trabalho empregando Metodologias Ativas de ensino, como a Aprendizagem entre Pares ou Times. Ao adotar essa abordagem, dividirá os estudantes em equipes

[26] Disponível em: <https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F1%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FProporcionalidade%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1>. Acesso em: 07 jan. 2020.

(aproximando aqueles com níveis de conhecimento similares) e oferecerá atividades para que realizem em conjunto, discutindo suas respostas, construindo colaborativamente suas resoluções, apresentando posteriormente seus resultados e debatendo com a classe suas conclusões.

A sequência didática de Proporcionalidade envolve as habilidades:

- Identificar situações que envolvem proporcionalidade direta, inversa ou não proporcionalidade.

- Resolver problemas envolvendo proporcionalidade direta ou inversa.

- Aplicar o Teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade em diferentes contextos.

Além do trabalho já citado de Zilma Lemos (2014), o professor pode procurar inspiração nas referências a seguir para planejar suas atividades:

- Plano de aula - Proporcionalidade inversa. Disponível em: <https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1322/proporcionalidade-inversa>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Números Diretamente e Inversamente Proporcionais – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c89zmwon6cgks.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

- Propriedades de Proporções – OBMEP. Disponível em: <https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bqdfaxbu33cow.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2019.

Referências bibliográficas

BORCEUX, F. **An Axiomatic Approach to Geometry**. [s.l]: Springer International Publishing, 2014.

BORRALHO, A. Padrões e o desenvolvimento do pensamento algébrico. In: XIII CIAEM-IACME, 2011, Pernambuco, Brasil. **Anais**. Pernambuco: Comité Interamericano de Educación Matemática, 2011. Disponível em: <http://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1111/604>. Acesso em: 16 jan. 2020.

BRANCO, N. C. V. **O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico**. 2008. 250 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008. Disponível em: <https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/1197/1/17737_ULFC086729_TM.pdf>. Acesso em: 23 dez. 2019.

FERREIRA, L. S. **Como o teorema de Tales é apresentado em livros didáticos do nono ano.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Santa Cruz. Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Ilhéus: UESC, 2017. Disponível em: <https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=160110518>. Acesso em: 16 jan. 2020.

FIOREZE, L. A. **Atividades digitais e a construção dos conceitos de proporcionalidade: uma análise a partir da teoria dos campos conceituais.** Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Centro Interdisciplinar de Novas Tecnologias na Educação. Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação, 2010, Porto Alegre, BR-RS. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/19011>. Acesso em: 10 jan. 2020.

HEATH, T. L. **The Thirteen Books of Euclid's Elements, Books 1 and 2**. New York: Dover Publications, Inc, 1956.

JACOMELLI, K. Z. **A linguagem natural e a linguagem algébrica**: nos livros didáticos e em uma classe de 7ª série do ensino fundamental. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, Santa Catarina. 2006. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/88270/230927.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 22 dez. 2019.

LACZKOVICH, M. On Lambert's proof of the irrationality of π. **American Mathematical Monthly**, v. 104, n. 5, p. 439–443, 1997. JSTOR 2974737. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2974737>. Acesso em: 16 jan. 2020.

LAPAINE, M.; USERY, E. L. Choosing a Map Projection. In: **Lecture Notes in Geoinformation and Cartography**. Springer International Publishing, 2017, p. 262.

LEMOS, Z. C. **Proporcionalidade no ensino fundamental**: investigando para conceituar e aplicar. Paraná: Universidade de Londrina, 2014.

LORD, N. Maths bite: irrational powers of irrational numbers can be rational. **Mathematical Gazette**. 2008, v. 92, p. 534. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/mathematical-gazette/article/9275-maths-bite-irrational-powers-of-irrational-numbers-can-be-rational/D1AA21526A7095CF73064E0609127061>. Acesso em: 16 jan. 2020.

WEISSTEIN, E. W. **Directly Proportional**. MathWorld - A Wolfram Web Resource. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/DirectlyProportional.html>. Acesso em: 20 nov. 2019.

______________. **Inversely Proportional**. MathWorld - A Wolfram Web Resource. Disponível em: <http://mathworld.wolfram.com/InverselyProportional.html>. Acesso em: 20 nov. 2019.

Sites pesquisados:

https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F1%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FConjuntos%20Num%C3%A9ricos%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1. Acesso em: 07 jan. 2020.

http://mecflix.mec.gov.br/video/reconhecendo-racional-e-irracional-exemplo-expressoes. Acesso em: 20 nov. 2019.

http://www.ime.ufg.br/bienal/2006/mini/cristina.cerri.pdf. Acesso em: 20 nov. 2019.

http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/EnsMed/expensmat3_1_1.pdf. Acesso em: 20 nov. 2019.

https://novaescola.org.br/plano-de-aula/246/diferencas-entre-numeros-racionais-e-irracionais. Acesso em: 20 nov. 2019.

https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F1%C2%AA%20S%C3%89RIE%20EM%5FProporcionalidade%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20A%201%C2%AA%2C%202%C2%AA%20e%203%C2%AA%20S%C3%89RIES%20DO%20EM1. Acesso em: 07 jan. 2020.

https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1004/diferenciando-a-proporcionalidade-da-nao-proporcionalidade. Acesso em: 21 nov. 2019.

https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1586/situacoes-em-que-nao-ha-proporcionalidade. Acesso em: 21 nov. 2019.

https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1322/proporcionalidade-inversa. Acesso em: 21 nov. 2019.

https://novaescola.org.br/plano-de-aula/224/relacoes-de-proporcionalidade-em-situacoes-cotidianas. Acesso em: 21 nov. 2019.

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c89zmwon6cgks.pdf. Acesso em: 21 nov. 2019.

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/bqdfaxbu33cow.pdf. Acesso em: 21 nov. 2019.

http://mathworld.wolfram.com/DirectlyProportional.html. Acesso em: 20 nov. 2019.

http://mathworld.wolfram.com/InverselyProportional.html. Acesso em: 20 nov. 2019.

https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1386/proporcionalidade-direta. Acesso em: 22 nov. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/video/demonstracao-de-que-a-raiz-quadrada-de-2-e-um-numero-irracional. Acesso em: 20 nov. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/video/racionalizacao-de-denominadores. Acesso em: 20 nov. 2019.

http://www.ime.ufg.br/bienal/2006/mini/cristina.cerri.pdf. Acesso em: 20 nov. 2019.

https://novaescola.org.br/plano-de-aula/246/diferencas-entre-numeros-racionais-e-irracionais. Acesso em: 20 nov. 2019.

https://www.youtube.com/watch?v=H70ftiaKCmM. Acesso em: 21 nov. 2019.

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/dsvqlq1lrux4.pdf. Acesso em: 21 nov. 2019.

https://portaldosaber.obmep.org.br/uploads/material_teorico/a3zlqf5kcp3.pdf. Acesso em: 21 nov. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/busca?q=Semelhan%C3%A7a&p=1. Acesso em: 21 nov. 2019.

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaColecaoAula.html?id=489. Acesso em: 21 nov. 2019.

https://seesp.sharepoint.com/sites/intranet/coordenadorias/COPED/Planejamento2018/Forms/AllItems.aspx?id=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1%2FSD%5FMATEM%C3%81TICA%5F9%C2%BA%20ANO%5FGeneraliza%C3%A7%C3%A3o%20de%20padr%C3%B5es%2Epdf&parent=%2Fsites%2Fintranet%2Fcoordenadorias%2FCOPED%2FPlanejamento2018%2FMATERIAIS%20DE%20MATEM%C3%81TICA%20PARA%20O%209%C2%BA%20ANO%20EF1. Acesso em: 07 jan. 2020.

https://novaescola.org.br/plano-de-aula/631/padroes-em-sequencias-numericas. Acesso em: 22 nov. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/video/resolucao-de-sistemas-lineares-por-substituicao. Acesso em: 22 nov. 2019.

https://novaescola.org.br/plano-de-aula/1356/sistema-de-equacoes-lineares-ampliacao. Acesso em: 22 nov. 2019.

http://maps.google.com. Acesso em: 21 nov. 2019.

http://www.cthing.com/Meazure.asp. Acesso em: 21 nov. 2019.

http://mecflix.mec.gov.br/video/do-portugues-para-o-matematiques. Acesso em: 22 nov. 2019.

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

COORDENADORIAS

Coordenadoria Pedagógica - COPED
Coordenador: Caetano Pansani Siqueira

Coordenadoria de Informação, Tecnologia, Evidência e Matrícula - CMITE
Coordenador: Thiago Guimarães Cardoso

DEPARTAMENTOS

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão Pedagógica - DECEGEP
Diretor: Valéria Arcari Muhi

Centro dos Anos Finais do Ensino Fundamental - CEFAF
Diretora: Carolina dos Santos Batista Murauskas

Centro de Ensino Médio - CEM
Diretora: Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

Equipe Curricular COPED de Matemática – Leitura crítica e validação do material
Ilana Brawerman, João dos Santos Vitalino, Marcos José Traldi, Otávio Yoshio Yamanaka e Vanderley Aparecido Cornatione

Departamento de Avaliação Educacional - DAVED
Diretora: Patricia de Barros Monteiro
Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Planejamento e Análise de Avaliações - CEPAV

Ademilde Ferreira de Souza, Cristiane Dias Mirisola, Ilton Campos Cavalcanti, Juvenal de Gouveia, Márcia Soares de Araújo Feitosa, Soraia Calderoni Statonato, Sylvia Russiano Toledo Casari

Centro de Aplicação de Avaliações - CEAPA
Diretora: Isabelle Regina de Amorim Mesquita

Amanda Morais Cardoso, Denis Delgado dos Santos, José Guilherme Brauner Filho, Kamila Lopes Candido, Nilson Luiz da Costa Paes, Teresa Miyoko Souza Vilela

Departamento de Tecnologia de Sistemas
Diretor: Marcos Aparecido Barros de Lima

Centro de Planejamento e Integração de Sistemas
Diretora: Camila da Silva Alcazar
Viviana Fernandes dos Santos – Analista de Sistemas