SÃO PAULO
GOVERNO DO ESTADO
Secretaria de Educação

APRENDER SEMPRE

Material do Professor

Matemática

3ª SÉRIE
ENSINO MÉDIO

APRENDER SEMPRE • Material do Professor • 3ª série - Ensino Médio
Matemática

Governo do Estado de São Paulo

Governador
João Doria

Vice-Governador
Rodrigo Garcia

Secretário da Educação
Rossieli Soares da Silva

Secretário Executivo
Haroldo Corrêa Rocha

Chefe de Gabinete
Renilda Peres de Lima

Coordenador da Coordenadoria Pedagógica
Caetano Pansani Siqueira

Apresentação

A construção do **Aprender Sempre** foi motivada a partir do diagnóstico das aprendizagens dos estudantes da rede pública paulista, mensuradas pelas avaliações internas e externas do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, que mostram que muitos estudantes concluem essas etapas de ensino sem terem aprendido o que deveriam.

Nessa perspectiva, ele foi pensado com a finalidade de priorizar o trabalho com as habilidades de Língua Portuguesa e de Matemática, consideradas essenciais para o percurso educacional dos estudantes ao término dos Ensinos Fundamental e Médio.

Esse material destina-se a estudantes do 9º Ano do Ensino Fundamental e da 3ª Série do Ensino Médio e está alicerçado nas habilidades que, por diferentes circunstâncias ocorridas no percurso escolar, ainda se encontram em desenvolvimento e necessitam de apoio pedagógico para que as aprendizagens essenciais sejam asseguradas.

Sob essa concepção, ressalta-se a necessidade de fortalecer, em nossos estudantes, a confiança na capacidade de aprender, com o objetivo de que consolidem, com sucesso, o processo de escolarização.

O **Aprender Sempre** oferece ao docente sequências de atividades com metodologias pensadas para a sala de aula. Esse material, utilizado a partir das experiências pedagógicas dos professores, pretende contribuir para que as aprendizagens de todos os estudantes sejam asseguradas, de acordo com suas necessidades específicas.

Bom trabalho a todos!

Coordenadoria Pedagógica - COPED

ORIENTAÇÕES DE USO DAS SEQUÊNCIAS DE ATIVIDADES MATEMÁTICA

Caro Professor,

Os pressupostos que apoiam a elaboração das atividades que compõem as sequências foram as possibilidades de evolução do pensamento e linguagem matemáticos, focando em alguns conhecimentos matemáticos específicos, que embasarão aprendizagens cada vez mais amplas e inter-relacionadas.

Nas situações propostas os estudantes são incentivados a refletir, de modo a propiciar condições de processos potentes de aprendizagem. No entanto, cabe ressaltar a insubstituível ação do professor em sala de aula para tornar o proposto em experiências reais de vivência pelos alunos. A aprendizagem do aluno se concretiza a partir da intervenção do professor no cotidiano da sala de aula.

Nesta ação de Recuperação e Reforço em Matemática a proposição de sequências se dá numa perspectiva da construção dos saberes matemáticos através de atividades encadeadas, organizadas com objetivos bem definidos que contribuirão para que os estudantes construam seu conhecimento.

Vale ressaltar que as atividades propostas podem ser antecedidas e/ou complementadas por outras atividades que estruturam as sugeridas nessa ação de recuperação - apoio a aprendizagem.

A definição clara dos objetivos é ponto de relevância para todos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, particularmente para o professor e alunos. A apresentação aos alunos das aprendizagens a serem construídas por eles em cada uma das sequências de atividades é condição necessária para que possam reconhecer suas dificuldades específicas. E, para você professor, a listagem clara das aprendizagens a serem adquiridas com as atividades propostas corresponde à sua pauta de observação para avaliar as dificuldades e progressos dos alunos, servindo de apoio às suas intervenções e questões para entender como o aluno está pensando. Desse modo, em cada uma das sequências será apresentada a habilidade correspondente e as aprendizagens a serem adquiridas.

Nesse movimento cabe ao professor solicitar explicações e/ou justificativas sobre as produções dos alunos, questionar sobre o que estão entendendo do solicitado, fornecer informações e indicar possíveis caminhos e/ou outros referenciais de pesquisa para suporte ao trabalho.

SUMÁRIO

Matemática

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 1

CONJUNTOS NUMÉRICOS (6 aulas)

As atividades propostas nesta sequência contribuem para o desenvolvimento da habilidade: Identificar a localização de números reais na reta numérica. Essa habilidade se apoia nas seguintes aprendizagens:

- identificação das relações entre os conjuntos numéricos **N, Z, Q, R.**
- estabelecimento das equivalências entre representações fracionárias e entre elas e as decimais.
- identificação das características de um número racional e as de um número irracional, para diferenciá-los.
- localização de números racionais na reta.

Professor proponha que os alunos discutam em duplas ou quartetos as propostas, estimule-os a escrever as observações que fazem sobre as figuras e os números. É preciso que eles verbalizem as semelhanças e diferenças que percebem. Questione-os sobre a possibilidade de aumentar a reta numérica infinitamente.

Saber classificar os números com os quais temos de trabalhar nas mais diversas situações, tanto escolares como as de fora da escola, nos ajuda a termos mais sucesso nas soluções e maior economia de trabalho. Descubra os números!

1.1 ATIVIDADE 1 REVENDO BONS COMPANHEIROS (1 aula)

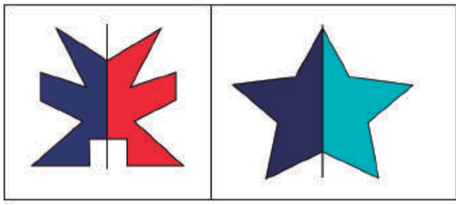
Você pode até ter algumas coisas contra os números, mas também já deve ter percebido que sem eles não dá para ficar. Em todo momento eles se fazem presente, então vamos tentar olhá-los de um modo diferente e fazer algumas descobertas sobre eles.

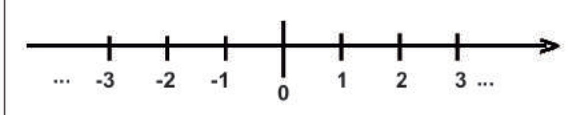
a) O conjunto dos Números Naturais (N) você conhece desde pequenininho. O conjunto dos Números Inteiros (Z) é uma ampliação dele e, esta ampliação veio com algumas novidades. Quais diferenças você reconhece entre os números naturais e os números inteiros quanto ao:

- “tipo” do número? Espera-se que o aluno comente a presença dos números negativos.

- modo de fazer cálculos com eles? Espera-se que o aluno aponte modificações causadas pelos números negativos.

b) Você sabia que a ampliação do N para o Z trouxe a ideia de números simétricos? Agora você deve estar pensando: *nossa!! Piorou!!!* Calma aí! Isso é simples e ajuda muito. Observe as figuras abaixo.





A partir de sua observação responda:

Qual é o simétrico de 2? –2 E de –1? 1. E de 23? –23

Qual é o simétrico do simétrico de –15? 15. E de – 20? 20

Qual é o simétrico do simétrico do simétrico de – 2018? 2018
Com esta ideia o sinal "-" passou a ser lido também como simétrico. O número - 2 pode ser lido como o simétrico de 2, o número – (– 2) pode ser lido como o simétrico do simétrico de 2. Pensando assim, determine de qual número estamos falando quando escrevemos:

– (– 17) = 17 – [– (– 5)] = -5 – (– 9) = 9

1.2 ATIVIDADE 2 UMA AMPLIAÇÃO PRÁ LÁ DE GRANDE! (2 aulas)

O conjunto dos Números Inteiros (**Z**) também foi ampliado e novos números com diferentes representações começaram a fazer parte de sua vida. Você conheceu o conjunto dos Números Racionais (**Q**).
a) Quais diferenças você reconhece entre os números inteiros e os números racionais quanto ao:

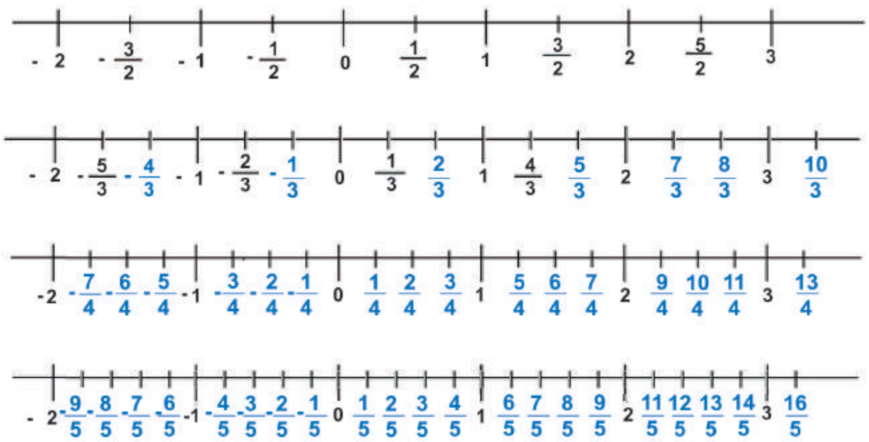
- "tipo" do número? Espera-se que o aluno se refira às frações e aos números decimais
- modo de fazer cálculos com eles? Espera-se que o aluno comente as diferenças nos cálculos com frações.

b) Ao estudar esses novos números você tem a possibilidade de imaginar o quão próximos dois números podem estar e, mesmo assim, ainda ser possível pensar em outro entre eles. Isso foi possível quando se pensou em dividir inteiros.

- Quando falamos em dividir inteiros, qual tipo de número você já imagina? Espera-se que o aluno se refira às frações
- Um número inteiro pode ser escrito nesta forma que você imagina para representar divisões em partes iguais? Sim

Justifique sua resposta. Espera-se que o aluno reconheça a possibilidade de um número inteiro ser representado na forma fracionária.
Professor, aproveite as discussões para pedir exemplos dessas possibilidades. Questione-os também sobre a representação decimal.

c) Observe as retas abaixo e complete com as representações fracionárias que faltam.



- Complete com > (maior), = (igual) ou < (menor) a partir do que observou nas retas acima.

$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$ $\qquad$ $-\frac{5}{4} < -\frac{4}{5}$ $\qquad$ $\frac{9}{3} = \frac{15}{5}$ $\qquad$ $\frac{13}{6} < \frac{11}{5}$ $\qquad$ $-\frac{14}{3} > -\frac{19}{4}$

- Ainda observando as retas, complete com frações que tornem as sentenças verdadeiras:

Respostas pessoais

----- < ----- $\qquad$ ----- > ----- $\qquad$ ----- = ----- $\qquad$ ----- > ----- $\qquad$ ----- < -----

d) Outro aspecto que a ampliação para os números racionais colocou em evidência foi o emprego das infinitas representações que todo número possui. Dentre elas algumas são mais usadas e precisamos ser capazes de as reconhecer rapidamente, principalmente as representações fracionárias e decimais equivalentes.

- Observe as conversões feitas entre duas representações de números racionais.

Quadro 1	Quadro 2	Quadro 3
$\frac{2}{10} = 0{,}2$	$\frac{45}{10} = 4{,}5$	$\frac{70}{10} = 7{,}0 = 7$
$\frac{2}{100} = 0{,}02$	$\frac{45}{100} = 0{,}45$	$\frac{70}{100} = 0{,}70 = 0{,}7$
$\frac{2}{1000} = 0{,}002$	$\frac{45}{1000} = 0{,}045$	$\frac{70}{1000} = 0{,}070 = 0{,}07$

Professor, oriente os alunos a observarem o que se mantém e o que muda em cada um dos quadros e que se perguntem “o que será que está acontecendo?”

• Escreva o que descobriu observando o Quadro 1.

• Espera-se que os alunos identifiquem a relação entre o número de ordens decimais na escrita decimal e o número de zeros no denominador da fração. Essa relação deve ser depois ressaltada por você como a mudança para ordens decimais no quadro de ordens e classes.

• Observando o Quadro 2, complete as conversões:

$\frac{74}{10}$ = 7,4	$\frac{15}{10}$ = 1,5	$\frac{69}{10}$ = 6,9
$\frac{74}{100}$ = 0,74	$\frac{15}{100}$ = 0,15	$\frac{69}{100}$ = 0,69
$\frac{74}{1000}$ = 0,074	$\frac{15}{1000}$ = 0,015	$\frac{69}{1000}$ = 0,069

• Observando o Quadro 3, faça as conversões da representação decimal para a fracionária.

• $9{,}0 = \frac{90}{10} = 9$	$0{,}6 = \frac{6}{10}$	$0{,}001 = \frac{1}{1000}$
• $20 = \frac{20}{1} = \frac{200}{10}$	$0{,}036 = \frac{36}{1000}$	$0{,}252 = \frac{252}{1000}$

1.3. ATIVIDADE 3 EM BUSCA DA EQUIVALENTE (2 aulas)

E se a fração não tiver denominador 10, 100, 1000? É preciso escrever uma equivalente a ela que tenha um desses denominadores!

Escrever uma fração equivalente a outra significa representar o mesmo número de

com outra fração.

Existem infinitas frações equivalentes a uma fração dada.

Por exemplo: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = \frac{6}{12} = \frac{7}{14} = \frac{8}{16} = \ldots$

Observe que a fração assinalada é uma fração decimal equivalente a $\frac{1}{2}$.

a) Encontrar frações equivalentes a cada uma das frações dadas.

b) $\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} = \frac{6}{24}$ ...

c) $-\frac{3}{5} = -\frac{6}{10} = -\frac{9}{15} = -\frac{12}{20} = -\frac{15}{25} = -\frac{18}{30}$ ...

d) $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18}$

Dentre as frações acima só uma não tem fração decimal equivalente a ela. Que fração é essa? $\frac{2}{3}$. Por que não é possível escrever a fração decimal equivalente a ela? Espera-se que o aluno reconheça que 3 não possui múltiplos como 10, 100, 1.000 etc. Amplie esta discussão com outros denominadores pares e ímpares.

b) Dê outros exemplos de frações que não possuem frações decimais equivalentes a elas.

Os alunos poderão apresentar outras frações com denominador 3, mas poderão surgir também as de denominador 7, 9, 11 etc.

Uma fração que não possui fração decimal equivalente a ela é chamada de fração geratriz de uma dízima periódica.

c) Para entender o que é uma dízima periódica observe exemplos de cálculo feito com frações geratrizes.

4	3	34	11	49	6
10	1,3333...	100	3,09090909...	40	8,1666...
10		100		40	
10		100		40	
10		100		40	
1		1		4	

• O que você observa sobre o resultado dessas divisões? Espera-se que os alunos falem da repetição de algarismos no quociente e na repetição dos restos.

O que causa esse resultado? Sobrar sempre o mesmo resto, o que torna a divisão infinita.

6 - Matemática - EM - 3ª Série.indd 9 18/07/2019 17:02:20

Todos esses números fazem parte do conjunto dos Números Racionais **(Q),** pois tanto os decimais como as dízimas periódicas podem ser representados na forma a/b, sendo que a e b são números inteiros e b ≠ 0.

Sugira que, com uma calculadora busquem outras frações geratrizes.

1.4.ATIVIDADE 4 AINDA EXISTEM NÚMEROS PARA OUTRA AMPLIAÇÃO (1 aula)

Se você achou que a infinidade de números racionais tinha dado conta do recado, enganou-se. Desde antes de Cristo os estudiosos de matemática já conheciam números que não se encaixam nas características dos racionais. Dois desses números são muito famosos e você deve conhecê-los.

Esses números são $\sqrt{2}$ e π.

a) Veja uma representação de cada um deles:

$\sqrt{2} \cong 1,41421356237309504880...$

$\pi \cong 3,14159\ 26535\ 89793...$

• No que eles se diferenciam de uma dízima periódica? Espera-se que o aluno perceba a falta de período no desenvolvimento dos números. Proponha que escrevam números que não apresentem período em sua representação decimal para reconhecerem a infinidade de números irracionais que constituem os números reais.

Com esta característica eles não se encaixam no conjunto dos números racionais, então eles são chamados de Números Irracionais. Os números irracionais junto com os racionais formam o conjunto dos Números Reais.

d) Para testar se está craque em reconhecer cada tipo de número, circule os números naturais, faça um quadrado em torno dos inteiros, um triângulo em torno dos racionais.

2018   - 2,99999...   - 345

$\frac{\pi}{2}$ $\frac{6}{2}$ $\frac{-2}{3}$

7.453 $\sqrt{16}$ 3,0007 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\frac{231}{125}$ π

0   1,010010001...   0,3333...

Como podemos chamar todos os números desse quadro? Números Reais

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 2

OS NÚMEROS REAIS E A RETA NUMÉRICA (5 aulas)

2.1 ATIVIDADE 1 UM POUCO MAIS SOBRE OS NÚMEROS IRRACIONAIS (1 aula)

Você já estudou que os números irracionais são aqueles que não podem ser obtidos pela divisão de dois números inteiros. Você pode estar pensando, *então não deve existir muitos números desse tipo!* Mas, você está enganado, existem infinitos números irracionais. Só para ter uma ideia, entre dois números racionais, por mais próximos que eles sejam, sempre existirá um número irracional entre eles.

a) A representação na forma decimal dos números irracionais ainda causa algumas discussões entre os matemáticos. Mas, por enquanto, vamos considerar que eles podem ser reconhecidos pela observação cuidadosa de sua representação na forma decimal. Separe os números do quadro abaixo em racionais e irracionais.

123,4567
- 0,353535...
1,73205080756...
1,32101010100....
18,4321
- 0,5355355535
7,433333....
2,2223222322...

Racionais: -0,353535...; 123,4567; 1,32101010...; 18,4321; 7,433333...; 2,2223222322...
Irracionais: 1,73205080756...; -0,5355355535...
b) Usando uma calculadora, divida dois números inteiros quaisquer e escreva o resultado obtido.
A resposta é pessoal, esta é apenas um exemplo.

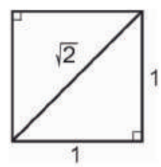
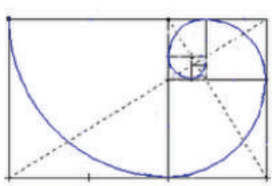
$$\frac{156}{90} = 1,7333333$$

Você sabe dizer se este resultado é formado apenas pelos algarismos que couberam no visor da máquina ou se essa representação deve ter as reticências (...) no final? O que pode ser uma boa dica para essa tomada de decisão? A repetição constante de um ou mais dígitos na parte decimal da representação numérica, indicando uma regularidade na escrita. Multiplicar o resultado pelo divisor e conferir se obtém o dividendo. Estimule os alunos a expressarem suas hipóteses e as testarem com a calculadora. Peça que repitam com outros números de modo a chegarem a conclusões sobre as dízimas periódicas e reconhecê-las como números racionais.

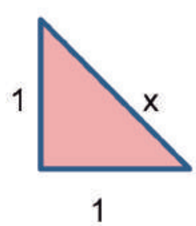
2.2 ATIVIDADE 2 NÚMEROS IRRACIONAIS, ESTÃO PRESENTES NO MUNDO? (2 aulas)

a) Faça uma busca na internet para verificar que eles estão mais presentes do que você imagina. Liste abaixo algumas de suas descobertas.

Espera-se que os alunos descubram a presença deles na natureza, nas obras de arte, na arquitetura, etc. Alguns exemplos de suporte a você professor(a):

	$\sqrt{2}$ – Hipaso de Metaponto, filósofo pré-socrático da escola de Pitágoras apontou a existência de um número que obedecesse ao teorema de Pitágoras, contrariando o ideário da época que todos os números eram inteiros.
π	O mais famoso número irracional. O pi está presente em todos os cálculos que envolvam círculos.
e	O valor 2,7182818284590452353602874... é uma aproximação desse número que é utilizado em várias áreas de conhecimento como Economia, Biologia, Estatística, Engenharia, etc. Número de Euler, foi descoberto por John Napier, sendo definido pela expressão: $e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$
	Número de ouro Fi = 1.61803399... Também conhecido como razão áurea. Comum em aplicações arquitetônicas gregas e romanas. Aponta-se que o quadro “Mona Lisa” de Leonardo da Vinci e o desenho “O homem de Vitruvio” utilizam a razão áurea na sua concepção. Uma das formas de cálculo do número de ouro é a que utiliza a sequência de Fibonacci. Obtém-se pela expressão: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Propor%C3%A7%C3%A3o_%C3%A1urea)

b) O $\sqrt{2}$ é famoso porque foi o primeiro irracional a ser “encontrado”. Encontre-o também, para isso basta calcular a hipotenusa deste triângulo retângulo isósceles.



c) Busque na internet algumas informações e curiosidades sobre o número π.

Os alunos poderão trazer da história da matemática como ele foi obtido por Arquimedes. Há muitas referências interessantes.

Proponha que em uma aula pesquisem e organizem uma apresentação de suas descobertas para a aula seguinte.

2.3 ATIVIDADE 3 LOCALIZANDO UM NÚMERO IRRACIONAL NA RETA (2 aulas)

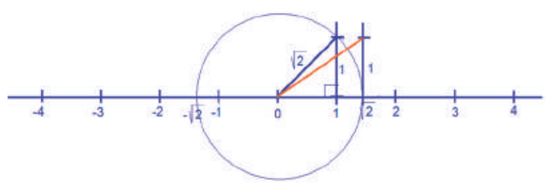
a) Mesmo descobrindo que os números irracionais estão presentes no mundo a nossa volta, fica uma pergunta: *Ao medir um segmento que representa usando qualquer instrumento de medida que conhecemos, vamos encontrar seu verdadeiro valor?* Não

Justifique sua resposta. Estamos trabalhando sempre com uma aproximação do número irracional.

Professor(a) discuta com a classe que nas representações que usamos e nas medidas que fazemos sempre haverá imprecisão e temos necessidade de fazermos aproximações, no entanto essas aproximações precisam ser muito cuidadosas, principalmente ao se considerar a construção de edifícios e pontes, por exemplo.

b) Aproximações são necessárias! Porém podemos tratar com boas aproximações. Utilizando o fato de que as representações geométricas de alguns números reais são simples de serem construídas, vamos utilizá-las na reta numérica.

Utilizando régua e compasso faça a seguinte construção:

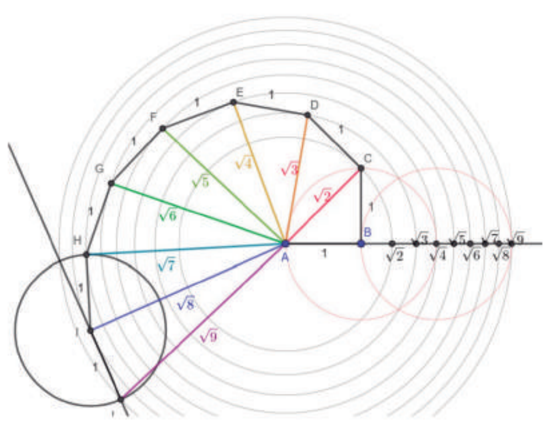


• Qual a medida da hipotenusa do triângulo cujos catetos medem $\sqrt{2}$ e 1? $\sqrt{3}$ = 1,7320508075688... . Marque essa medida na reta.

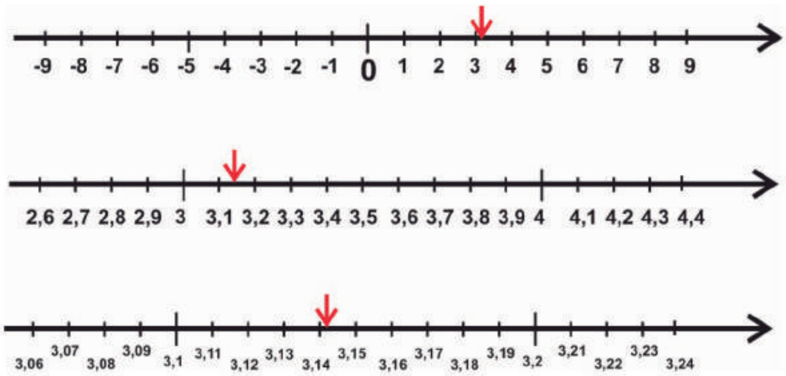
• Considerando este novo ponto marcado na reta, repita o processo de construção para obter a hipotenusa do novo triângulo retângulo. Qual a medida da hipotenusa desse novo triângulo? $\sqrt{4}$ = 2. Marque essa medida na reta. Se sua construção ficou boa, essa medida deve estar sobre o número 2 ou muito próxima dele.

• Pensando nos valores aproximados dos números irracionais que marcou na reta, você considera que as posições desses números estão adequadas? SIM Justifique sua resposta.

A imprecisão da marcação dos pontos decorre dos instrumentos utilizados com régua ou compasso. Se desenhássemos com o Geogebra, por exemplo, a precisão seria muito melhor, mas, mesmo assim imprecisa.



c) Pensando em uma boa aproximação para a localização de um número irracional na reta, indique a posição para π em cada uma das representações abaixo.



Sugestões para consulta

• OBMEP-Problema para ajudar na escola: Irracionais
Texto de apoio a trabalho em sala de aula com Números Irracionais;

• SBM-PARA QUE SERVEM OS NÚMEROS IRRACIONAIS?, Texto de Graziele Souza Mózer e Humberto José Bortolossi.
Texto para leitura;

• Nova Escola-Plano de aula - Jogo da reta numerada e números irracionais
Plano de aula sobre números irracionais;

• Nova Escola-Plano de aula - Jogando com números reais
Plano de aula bastante abrangente sobre números reais com abordagem também para os números irracionais;

• KA – Números Irracionais
Diversos vídeos e exercícios sobre números irracionais;

• MultiRio – Números Irracionais
Diversos vídeos sobre números irracionais;

• Números Irracionais - Análise de Livros Didáticos do EFII e EM, Bárbara Cristina Dâmaso de Jesus.
Dissertação sobre abordagens dadas aos números irracionais;

• Aplicações de números irracionais: um número famoso, outro instigante, Diego da Silva Serra
Artigo sobre números irracionais.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 3

PROPORCIONALIDADE E GEOMETRIA (5 aulas)

As atividades propostas nesta sequência contribuem para o desenvolvimento da habilidade: Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade. A aquisição dessa habilidade se apoia em aprendizagens como:

- desenvolvimento da visualização geométrica pela observação e análise do que se mantém e do que muda nas figuras geométricas proporcionais;
- reconhecimento de que a proporcionalidade entre duas figuras mantém a forma e a mudança nas medidas dos lados se dá pela manutenção de um padrão de regularidade e, por isso são chamadas de semelhantes.
- identificação de que o padrão de regularidade entre as medidas dos lados de figuras que mantêm proporcionalidade é chamado de razão de proporcionalidade.

A proporcionalidade está presente em muitas das situações com as quais nos deparamos diariamente, mas nem sempre nos damos conta de sua presença. Perceber se existe ou não proporcionalidade entre os elementos presentes naquilo que estamos envolvidos faz grande diferença, pois essa relação facilita muito a resolução de problemas nas várias atividades humanas.
Venha descobrir alguns truques que a proporcionalidade nos permite!

3.1 ATIVIDADE 1 APRENDENDO A RECONHECER A PROPORCIONALIDADE (1 aula)

Professor, forme grupos para que os alunos possam conversar sobre as propostas, incentive-os a descobrirem o que está sendo pedido e promova a discussão entre os diferentes grupos de modo que eles próprios possam validar suas descobertas. Só ao final apresente uma síntese das discussões.

Em alguns casos a proporcionalidade é identificada apenas com um olhar atento.
a) Observe as figuras abaixo e marque as que são proporcionais.

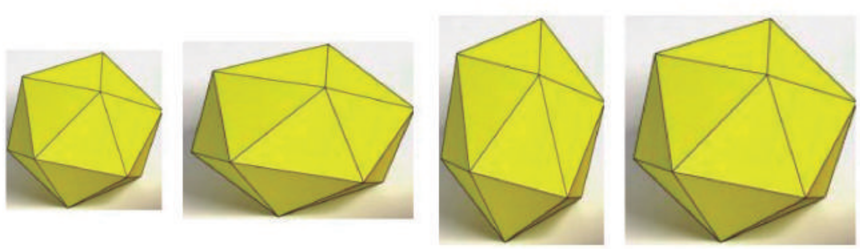
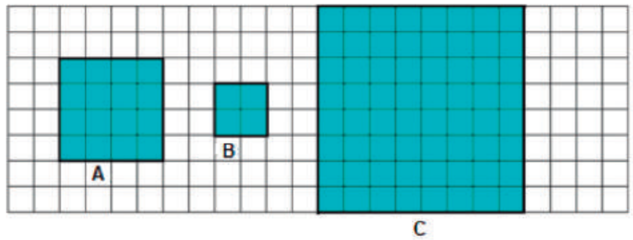


Fig 1 Fig 2 Fig 3 Fig 4

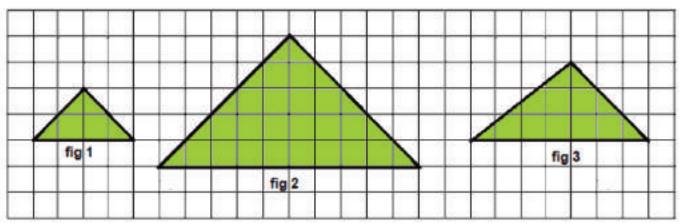
Qual característica observou entre as figuras que te levou a marcar aquelas que considerou serem proporcionais? Figura 4 – Mantém a proporção entre elementos que compõem a figura.
Professor: Espera-se que o aluno observe que esta figura não apresenta deformações em relação à Fig 1.

Analise as figuras abaixo e marque as que são proporcionais.



Qual característica observou entre as figuras que te levou a marcar aquelas que considerou serem proporcionais?Espera-se que, como agora não há a deformação da figura, eles observem as medidas dadas pelo quadriculado e indiquem que todas são proporcionais.

b) Continue observando figuras. Cuidado, não se deixe enganar pela aparência! Quais são proporcionais? Apenas fig 1 e fig 2



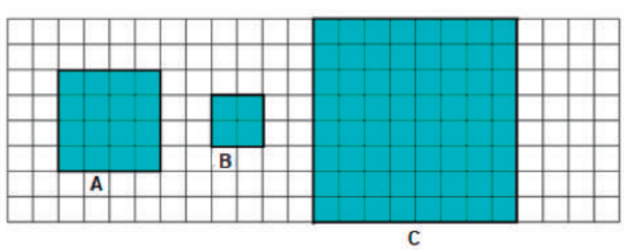
Qual característica observou entre as figuras que te levou a marcar aquelas que considerou serem proporcionais? Espera-se que os alunos reconheçam que na figura três um dos lados não mantém a proporcionalidade.

Professor estimule os alunos a discutirem suas observações e observe se estão colocando a questão da proporcionalidade, levando em conta as medidas dos lados e a manutenção da forma, garantida pela preservação da medida dos ângulos da figura. Verifique se chegam a observar que a mudança na medida do lado do triângulo afetou a medida do ângulo, que era de 45º, porque passa pela diagonal do quadrado e na fig 3 isso não ocorre com um deles.

3.2 ATIVIDADE 2 PROPORCIONALIDADE E RAZÃO – A DUPLA PERFEITA (3 aulas)

Na atividade anterior você fez algumas descobertas sobre a proporcionalidade, nesta você vai investigar o que a proporcionalidade tem a ver com as frações.

a) Observe novamente as figuras abaixo e complete.



• As figuras A e C são ampliações da figura B porque as medidas de seus lados são proporcionais às medidas dos lados da figura B e a forma foi mantida.
Na figura A as medidas dos lados correspondem ao dobro das medidas dos lados da figura B.
Um outro modo de dizer a mesma coisa é que a relação entre a figura A e a figura B é de 2:1 (leia *de dois para um*), isto é, a cada 2 quadradinhos que formam os lados da figura A correspondem a 1 quadradinho na figura B.

• Na figura C as medidas dos lados correspondem ao quádruplo das medidas dos lados da figura B. Então podemos escrever que a relação entre a figura C e a figura B é de 4:1, porque cada 4 quadradinhos da figura C corresponde a 1 da figura B.

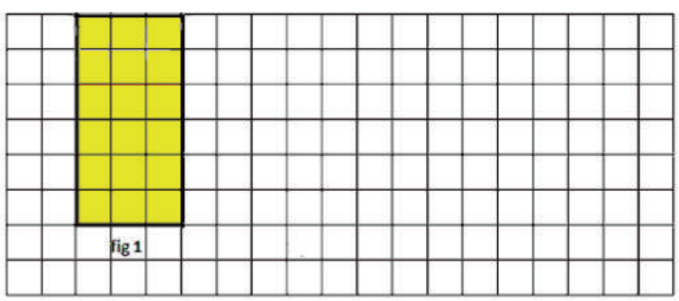
• Continuando a pensar do mesmo jeito, o que você pode afirmar sobre as medidas dos lados das figuras A e C? Espera-se que o aluno reconheça que a figura C também pode ser considerada uma ampliação da figura A na razão de 2 : 1.

• Se quisermos pensar que a figura B é uma redução da figura A, como escrever a relação entre elas? Espera-se que o aluno perceba a inversão da situação e, portanto, também a inversão da operação multiplicação para a divisão e a inversão da razão para 1 : 2.

As relações 2:1, 4:1, 1:2 que escrevemos para as figuras são chamadas de **razão de proporcionalidade** e também podem ser expressas na forma de fração

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{1}, \frac{1}{2}, ..., \frac{a}{b}, \text{ com } b \neq o$$

b) Na malha abaixo desenhe a figura 2, proporcional à figura 1, na razão de 1:3 e a figura 3, também proporcional à figura 1, na razão de 1:2.



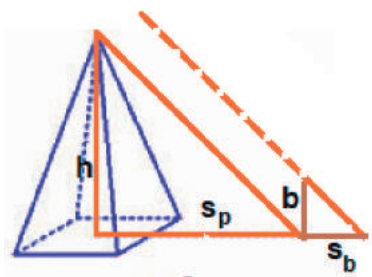
• Ao comparar a figura 2 com a figura 1, a razão de proporcionalidade entre as medidas dos lados é: $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

• Ao comparar a figura 3 com a figura 1, a razão de proporcionalidade é $\frac{1,5}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Chame a atenção dos alunos para a equivalência de frações que pode ser aplicada para as razões. Tal fato permite que possamos fazer a comparação entre as medidas dos lados e obter a razão de proporcionalidade pela simplificação da fração.

c) A observação da proporcionalidade de segmentos está presente na história da Matemática. Foi usando esse conhecimento que Tales de Mileto conseguiu medir a altura da Pirâmide de Quéops no Egito, imaginando os raios solares que provocam a sombra. Veja que ideia genial!

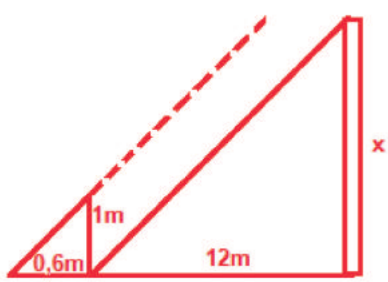
Ele colocou um bastão no limite da sombra lançada pela pirâmide, imaginando o raio de sol tangente aos dois triângulos, demonstrou que a relação entre a primeira sombra e a segunda era a mesma que entre a pirâmide e o bastão e que as medidas dos lados dos dois triângulos são proporcionais.



$$\frac{h}{b} = \frac{s_p}{s_b}$$

Disse o filósofo e matemático Michel Serres que *"medir o inacessível consiste em reproduzi-lo ou imitá-lo no acessível."*

• Use a ideia de Tales para resolver a seguinte questão: A sombra de um poste vertical, projetada pelo sol sobre um chão plano, mede 12 m. Nesse mesmo instante, a sombra, de um bastão vertical de 1 m de altura mede 0,6 m. Qual a altura do poste?



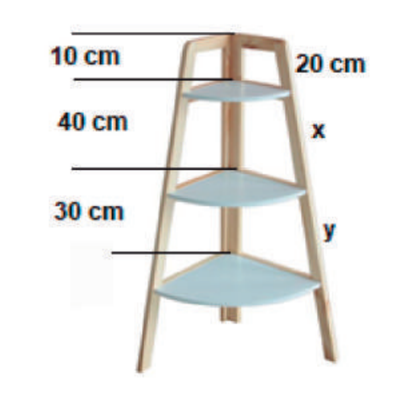
$$\frac{x}{1} = \frac{12}{0{,}6}$$

$$x = \frac{12}{0{,}6} = \frac{120}{6} = 20$$

d) O teorema de Tales é hoje assim enunciado: "*Se um feixe de retas paralelas é interceptado por duas retas transversais, então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais."*

Professor você pode solicitar aos alunos que representem geometricamente o texto apresentado e indiquem os segmentos que são proporcionais. Depois, poderá discutir com o grupo um processo de demonstração formal em Matemática.

• Usando esse teorema, imagine que você queira uma estante como a abaixo.



Você passa ao marceneiro as distâncias que quer entre as prateleiras e a primeira medida da haste externa. Como o marceneiro poderá obter as medidas x e y indicadas? Espera-se que o aluno reconheça o Teorema de Tales.

Encontre essas medidas. $\frac{20}{10} = \frac{x}{40} = \frac{y}{30}$

$x = 80$ cm e $y = 60$ cm

e) Em muitas situações o Teorema de Tales pode estar "escondido" e é preciso que o façamos "aparecer', para depois fazermos os cálculos pretendidos.

• Destaque, em cada caso, as paralelas cortadas por transversais.

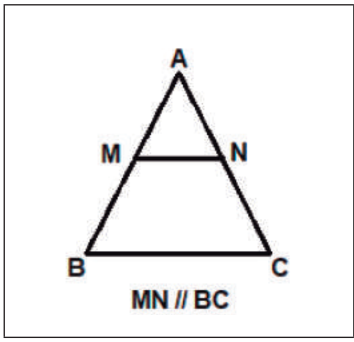


Fig 1

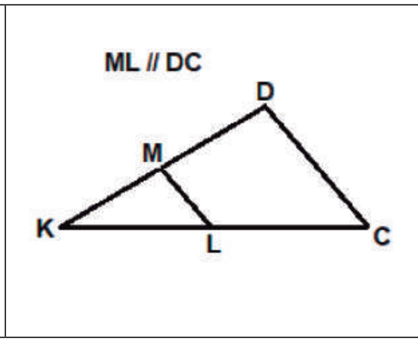


Fig 2

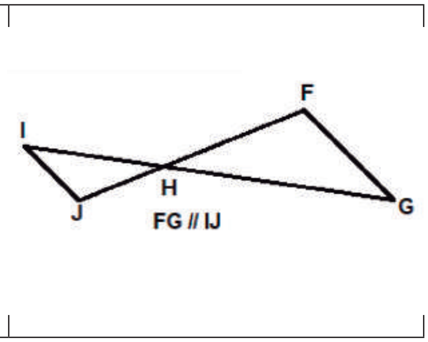


Fig 3

• Na fig 1 determine x sabendo que AM = 2, MB = 4, AN = 3, NC = x.

$\frac{2}{4} = \frac{3}{x} \rightarrow x = 6$

• Na fig 2, determine y sabendo que KM = 3, KD = 7, KC = 5,5, ML = 2 e DC = y.

$\frac{3}{7} = \frac{2}{y} \rightarrow y = \frac{14}{3}$

• Na fig 3, encontre os valores de w e z sabendo que IJ = 2, HJ = 3, HF = 5, HG = 4, HI = z e FG = w.

$\frac{3}{5} = \frac{2}{w} \rightarrow w = \frac{10}{3}$

$\frac{3}{5} = \frac{z}{4} \rightarrow z = \frac{12}{5}$

Professor, nestas questões chame a atenção dos alunos para que observem os triângulos que devem considerar para escrever as razões de proporcionalidade dos lados, pois os lados precisam ser correspondentes, isto é, estarem opostos a ângulos de mesma medida.

3.3 ATIVIDADE 3 RAZÕES POR TODA PARTE (1 aula)

a) As escalas de mapas são razões que indicam a relação de proporcionalidade entre a medida no mapa e a medida real do espaço representado. Veja um exemplo de escala presente em mapas.

Neste exemplo aparecem dois tipos de representação da escala: numérico e gráfico. O numérico apresenta a razão, que deve ser lida como “*1 centímetro no mapa representa 450.000 cm na realidade”.*

• Como é difícil imaginar uma distância de 450.000 cm transforme essa medida em km.

1 km = 1.000 m   1 m = 100 cm   1km = 100.000 cm   450.000 cm = 4,5 km

• Observando o que obteve acima, explique a escala gráfica

reconheça que na escala gráfica o espaço de 1 cm está representando os mesmos 4,5km obtidos na transformação feita.

• Determine a distância real entre dois pontos de um mapa que apresenta essa escala, sabendo que a distância no mapa é de 2,5 cm.

2,5 x 4,5 = 11,25   A distância real é de 11,25 km

b) Na arquitetura as escalas também são muito importantes e as plantas que os arquitetos e engenheiros desenham seguem normas determinadas por lei. Estas são as escalas que eles usam:

1:2; 1:5; 1:10; 1:20; 1:25;
1:50; 1:75; 1:100; 1:200;
1:250; 1:500.

• Se as medidas de um salão de festas são 10m x 20m, então sua representação na escala 1 : 100 terá as medidas de 10 cm x 20 cm

• Se as medidas reais de um terreno são 12m x 35m e sua representação na planta está com 24cm x 70cm, então qual a escala utilizada? 1:50

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 4

RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS (4 aulas)

As atividades propostas nesta sequência contribuem para o desenvolvimento da habilidade: Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente). O sucesso do aluno na resolução de problemas de modo geral e de geometria em particular se apoia em aprendizagens como:

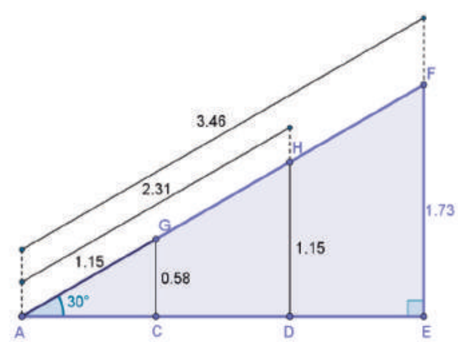
- leitura e interpretação de enunciados de problemas matemáticos, identificando diferentes registros de representação empregados;
- representação geométrica do texto, indicando correspondência entre o descrito e o representado;
- identificação da(s) operação(ões) ou relações que resolve(m) o problema;
- aplicação de procedimentos e cálculos adequados para a resolução;
- validação do resultado encontrado para argumentar e justificar a solução dada.

REVENDO UM VELHO CONHECIDO (2 aulas)

Professor proponha sempre que os alunos discutam as atividades em grupo e, depois, que eles próprios apresentem suas soluções à classe e que os próprios colegas discutam se consideram as respostas adequadas ou não.

O triângulo retângulo é uma das figuras geométricas mais famosas. São poucas as pessoas que nunca precisaram usar essa forma geométrica em alguma situação real. Isso se deve às suas várias propriedades que permitem uma variedade de aplicações no mundo real. Nesta atividade vamos descobrir e usar algumas dessas propriedades.

a) Observe a figura a seguir e responda:



- Quantos triângulos há nessa figura? 3
- Considerando as medidas apresentadas, use uma calculadora para calcular as razões indicadas:

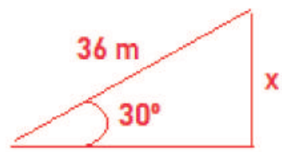
$$\frac{CG}{AG} = 0,5 \qquad \frac{DH}{AH} = 0,5 \qquad \frac{EF}{AF} = 0,5$$

Professor, os resultados a que os alunos chegarão precisarão ser aproximados. É uma boa oportunidade para discutir como realizar a aproximação e, também, para retomarem a conversa sobre a imprecisão das medidas e de suas constantes aproximações.

• Todas essas razões foram aproximadamente iguais? Sim

Dê uma justificativa para isso acontecer. Espera-se que o aluno perceba que os lados considerados nos triângulos eram todos opostos ao ângulo de 30º

• Usando essa descoberta resolva este problema: Uma rampa plana, de 36 m de comprimento, faz ângulo de 30° com o plano horizontal. Uma pessoa que sobe a rampa inteira a que altura do chão estará quando chegar ao final?



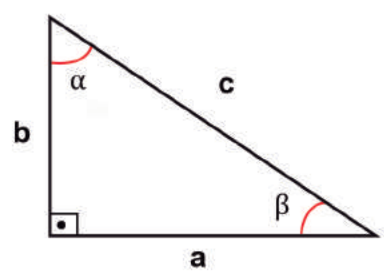
$$\text{sen } 30^\circ = \frac{x}{36}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{36}$$

$$x = 18 \text{ m}$$

b) Diante dessa descoberta é possível imaginar que outras razões poderiam ser estabelecidas entre as medidas dos lados dos triângulos retângulos. Olhe novamente para a figura e escreva outras razões desse tipo. Espera-se que o aluno perceba as possíveis relações entre os lados dos triângulos. Professor discuta as que remetem às relações de cosseno e de tangente e, também, destaque o outro ângulo do triângulo.

Dentre as razões que se pode escrever entre as medidas dos lados dos triângulos retângulos algumas se destacam:



$$\textit{seno de um ângulo} = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}}$$

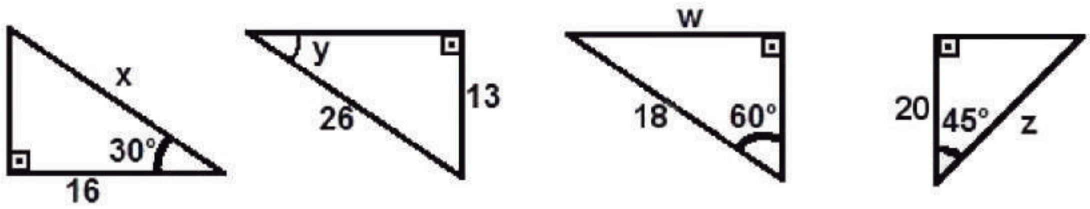
$$\textit{cosseno de um ângulo} = \frac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}}$$

$$\textit{tangente de um ângulo} = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{cateto adjacente}}$$

c) Com o estabelecimento dessas razões foi possível calcular o valor do seno, cosseno e tangente de uma infinidade de ângulos. Aqui está uma tabela com esses valores para os ângulos mais usados.

	seno	cosseno	tangente
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

• Encontre o que se pede em cada triângulo.



$\cos 30^{\circ} = \frac{16}{x}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16}{x} \leftrightarrow \sqrt{3}\,x = 32$

$x = \frac{32}{\sqrt{3}} \leftrightarrow x = \frac{32\sqrt{3}}{3}$

$\text{sen } y = \frac{13}{26}$

$\text{sen } y = \frac{1}{2}$

$y = 30^{\circ}$

$\text{sen } 60^{\circ} = \frac{w}{18}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{w}{18}$

$w = 9\sqrt{3}$

$\cos 45^{\circ} = \frac{20}{z}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{20}{z}$

$z = 20\sqrt{2}$

4.2 ATIVIDADE 2 A UTILIDADE DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO (2 aulas)

Você já se perguntou como o homem conseguiu determinar a distância da Terra até a Lua, até ao Sol e a todos os outros planetas? Como determinar a largura de rios muito largos ou de lagos? Você já viu como Tales fez para a determinação da altura pirâmide. Procure conhecer um pouco sobre as façanhas de outros estudiosos gregos como Erastóstenes e Aristarco. Nesta atividade vamos conhecer como calcular distâncias inacessíveis usando as razões trigonométricas.

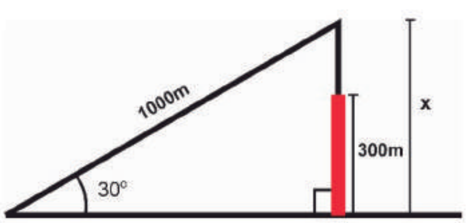
Professor estimule os alunos a conhecerem a história da matemática, principalmente os episódios vividos por esses estudiosos, para que reconheçam o poder da imaginação e criatividade no trabalho em Matemática.

a) Um avião que decola, formando com o solo, um ângulo de 30º e seguindo uma trajetória retilínea, passa acima de um morro depois de percorrer 1.000 metros. Sabendo que a altura do morro é de 300 m, determine a quantos metros de distância o avião passa do topo do morro.

Em todo problema de geometria é fundamental fazer um desenho que represente o enunciado. Mas, para isso é preciso ler com cuidado todas as informações dadas para que o desenho represente bem o problema. Vamos fazer esse juntos!

• Comece com esta informação: *Um avião que decola, formando com o solo, um ângulo de 30º e seguindo uma trajetória retilínea.* Não está dito que o solo é plano, mas sabemos que uma pista de decolagem é plana. Então, faça essa parte do desenho.

Espera-se que o aluno represente:



Professor(a) acompanhe a realização do desenho pelos alunos, questionando-os sobre os elementos que colocam.

Eles poderão indicar como x apenas o trecho acima do morro, que é também uma possibilidade de solução a ser discutida.

• Agora, vamos ao próximo trecho: *passa acima de um morro depois de percorrer 1.000 metros.* Nesse trecho aparecem duas informações, quais são elas? a linha de subida mede 1.000m e que termina sobre o morro.

Marque-as no desenho acima.

• Vamos ao próximo trecho: *Sabendo que a altura do morro é de 300 m, determine a quantos metros de distância o avião passa do topo do morro.* Esse também traz duas informações, uma explícita e uma que requer interpretação. A explícita é que o morro mede 300 m

A outra é que você precisa perceber que os termos *altura e distância* devem ser entendidos como estar em linha reta e na perpendicular. Sabendo disso, complete o desenho.

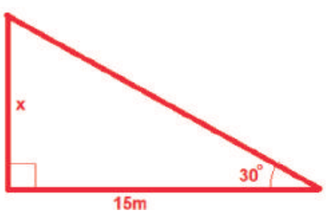
• Agora, use as relações trigonométricas que aprendeu e resolva o problema.

$$sen\ 30° = \frac{x}{1.000} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{1.000} \rightarrow x = 500$$

500m é a altura atingida pelo avião, logo ele passa a 200m de distância do topo do morro.

Vamos a outros problemas! Você deve seguir as mesmas etapas para fazer o desenho ou colocar as informações nele.

a) A sombra que uma árvore atinge 15 m de comprimento quando o Sol está a 45° acima do horizonte. Qual é a altura da árvore?

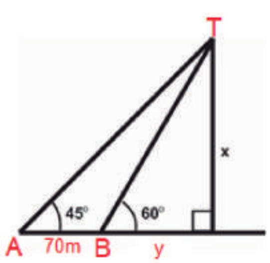


$$tg\ 30° = \frac{x}{15} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{15}$$

$$3x = \frac{x}{15} = 15\sqrt{3} \rightarrow x = 5\sqrt{3}$$

b) Ao realizar a medida da altura de um morro, um agrimensor se coloca a uma certa distância e indica essa posição como sendo um ponto A. Dessa posição ele enxerga o topo T do morro, conforme um ângulo de 45º. Ao se aproximar 70 metros do morro, ele passa a ver o topo T conforme um ângulo de 60º. Determine a altura do morro.

• Complete o desenho com as informações apresentadas, depois resolva-o.



Professor(a) alerte os alunos para que mantenham o exercício de leitura da imagem. Questione-os sobre quantos triângulos aparecem na figura dada e de quais tipos são. É importante que eles identifiquem que o triângulo retângulo cujo ângulo é 45° é , portanto, um triângulo retângulo isósceles. Logo os dois catetos têm a mesma medida

Desse modo podemos escrever :

$$tg\ 60° = \frac{x}{y} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{y} \rightarrow \sqrt{3}\,y = x$$

$$tg\ 45° = \frac{x}{70+y} = 1 \rightarrow x = 70 + y$$

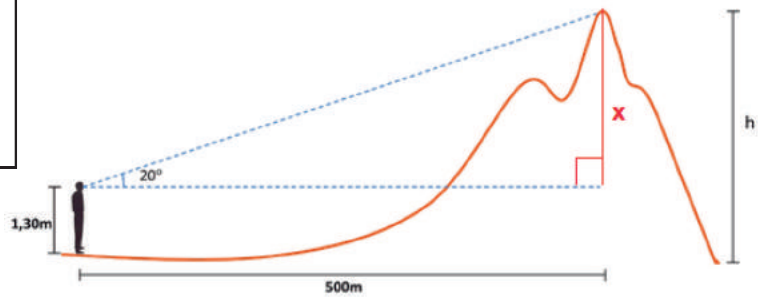
Considerando $\sqrt{3} = 1{,}7$ temos: $1{,}7y = 70 + y \rightarrow 0{,}7y = 70 \rightarrow y = 100$ m

$X = 70 + 100 = 170$ m

6 - Matemática - EM - 3ª Série.indd 24 18/07/2019 17:02:27

c) Um menino avista o topo de um morro, conforme figura abaixo. Considerando que ele está a uma distância de 500 m da base do morro, calcule a altura (h) indicada.

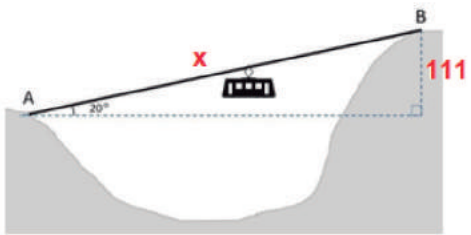
Considere:
sen 20º = 0,34
cos 20º = 0,93
tg 20º = 0,36



$$tg\ 20° = \frac{x}{500} \rightarrow 0,36 = \frac{x}{500} \rightarrow x = 0,36 \times 500 \rightarrow x = 180\ m$$

$$h = 180 + 1,30 = 181,30m$$

e) No projeto para a construção de um teleférico ligando os topos de duas montanhas foi construído o seguinte desenho.

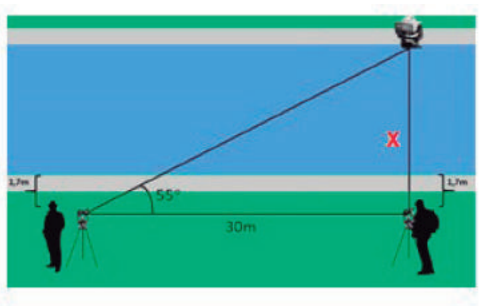


Considere:
sen 20º = 0,34
cos 20º = 0,93
tg 20º = 0,36

Sabendo que as alturas das montanhas são 872 m e 761 m, calcule a distância a ser percorrida pelo carrinho.

$$sen20° = \frac{111}{x} \rightarrow 0,34\ x = 111 \rightarrow x \cong 326,47m$$

f) A figura abaixo representa um procedimento de medida da largura de um rio, feito por dois profissionais ao mesmo tempo.



Use
sen55° = 0,82
cos55° = 0,57
tg55° = 1,43

Um na posição A e outro na posição B observam uma pedra que está na margem do outro lado, conforme mostra a figura. Ambos estão 1,7 m afastados da margem. Considerando que as duas margens do rio são paralelas, determine a largura do rio.

$\text{tg } 550° = \dfrac{x}{30} \rightarrow 1{,}43 = \dfrac{x}{30} \rightarrow x = 42{,}9$

largura do rio: 42,9 – 1,7 = 41,2 m

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 5

PROPORCIONALIDADE - PROBLEMAS (5 aulas)

As atividades propostas nesta sequência contribuem para o desenvolvimento da habilidade: resolver problema que envolva variação proporcional, direta ou inversa, entre grandezas. O sucesso do aluno na resolução de problemas , como já comentado anteriormente, depende, além dos aspectos voltados à leitura e interpretação, de seu conhecimento conceitual e dos recursos de dispõe para aplicação de procedimentos e cálculo. Desse modo, esta sequência trata desses conhecimentos, tendo em vista o desenvolvimento da habilidade prevista, promovendo que:

- identifiquem situações que envolvem relações de proporcionalidade, direta ou inversa;
- reconheçam que a proporcionalidade é um conceito de ampla aplicação, tanto em matemática como em outras áreas;
- identifiquem que a razão de proporcionalidade entre duas grandezas pode ser obtida pela observação do padrão de alteração de uma em relação à outra;
- resolvam situações diversas envolvendo probabilidade.

5.1 ATIVIDADE 1 PROBLEMAS PARA OBSERVAÇÃO DE REGULARIDADES (2 aulas)

Professor a resolução em duplas ou quartetos é que vai possibilitar aos alunos as discussões e análises de diferentes pontos de vista. Na montagem desses grupos considere que as discussões serão melhores entre eles se todos tiverem níveis de conhecimento mais próximos, pois assim todos se sentirão parte necessária do grupo. Percorra os grupos e oriente as discussões.

A grande maioria dos problemas de proporcionalidade, direta ou inversa, pode ser resolvida por meio da montagem de uma tabela que expressa o relacionamento entre as grandezas envolvidas. A identificação da regularidade presente nos valores determinados fornece os elementos necessários para a resolução do problema. Essa regularidade também pode ser expressa pela razão (k) de proporcionalidade.

a) Uma fábrica mantém jornadas de trabalho de 6 horas para seus funcionários e, com essa jornada, a produção mensal é de 160 mil produtos. Quantas horas diárias serão necessárias para elevar a produção para 240 mil produtos?

• Comece montando uma tabela para observar a relação que existe entre a quantidade de produtos produzidos e o número de horas trabalhadas.

Quantidade	80.000	160.000	240.000	360.000
Horas	3	6	9	12

Proponha que eles sempre avancem ou recuem com os valores da tabela para que identifiquem se existe uma regularidade em sua construção.

• E aí? Quantas horas para produzir 240.000? 9 horas

• Se sua tabela foi preenchida corretamente, a razão entre a quantidade de produtos produzidos e o número de horas trabalhadas deve ser a mesma. Verifique: $\frac{80000}{3} = \frac{160000}{6} = \frac{240000}{9} = \frac{360000}{12}$.
Se não deu certo, reveja seus cálculos.

• Expresse a razão de proporcionalidade acima por uma fração irredutível. $\frac{80000}{3}$

• Chamando de y a quantidade de produtos, de x o número de horas e de k a razão entre eles, assinale quais das expressões abaixo podem ser usadas para representar a relação de proporcionalidade entre y e x.

$k = \frac{y}{x}$	$\frac{1}{k} = \frac{x}{y}$	$x = \frac{y}{k}$	$y = kx$
(**x**)	(**x**)	(**x**)	(**x**)

Professor discuta a igualdade expressa em todas essas representações e destaque o fato de que podemos usar qualquer uma delas nas resoluções de problemas de proporcionalidade direta, optando sempre por aquela que for mais conveniente em cada situação.

• Agora, resolva o problema novamente, usando uma das expressões assinaladas por você.
Aqui temos uma boa oportunidade para exemplificar o que significa ser a mais conveniente. O aluno poderá optar por:

$x = \frac{y}{k} \rightarrow x = \frac{240000}{80000} = \frac{240000 \text{ x } 3}{80000} = 9$ ou por $y = kx \rightarrow 240000 = \frac{8000}{3} \,.\, x \rightarrow x = \frac{240000 \text{ x } 3}{80000} = 9$

b) Com 100 kg de grãos de trigo são fabricados 65 kg de farinha. Para fabricar 260 kg de farinha de trigo quantos quilogramas de grãos serão necessários?

• Monte a tabela e dê a resposta ao problema

Kg de Grãos	Kg de Farinha
100	65
200	130
400	260

• Determine a razão de proporcionalidade.

$k = \frac{65}{100} = 0{,}65$

• Resolva o problema novamente empregando a expressão algébrica que o representa.

$x = \frac{y}{k} \rightarrow x = \frac{260}{0{,}65} = 400$

c) Francisco leva 5 minutos para chegar na escola andando a uma velocidade de 10km/h. Hoje ele gastou 8 minutos neste percurso. A que velocidade veio o Francisco?

• Monte a tabela e dê a resposta ao problema.

Professor: Na montagem da tabela é interessante que os alunos trabalhem com mesma unidade de tempo, no caso hora. Para isso haverá necessidade de conversão dos minutos em horas. É um bom momento para fazer a relação entre a representação decimal de horas.

Km/h	24	12	9	6
Tempo (min)	7,5min ou 7'30" 0,125h	15min 0,25h	18min 0,3h	30min 0,5h

• Você já percebeu que a relação entre essas grandezas ocorre de modo diferente das anteriores, isto porque elas são inversamente proporcionais

Neste caso, quando uma grandeza é multiplicada por 2 a outra é dividida por 2. Se uma for dividida por 3 a outra será multiplicada por 3.

• Chamando a velocidade de v e o tempo de t, verifique o que ocorre com os resultados de v·t . Explique o que obteve. Em todas as situações tem-se o mesmo resultado: $v \times t = 12 \times 0{,}25 = 3$ km

• Escreva a relação entre as grandezas v e t e a constante (k) de proporcionalidade empregando a linguagem algébrica.

$$k = v \times t$$

d) Uma torneira enche um tanque em 20 horas com uma vazão de 30 litros por minuto. Quanto tempo demorará para encher esse mesmo tanque se a torneira tiver uma vazão de 50 litros por minuto?

Vazão	10	20	30	45	50	60
Tempo	3600	1800	1200	800	720	600

$v \times t = 10 \times 3600 = 36000$

$v \times t = 36000 \rightarrow t = \dfrac{36000}{20} = 1800; t = \dfrac{36000}{45} = 800; t = \dfrac{36000}{50} = 720$

e) Um relatório de 600 páginas foi entregue a digitadores que produzem, cada um, 8 páginas por hora. Determine quantos digitadores serão necessários para esse relatório ficar pronto em 15 horas.

• Monte a tabela e dê a resposta ao problema.

Digitador	1	2	3	4	5
Horas	75	37,5	25	18,75	15

• Determine a razão de proporcionalidade e aproveite para conferir os dados de sua tabela.
$k = 75$

• Represente a relação de proporcionalidade.
$k = d \times h$

• Use a expressão que escreveu para resolver o problema novamente.

$75 = d \times 15 \rightarrow d = \frac{75}{15} = 5$

f) Um aviário tinha 3.500 galinhas, tendo ração suficiente para as alimentar durante 20 dias. Num certo dia foi vendida uma certa quantidade delas, passando a ração a ser suficiente para 35 dias. Quantas galinhas foram vendidas?

Galinhas	3500	500	1000	1750	2000
Duração Ração (dias)	20	140	70	40	35

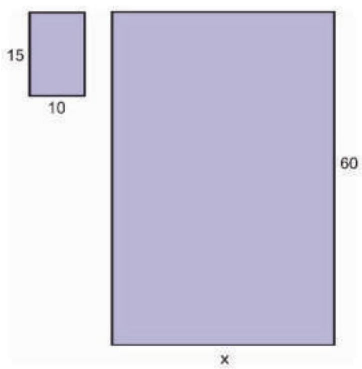
$k = g \times t = 20 \times 3.500 = 70.000 \rightarrow t = \frac{70000}{g}$

$t = \frac{79000}{500} = 140; t = \frac{70000}{1000} = 70; t = \frac{70000}{1750} = 40; t = \frac{70000}{2000} = 35$

5.2 ATIVIDADE 2 PROBLEMAS DE GEOMETRIA E PROPORCIONALIDADE (1 aula)

Problemas de geometria devem sempre ser resolvidos a partir da representação das figuras que fazem parte do problema. Se achar interessante, use também as tabelas para reconhecer a constante de proporcionalidade.

a) Uma foto retangular de 10 cm por 15 cm deve ser ampliada de modo que a ampliação seja semelhante à foto. A medida do maior lado da ampliação será de 60 cm. Qual será a medida do menor lado?



Base	Altura
10	15
20	30
30	45
40	60

$h = 1,5 \times b; b = h \times \frac{2}{3} \rightarrow b = 60 \times \frac{2}{3} = 40$

b) Quando dois retângulos, A e B, são desenhados de modo que o B é uma ampliação do A, podemos afirmar que:

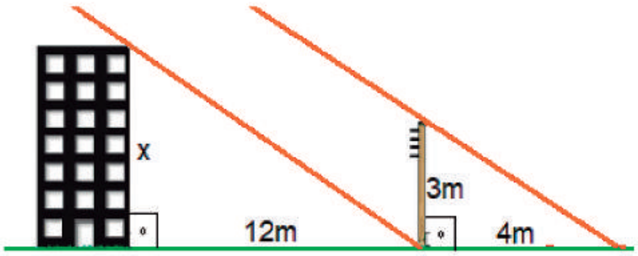
• o perímetro de B se manteve o mesmo de A, e os ângulos internos correspondentes dobraram de valor.

• o perímetro de B passou a ser o triplo do perímetro de A, e os ângulos internos correspondentes não se alteram.

• o perímetro de B passou a ser o dobro do perímetro de A, e os ângulos internos correspondentes não se alteram

• o perímetro de B passou a ser o dobro do perímetro de A, e os ângulos internos correspondentes também dobraram de valor.

c) Na situação da figura, mostra-se a sombra de um prédio e de um poste próximo ao prédio, em um mesmo instante. Determine a altura do prédio.



$k = \frac{3}{4} = 0{,}75$; $x = s \times k = 12 \times 0{,}75 = 9m$

Professor não deixe de discutir as diferentes possibilidades de escrita e emprego da relação de proporcionalidade. A apresentada é sempre uma possibilidade e não a única.

Sombra (m)	4	8	12
Altura (m)	3	6	9

d) Um arquiteto está montando uma maquete de um novo empreendimento. Se uma torre de 25 m de altura foi representada com 50 cm, então um muro de 70m de comprimento deverá ser representado com 140 cm

Dimensão (m)	Maquete (cm)
25	50
20	40
50	100
70	140

5.3 ATIVIDADE 3 PROPORCIONALIDADE DIRETA E FUNÇÃO LINEAR (2 aulas)

Nestes problemas você vai buscar um modo de representar algebricamente a relação de proporcionalidade direta entre as grandezas. Aqui também a determinação da regularidade em tabelas é a chave para a solução.

a) A tabela abaixo dá o preço de venda, em gramas, de um tipo de salgadinho.

Peso (em gramas)	100	200	250	300	...	x
Preço (em reais)	3,60	7,20	9,00	10,80	...	y

• Determine a expressão que representa a quantia (y) a ser paga em reais, em função do peso (x) de salgadinhos comprados em quilogramas.

• Peso por grama= 3,60:100 = 0,036

• Preço do salgado y = x · 0,036

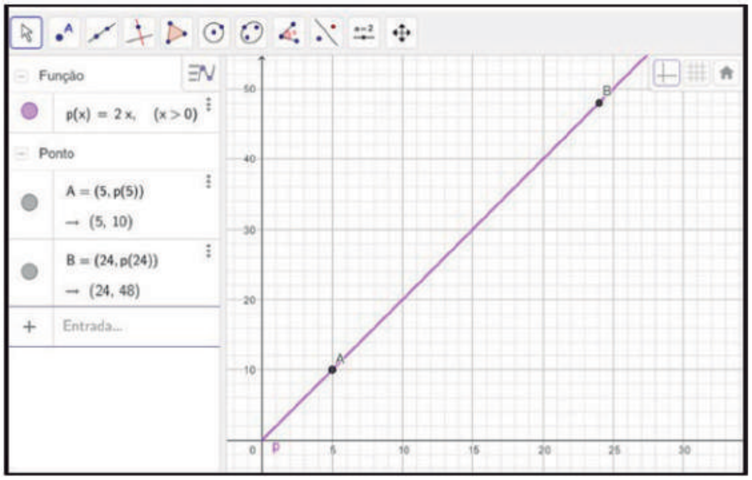
• Utilizando o Geogebra, valide sua resposta analisando o gráfico correspondente à sua expressão, verificando se os pontos da tabela pertencem ao gráfico.

Professor peça a alguns alunos que apresentem suas expressões e como as validaram pelo Geogebra. Estimule-os a observarem as posições em relação aos eixos e determinarem suas coordenadas.

b) Uma caixa d'água com um furo no fundo perde 2 litros de água a cada 1 hora. Determine a expressão algébrica que permite calcular a quantidade de água perdida em função do tempo.

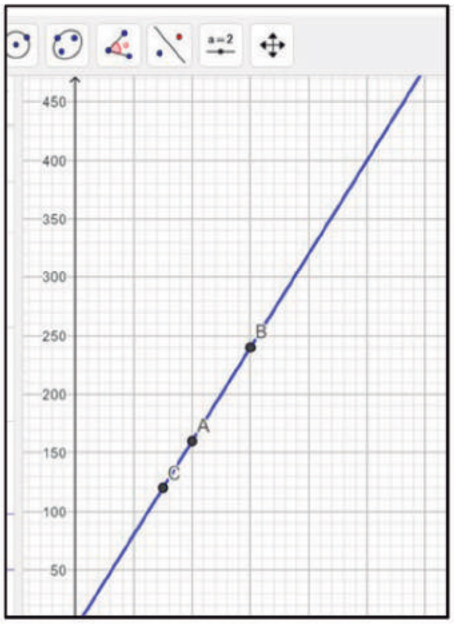
p = 2x

• Valide sua resposta utilizando o Geogebra.



c) Um carro desloca-se da cidade A para a cidade B, 450 km distante de A, a uma velocidade constante de 80 km/h.

• No Geogebra trace o gráfico da função que representa este movimento.



Lendo o gráfico montado responda:

○ qual a distância percorrida entre os tempos 2 e 3 horas nessa viagem? Como a velocidade é constante espera-se que os pontos estejam a 80km um do outro.

○ E em que ponto do trajeto se encontra o carro a 1h e 30 min? Para x = 1,5 tem-se y = 120.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 6

TABELAS E FUNÇÕES (3 aulas)

As atividades propostas nesta sequência contribuem para o desenvolvimento da habilidade: Reconhecer expressão algébrica que representa uma função a partir de uma tabela. Para isso as propostas seguem com a exploração da percepção de regularidades para sua generalização e, também, maior associação entre gráfico e tabela, desse modo pretende-se que os alunos:

- identifiquem regularidade presente numa tabela que representa uma função;
- reconheçam que essa regularidade pode ser generalizada para ser expressa por meio de uma expressão algébrica;
- identifiquem que uma função pode ser apresentada por meio de diferentes registros;
- transitem de um registro a outro de modo flexível.

Em seus estudos anteriores você já percebeu que as tabelas são de grande ajuda para representar situações que envolvem a proporcionalidade. Hoje vamos ampliar um pouco mais o olhar sobre as tabelas e as relações que podemos reconhecer a partir delas.

6.1 ATIVIDADE 1 DA TABELA À LEI DE FORMAÇÃO DA FUNÇÃO (1 aula)

a) Ao acompanhar o treino de um atleta numa esteira ergométrica em velocidade constante, um treinador montou a seguinte tabela com suas observações.

Tempo (min)	Distância (m)
10	1.500
20	3.000
30	4.500
40	6.000
50	7.500
60	9.000

- Observando a tabela e supondo que este atleta mantenha seu ritmo de corrida, aos 90 minutos que distância já terá percorrido?

  13.500

- Explique como pensou para responder. Professor(a): Há várias maneiras de obter a solução e aqui o aluno relatará sua estratégia de solução, mas espera-se que perceba a regularidade, generalize e obtenha a expressão que relaciona o tempo com a distância percorrida.

• Chamando a distância de D e o tempo de t, represente algebricamente o fato de que a distância percorrida, em velocidade constante, depende do tempo de treino. $D(t) = t \cdot 150$. Aproveite para discutir essa forma de representação em que se deixa claro qual a variável independente e qual a dependente e suas representações no plano cartesiano.

b) Para controlar o tempo que gasta em seu percurso até o trabalho, Marina anotou por alguns dias a duração do trajeto que faz de ônibus. Ela anota a hora em que entra no ônibus e a duração do percurso. Veja como ficou a tabela de Marina.

Hora	Duração (min)
8h20min	40
8h25min	47
8h18min	38
8h22min	42
8h30min	38
8h20min	43
8h23min	44

Pela tabela, é possível prever a duração do trajeto de Marina no próximo dia? Não

Por quê? Não existe certeza da duração no dia seguinte. Não se estabelece uma regularidade nos valores da duração, então nota-se que ela não depende apenas da hora considerada. Professor(a): O aluno deve expor de diversas maneiras as razões que o levaram a sua resposta.

c) Observando os valores da tabela, complete:

x	y
- 2	- 1
- 1	0
0	1
1	2
2	3

Quando o valor de x for 6, então o valor de y será 7, quando x for 9 y será 10.

Esse valor pode ser calculado a partir da expressão:

$y = x$ $y = x + 1$ $y = - x + 1$ $y = - x$

d) Complete a tabela a partir da observação dos valores já presentes.

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	...	10
y	9	4	**1**	0	**2**	4	...	**100**

• Escreva uma expressão algébrica que permita calcular qualquer valor nesta tabela. $y = x^2$

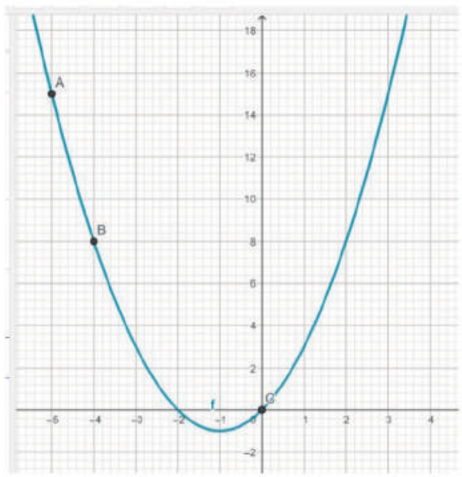
A expressão algébrica associada a uma tabela também pode ser chamada de lei de formação de y em função de x.

Professor, estimule as discussões entre os alunos para que explicitem seu modo de pensar para atingir a generalização a partir de suas observações este é um procedimento essencial para o pensamento matemático.

6.2 ATIVIDADE 2 DO GRÁFICO PARA A TABELA (2 aulas)

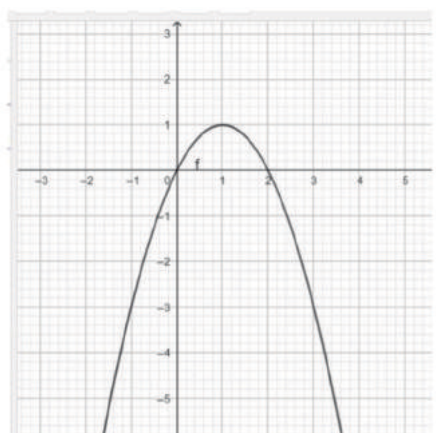
Uma função pode ser representada por três tipos diferentes de registro. Por sua lei de formação, por uma tabela e por seu gráfico. Normalmente, usamos os pontos de uma tabela para construir um gráfico. Hoje vamos fazer o contrário!

a) No Geogebra, insira a seguinte lei $y=x^2 + 2x$. A partir do gráfico obtido complete a tabela abaixo.
Professor: Peça aos alunos para formarem grupos de 2 ou 4 alunos. Executarem o Geogebra e usando a janela de Álgebra definirem a equação acima. A partir daí o aluno poderá consultar o gráfico para preencher a tabela. Embora o Geogebra possua outras possibilidades que o aluno pode explorar como o desenho de pontos no gráfico para apresentação na janela algébrica, proponha que façam a leitura do gráfico para encontrar os pontos da tabela, pois este é o conhecimento a ser adquirido com essa proposta.



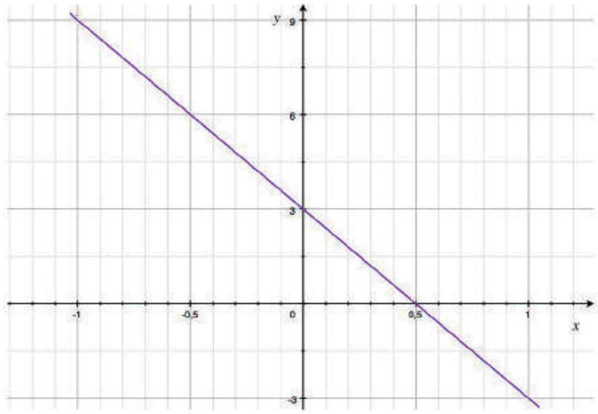
x	- 5	- 4	-2	-1	0	1	2
y	**15**	**8**	0	- 1	**0**	3	8

b) Continue no Geogebra. Digite uma nova lei: para preencher a tabela abaixo



x	- 4	- 3	-2	-1	0	1	3
y	-24	-12	-8	- 3	0	1	-3

c) Determine qual das tabelas corresponde ao gráfico dado.



x	-1	-0,5	0	0,5
y	-9	-6	3	0

A

x	-0,5	0	0,5	1
y	9	-6	3	0

B

x	-0,5	0	0,5	1
y	6	3	0	-3

C

x	-0,5	0	0,5	1
y	6	3	0	3

D

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 7

FUNÇÃO POLINOMIAL DE 1º GRAU – COEFICIENTES E GRÁFICOS (5 aulas)

As atividades propostas nesta sequência contribuem para o desenvolvimento da habilidade: Reconhecer o gráfico de uma função polinomial de 1º grau por meio de seus coeficientes. Para isso as observações e discussões propostas permitem que os alunos:

- reconheçam que o nome dado à função já traz sua característica essencial, identificando que em sua expressão algébrica o expoente da variável independente deve ser 1.
- associem o coeficiente de x e o termo independente que compõem sua expressão algébrica ao papel que desempenham na representação gráfica;
- antecipem como será a representação gráfica desse tipo de função pela análise desses coeficientes.

Você sabia que as funções polinomiais do 1º grau têm ampla aplicação em diversas áreas? Elas são empregadas em situações do nosso dia a dia, em situações financeiras, em questões de física, química, biologia etc..
Por isso é que saber fazer uma leitura de sua lei de formação e de seu gráfico acaba sendo importante para a realização de algumas análises que não precisam de valores específicos de determinados pontos. Nesta sequência vamos fazer um pouco dessas leituras.

7.1 ATIVIDADE 1 RECONHECENDO FUNÇÃO POLINOMIAL DE 1º GRAU (1 aula)

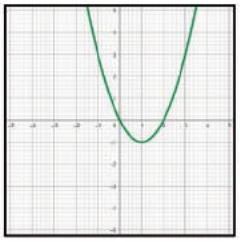
a) O nome desse tipo de função já dá dicas de como sua representação algébrica deve ser. Então, pensando nesse nome assinale quais das representações algébricas apresentadas abaixo podem ser chamadas de função polinomial de 1º grau. Pesquise em seu livro de matemática ou na internet.
Professor destaque a importância que a compreensão dos nomes que se dá aos entes matemáticos tem para a percepção do significado de cada um. Estimule-os a buscarem esse significado e falarem sobre ele. Essa discussão inicial é que vai dar suporte para a realização desta atividade.

a) $f(x) = 2$ b) $g(x) = -x$ c) $p(t) = t^2+1$ d) $\frac{2}{3}x = 3y$

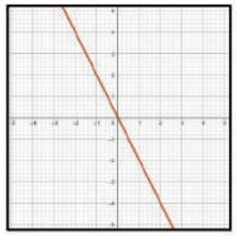
e) $f(x) = \frac{1}{x}$ f) $x + 5 = 7$ g) $h(z) = 2 - z^3$ h) $y = \sqrt{2}x - \sqrt{3}$

Para cada uma não assinalada, explique porque não a escolheu.
Espera-se que os alunos identifiquem as características da representação algébrica da função polinomial do 1º grau e apoiando-se em sua ausência descartem as que não atendem tais características. Há três expressões que poderão causar mais discussão, a da letra A) em que convém discutir que a ausência de x significa que o expoente é zero; a E) na qual o x está no denominador e, aqui também convém discutir que o expoente de x é -1 e a letra F) na qual se tem uma equação de 1º grau e não uma função, sendo um ótimo momento para deixar claro a relação entre as duas variáveis x e y, além de destacar a diferença entre incógnita e variável.

Agora, indique quais gráficos correspondem a funções polinomiais de 1º grau.

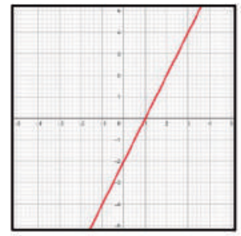


(   )



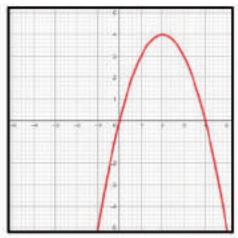
(x)

(   )

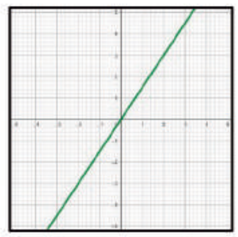


(x)

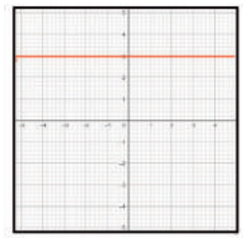
(   )



(   )

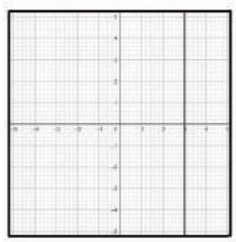


(x)



(   )

(x)



(   )

Justifique as escolhas que fez. Todos os gráficos escolhidos são retas onde para cada x existe um único y. Essa última afirmação é essencial para que os alunos percebam que a reta paralela ao eixo x é de uma função constante e que a reta paralela ao eixo y não pode ser chamada de função por não atender à definição.

7.2 ATIVIDADE 2 MEU NOME É COEFICIENTE ANGULAR (2 aulas)

Nesta atividade você vai se tornar um detetive matemático. Terá de observar pistas sobre o que muda e o que permanece em cada uma das situações a serem investigadas. Fique esperto!!!

a) Usando o Geogebra, represente todas as funções desse grupo em um mesmo plano cartesiano.

$F(x) = x$ e $F'(x) = -x$

$H(x) = 2x$ e $H'(x) = -2x$

$G(x) = \frac{1}{2}x$ e $G'(x) = -\frac{1}{2}x$

$I(x) = 5x$ e $I'(x) = -5x$

A partir de suas observações, escreva o que descobriu sobre as mudanças no gráfico causadas pelas mudanças no coeficiente de x quando há:

- uma troca de sinal no coeficiente de x: A troca de sinal ocasiona o aparecimento de uma reta simétrica em relação ao eixo y.

- mudança no valor do coeficiente de x: Ocasiona o aparecimento de uma nova reta com inclinação diferente em relação ao eixo x.

Nos dois casos o ponto de intersecção das retas com os eixos se dá no ponto (0,0)

b) Em uma nova tela do Geogebra, represente agora este novo grupo de funções.

$F(x) = x + 1$ e $F'(x) = -x + 1$ $\quad$ $H(x) = 2x + 1$ e $H'(x) = -2x + 1$

$G(x) = \frac{1}{2}x + 1$ e $G'(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ $\quad$ $I(x) = 5x + 1$ e $I'(x) = -5x + 1$

As observações sobre as mudanças realizadas no coeficiente do x permanecem as mesmas? Sim. Justifique sua resposta. Continua havendo a simetria em relação ao eixo y quando da mudança de sinal, e a mudança do ângulo formado pelo eixo x e a reta. No entanto, o ponto de intersecção das retas com o eixo y é o ponto (0,1). Professor(a) aproveite para chamar atenção sobre esse ponto que é comum a todas as retas questionando-os sobre esse fato.

O coeficiente de x em uma função polinomial de 1º grau recebe o nome de **coeficiente angular** por indicar se o ângulo que a reta forma com o eixo x é agudo ou obtuso.

C) De acordo com suas observações anteriores, sem mesmo construir os gráficos, é possível afirmar que as retas cujas leis são $y = -3x - 2$ e $y = -3x$ formam um ângulo obtuso com o eixo x. Além disso, por terem o mesmo coeficiente angular, as retas representadas no mesmo plano cartesiano ficarão paralelas.

7.3 ATIVIDADE 3 MEU NOME É COEFICIENTE LINEAR (1 aulas)

Continue com seu olhar sobre o que muda e o que permanece no gráfico de uma função polinomial do 1º grau de acordo com as alterações feitas em sua representação algébrica.

a) Vamos ao Geogebra novamente. Mas, antes:

• escreva você a lei de uma função polinomial do 1º grau, do tipo $f(x) = ax + b$.

Professor: Cada aluno poderá escolher uma função polinomial distinta. Explore esse fato para salientar as propriedades da função polinomial de 1º grau.

• mantendo o valor do coeficiente angular (*a*), faça alterações no valor de *b*. Lembre-se de usar números negativos e frações. Escreva as alterações que irá testar no software. Professor: o objetivo é mostrar e fixar para o aluno onde o gráfico corta o eixo y.

• Descreva as mudanças que ocorreram no gráfico da função com a mudança no *b* (termo independente de x). Professor: Reforce com uma discussão geral na classe os resultados obtidos por todos.

• É possível observar uma regularidade no eixo y em relação ao valor de *b*. Descreva essa regularidade. Cada aluno deve descrever com suas próprias palavras o que observou neste exercício com o Geogebra.

b) Complete a seguinte informação: Na representação algébrica de uma função polinomial o termo independente de x indica o ponto onde o gráfico corta o eixo y . Ele recebe o nome de **coeficiente linear.**

7.4 ATIVIDADE 4 VISUALIZANDO FUNÇÕES (1 aula)

Usando as descobertas que fez você poderá antecipar como ficará o gráfico de uma função polinomial de 1º grau apenas observando os coeficientes da representação algébrica. Mas, também poderá antecipar características da representação algébrica apenas observando o comportamento do gráfico da função. Vamos fazer isso! Analisando as representações algébricas, complete os espaços com suas considerações sobre como será o gráfico de cada uma, justificando suas colocações.
Professor: Os exercícios a seguir e outros semelhantes podem ser usados para motivar a classe. Crie um jogo em que se ganha pontos por resposta certa referente a questões semelhantes as seguintes: ângulo que forma a reta com o eixo x, onde cruza o eixo y.

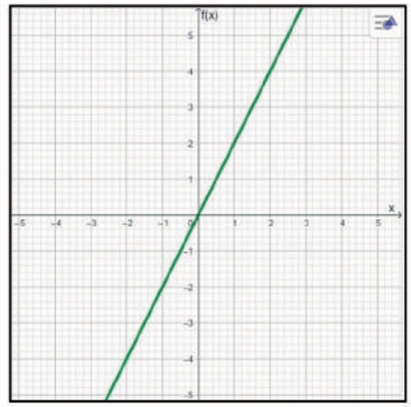
• $F(x) = \sqrt{2}x + 3$: ângulo agudo porque o coeficiente de x é positivo; cruza y no ponto (0,3)

• $P(x) = - 5 + 2x$: ângulo agudo em relação ao eixo x; cruza y no ponto (0,-5)

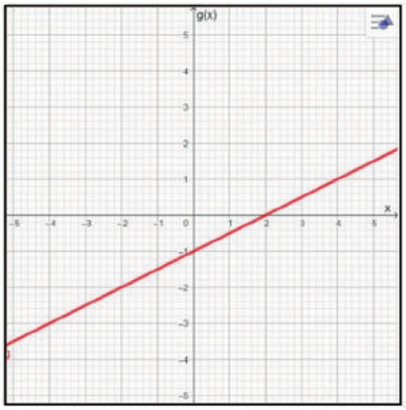
• $G(x) = - 0,03x – 0,001$: ângulo obtuso em relação ao eixo x; cruza y no ponto (0,-0,001)

• $T(r) = 2 \pi r$: ângulo agudo em relação ao eixo x; cruza y no ponto (0,0)

b) Analisando os gráficos, complete os espaços com suas considerações sobre os coeficientes angular e linear que compõem a representação algébrica de cada função.

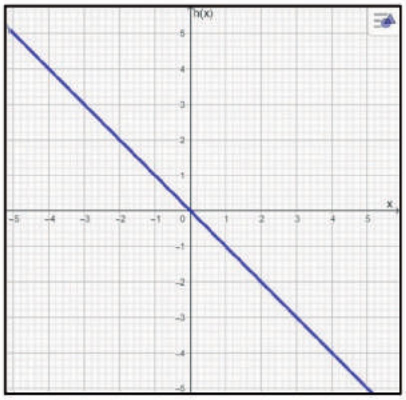


• A representação algébrica da função f(x) terá coeficiente angular maior que zero (ângulo agudo) e seu coeficiente linear será igual a zero. Exemplo: f(x) = 5x.



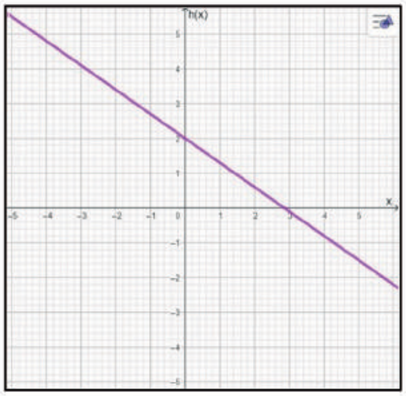
A representação algébrica da função g(x) terá coeficiente angular maior que zero (ângulo agudo) e seu coeficiente linear será igual a -1.

Exemplo: g(x) = 2x -1.



A representação algébrica da função h(x) terá coeficiente angular menor que zero (ângulo obtuso) e seu coeficiente linear é igual a 0.

Exemplo: h(x) = -3x.



A representação algébrica da função p(x) terá coeficiente angular menor que zero (ângulo obtuso) e seu coeficiente linear é igual a 2.

Exemplo: p(x) = -3x + 2.

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 8

MÁXIMO E MÍNIMO DE PARÁBOLAS (4 aulas)

As atividades propostas nesta sequência contribuem para o desenvolvimento da habilidade: Resolver problemas que envolvam os pontos de máximo ou de mínimo no gráfico de uma função polinomial do 2º grau. O sucesso do aluno na resolução de problemas , como já comentado em outras sequências depende, além dos aspectos voltados à leitura e interpretação, de seu conhecimento conceitual e dos recursos de procedimentos e de cálculo que possui. Desse modo, esta sequência trata de conhecimentos específicos, tendo em vista o desenvolvimento da habilidade prevista. Assim, nesta sequência pretende-se que os alunos desenvolvam as seguintes aprendizagens:

- identifiquem situações em que se deseja obter o máximo ou o mínimo determinados por funções polinomiais de 2º grau;
- reconheçam que os valores de máximo ou de mínimo estão vinculados ao vértice da parábola;
- identifiquem que para o valor máximo de uma situação a parábola terá a concavidade voltada para baixo e para o valor mínimo a concavidade estará voltada para cima;
- resolvam problemas diversos envolvendo os conceitos de máximo e mínimo da função polinomial de 2º grau.

Em nossas situações diárias muitas vezes usamos a expressão "no máximo" ou "no mínimo" querendo dizer que estamos determinando um certo tempo, valor, quantidade de algo que não esperamos ultrapassar. Então, vamos usar essa ideia para discutir sobre o valor máximo ou mínimo a ser atingido por uma função polinomial do 2º grau.

8.1 ATIVIDADE 1 ATINGINDO O MÁXIMO (2 aulas)

Vamos começar pensando em problemas sobre como chegar ao máximo.

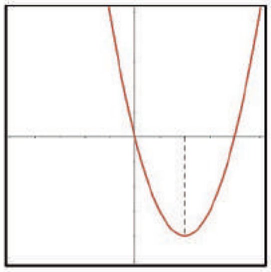
a) Para descrever acrobacias aéreas um avião a jato descreve arcos no formato de uma parábola de acordo com a seguinte função $y = -x^2 + 60x$. Qual a altura máxima atingida pelo avião? Vamos resolver juntos esse problema!

A primeira coisa a fazer é construir um esboço do gráfico da parábola. Eu vou dando as dicas e você vai completando.

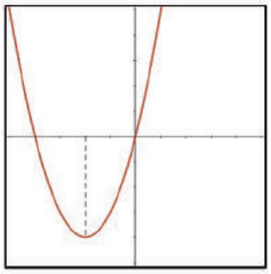
• Analisando a expressão $y = -x^2 + 60x$ podemos colher duas informações importantes sobre como será essa parábola.

A primeira é o fato de que o coeficiente de x^2 é negativo, o que significa que a concavidade da parábola será voltada para baixo.

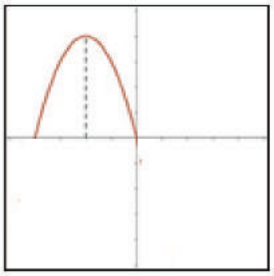
A segunda é que o termo independente de x nessa expressão algébrica é igual a zero, o que significa que a parábola deve cortar os eixos x e y em um único ponto. Usando essas duas informações indique qual dos esboços podemos usar para resolver o problema.



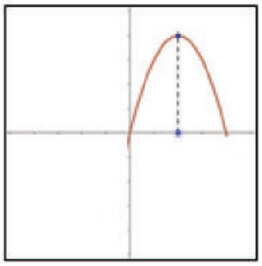
(   )



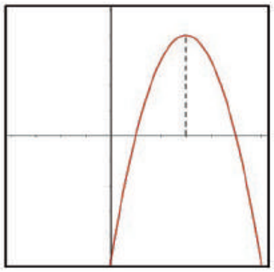
(   )



(x)



(x)



(   )

Provavelmente você assinalou dois deles que atendem às duas primeiras condições. Mas, vamos a mais uma consideração sobre o enunciado do problema. Trata-se de acrobacias de um avião, então não faz sentido tomarmos valores negativos para x e y.

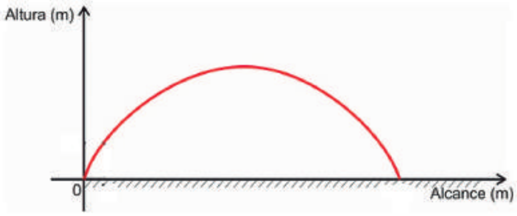
• Agora que já temos uma ideia de como é a curva que o avião faz, podemos pensar em encontrar o ponto de máximo. Observe o esboço que marcou, o ponto de máximo está localizado no vértice da parábola.

• Pesquise sobre quais possibilidades de cálculo podem ser usadas para determinar os valores de x e de y para esse ponto e, assim dê a resposta ao problema.

Professor incentive os alunos a buscarem as informações sobre a obtenção das coordenadas de x e y do vértice, mas dê mais ênfase no fato de que a abcissa desse ponto é o ponto médio entre as abcissas dos pontos onde a parábola corta o eixo x. Demonstre a eles que a fórmula para o " x do vértice" expressa exatamente isso.

Agora, aplique o que descobriu nessas discussões para resolver outros problemas.

b) Um projétil, disparado para cima, a partir do solo, com uma certa inclinação descreve uma trajetória dada pela curva $y=-0,5x^2+5x$, onde x e y são as distâncias na horizontal e na vertical, como indicado no esboço abaixo.



• Determine, em metros, o alcance deste projétil.

O alcance corresponde ao ponto onde o projétil atinge o solo, logo trata-se do ponto onde a parábola corta o eixo x, portanto y = 0: $-0{,}5x^2+5x=0$, logo tem-se x = 10 m.

• A altura máxima, em metros, atingida pelo projétil é:

a) 10 b) 10,5 c) 12 d) 12,5 e) 13

Como x_v é o ponto médio entre as duas raízes temos:

$x_v = 5$, logo $y_v = 12{,}5$

c) O lucro mensal de uma empresa é dado por L(x)= – x² + 30x –5, onde x é a quantidade mensal vendida. Determine o lucro mensal máximo possível que essa empresa pode obter.

Pode-se optar por vários caminhos para obter a solução:

• Determinam-se as raízes, o ponto médio entre elas e o valor de y para esse ponto médio

$\Delta = b^2 - 4ac = 30^2 - 4(-1)(-5)=880$

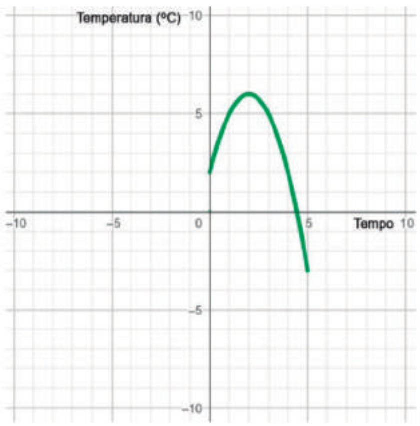
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-30 \pm \sqrt{880}}{2\,(-1)} = \frac{-30 \pm 29{,}66}{-2} \begin{cases} x_1 = 0{,}17 \\ x_2 = 29{,}83 \end{cases} \rightarrow x_m = 15 \rightarrow L\,(15)= -15^2 + 30 \times 15 - 5 = 220$$

• Outra maneira de obter o valor do máximo pela fórmula do y do vértice:

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{880}{4(-1)} = 220$$

d) Durante o processo de tratamento uma peça de metal sofre uma variação de temperatura descrita pela função: f(t)= 2 + 4t – t², 0 < t < 5. Determine o instante t em que a temperatura atinge seu valor máximo.

Professor antes de os alunos começarem a discutir esse problema faça um levantamento sobre a compreensão do texto, pois há aí os termos temperatura e tempo em que ambos começam com a letra t e os alunos precisarão distinguir se a variável dependente é a temperatura ou o tempo, para entenderem o que estão de fato buscando. Além disso, há uma informação complementar (0 < t < 5) que também precisará ser discutida.



$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4(-1)(2) = 24 = 4{,}9$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{24}{4(-1)} = 6$$

8.2 ATIVIDADE 2 QUANDO O MÍNIMO É BOM

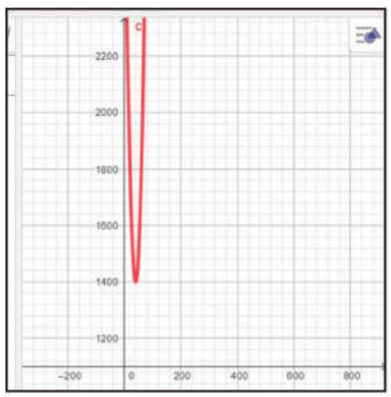
Neste grupo de problemas você deverá continuar aplicando as descobertas anteriores, mas agora é para obter o mínimo.

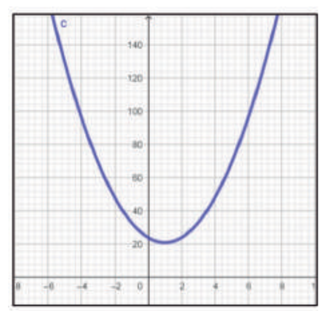
a) Uma empresa produz um determinado produto com o custo definido pela seguinte função $C(x)= x^2 - 80x+3.000$. Considerando o custo C em reais e x a quantidade de unidades produzidas, determine a quantidade necessária de unidades para que o custo seja mínimo. Valide sua resposta com o Geogebra.

$\Delta = b^2 - 4ac = (-80)^2 - 4(1)(3000) = -5600$ Não existem raízes reais

$y_m = -\dfrac{\Delta}{4a} = \dfrac{5600}{4(1)} = 1400$

b) Considere a função dada por $y = 3t^2 - 6t + 24$, na qual y representa a altura, em metros, de um móvel, no instante t, em segundos. O ponto de mínimo da função corresponde ao instante em que:





a) Valor de máximo da função.
b) o móvel se encontra no ponto mais distante do eixo y.
c) valor de mínimo da função.
d) O móvel se encontra no ponto mais próximo do eixo y.
e) o móvel se encontra no ponto mais distante da origem.

c) A soma e o produto das raízes de uma função do 2° grau são, respectivamente, 6 e 5. Se o valor mínimo dessa função é -4, determine as coordenadas do vértice. Pesquise sobre a relação que existe entre a soma e o produto das raízes com a representação algébrica da função polinomial de 2º grau.

Professor estimule os alunos a buscarem informações sobre a relação indicada na questão. Proponha que realizem a soma e o produto das raízes em sua forma algébrica para que reconheçam a possibilidade de usar esse recurso para a escrita da expressão algébrica da função: $y = x^2 - Sx + P$

$y = x^2 - 6x + 5$

$y_v = -4$

$x_v = -\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{6}{2} = 3$ V(3,-4)

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 9

UM OLHAR PARA OUTRAS TABELAS E GRÁFICOS (4 aulas)

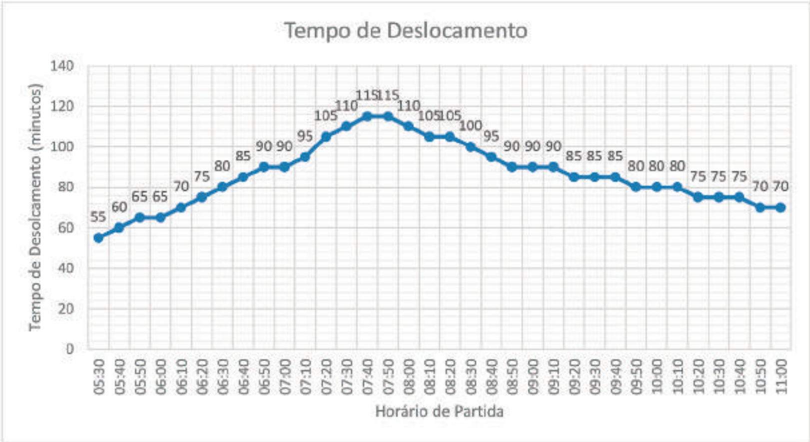
As atividades propostas nesta sequência contribuem para o desenvolvimento da habilidade: Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos. Vamos continuar propondo e discutindo a resolução de problemas. O tema também continuará sendo gráficos e tabelas, mas agora aqueles que os alunos encontram nos meios de comunicação. As aprendizagens a serem desenvolvidas pelos alunos são:

- leitura e interpretação de enunciados de problemas matemáticos, identificando diferentes registros de representação empregados – gráficos ou tabelas;
- identificação dos dados relativos ao problema presentes nos gráficos ou tabelas;
- aplicação de procedimentos e cálculos adequados para a resolução;
- validação do resultado encontrado para argumentar e justificar a solução dada.

Nesta sequência vamos continuar tratando com tabelas e gráficos, mas aquelas que encontramos nos meios de comunicação ou em apresentações de pesquisas estatísticas. Estes também precisam ser analisados cuidadosamente para que as informações colhidas não sejam equivocadas.

9.1 ATIVIDADE 1 A INFORMAÇÃO ESTÁ AÍ, É SÓ ENCONTRÁ-LA! (2 aulas)

a) Tentando otimizar seu tempo no trânsito, um motorista montou um gráfico contendo o tempo gasto por ele para ir de casa ao trabalho em diferentes horários da manhã.



Necessitando chegar ao seu trabalho até às 10:00, deve sair de casa no máximo em que horário?

O primeiro movimento a ser feito é o de ler e entender como o gráfico está apresentando as informações. Para isso, vá preenchendo os espaços.

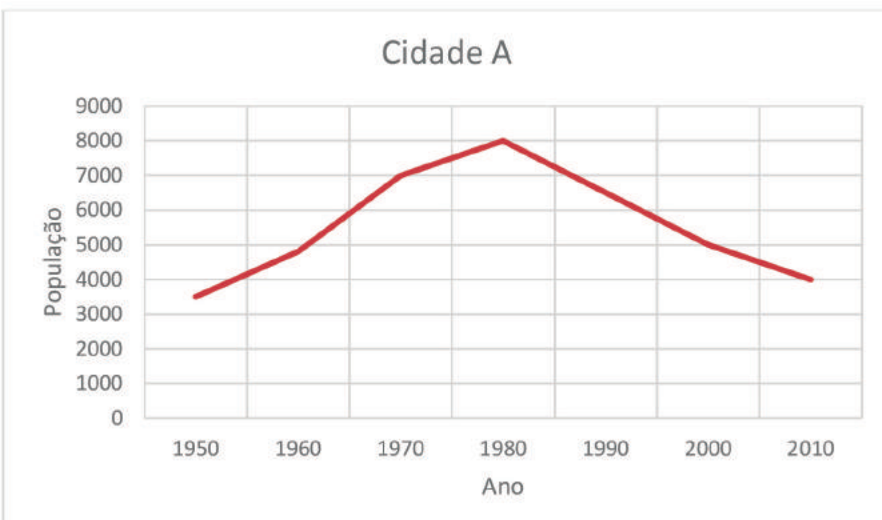
• No eixo horizontal estão marcados os dados de horas da manhã, isto é, o horário que o trabalhador sai para o trabalho.

• No eixo vertical estão marcados os tempos de deslocamento de sua casa ao trabalho, isto é, quantos minutos o trabalhador trabalhador demora para chegar ao trabalho.
• Os números assinalados no gráfico correspondem ao valor exato correspondente ao tempo de deslocamento
O segundo movimento é analisar os horários de partida e acrescentar a ele tempo de deslocamento para verificar qual resultado mais se aproxima de 10:00. Assim, o horário de partida do trabalhador deverá ser, no máximo, às 8h10min, para não se atrasar. Você poderá propor que organizem uma tabela como a abaixo, com alguns horários que consideram interessantes para fazerem os cálculos.

Aplique esse modo de pensar para resolver o próximo problema.

Hora	Tempo (min)	Chegada
07:40	115	09:35
07:50	115	09:45
08:00	110	09:50
08:10	105	09:55
08:20	105	10:05
08:30	100	10:10
08:40	95	10:15
08:50	90	10:20
09:00	90	10:30

b) O movimento populacional de uma pequena cidade foi acompanhado ao longo de 60 anos, como mostra o gráfico abaixo.



1. De acordo com o gráfico, o pico populacional da cidade ocorreu no:
a) início da década de 70.
b) meio da década de 70.
c) início da década de 80.

d) meio da década de 80.

2. No período de crescimento populacional o aumento no número de habitantes foi de:

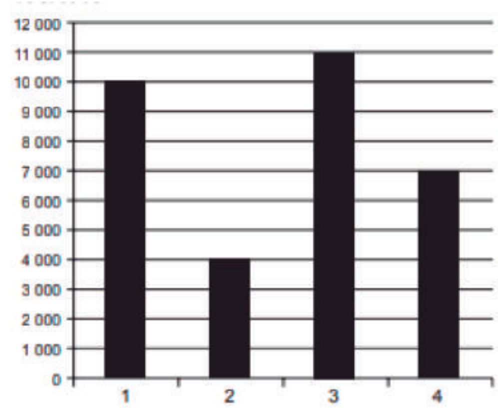
a) 8.000.

b) 5.000.

c) 4.500.

d) 3.500.

O aumento do número de jovens e adultos que estão deixando a barba crescer e cuidando dela em barbeiros especializados levou uma empresa de produtos para barba e cabelo estudar o aumento de sua produção. O gráfico apresenta a produção de quatro setores da empresa.

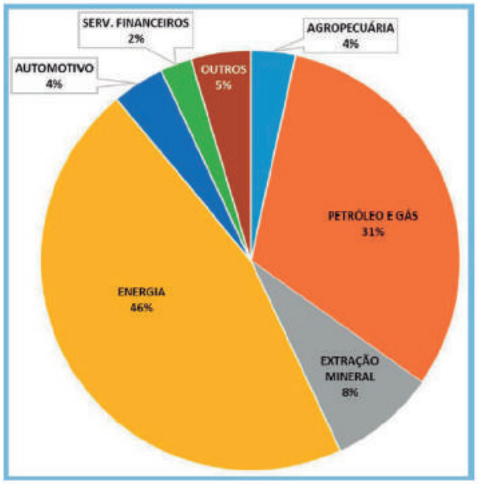


Diante dos resultados decidem investir no setor de menor produtividade de modo a alcançarem um total de 34.000 produtos.

• O setor a receber investimento deverá ser o 2, que hoje produz 4000 produtos.

• O aumento esperado na produção desse setor será de 2000 produtos.

d) O gráfico abaixo apresenta os investimentos chineses no Brasil de 2013 a abril de 2018, de acordo com o Ministério do Planejamento do Brasil[1].



Nota-se que apenas dois dos setores de investimento correspondem a 50% do total. Quais são esses setores?Existem duas soluções possíveis para a pergunta formulada:

Energia (46%) + Automotivo (4%) ou

Energia (46%) + Agropecuária (4%)

Sabendo que foi destinado US$2,77 bilhões a outros investimentos, qual o total investido no Brasil, pela China, neste período?

Total investido em Outros Setores (5%) foi de US$ 2,77 bilhões.

Professor estimule os alunos a pensarem proporcionalmente quando a situação é tão favorável como essa. Se sabem quanto corresponde a 5%, então a 10% será o dobro e 100% será 10 vezes 10%. Assim, 100% corresponderá a US$55,4 bilhões.

1 Disponível em http://www.planejamento.gov.br/apresentacoes/2018/apresentacao-_-relacoes-economicas-entre-brasil-e-china-_.pdf/view, acessado em 22/6/2019

9.2 ATIVIDADE 2 TABELAS E CÁLCULOS (2 aulas)

a) Cinco cidades vizinhas ofereceram terrenos para construção de um hospital para idosos. Como critério de decisão, o governo do estado irá optar pela cidade com maior número de idosos. A tabela abaixo apresenta os dados a serem considerados nesta decisão. Qual cidade receberá o hospital?

Município	População	Idosos (%)
A	105.000	10%
B	84.000	14%
C	67.000	17%
D	95.000	11%
E	87.000	12%

• Do mesmo modo que para os gráficos, é preciso ler a tabela com atenção! Talvez você já esteja pensando em responder que seria a cidade C, só porque tem o maior percentual ou a cidade A, porque tem o maior número de habitantes. Mas, volte ao texto do problema e transcreva aqui o trecho que indica o que devemos encontrar: devemos encontrar a cidade com maior número de pessoas idosas.

• Diante do que devemos encontrar, será preciso fazer cálculos. Você se lembra das porcentagens? Vou dando as dicas e você vai completando.

10% de 105.000 é o mesmo que $\frac{10}{100}$. 105.000 = $\frac{1}{10}$. 105.000 = 10.500

14% de 84.000 é o mesmo que $\frac{14}{100}$. 84.000 = 11.760

17% de 67.000 o mesmo que $\frac{17}{100}$ ·67.000= 11.390

11% de 95.000 é o mesmo que $\frac{11}{100}$ ·95.000 = 10.450

12% de 87.000 é o mesmo que $\frac{12}{100}$ ·87.000 = 10.440

Agora, diante dos cálculos, aponte a cidade que receberá o hospital B

b) Apesar da eficácia e importância da vacina, cresce o número de pessoas que se recusam a vacinar seus filhos, fomentando um movimento perigoso que pode trazer de volta doenças como a poliomielite (paralisia infantil) que estava erradicada no Brasil. A tabela abaixo traz dados alarmantes quanto a isso.

Percentual de municípios com coberturas vacinais adequadas por tipo de vacinas (Homogeneidade de coberturas vacinais), Brasil. 2011 a 2016[2]

Imunobiológicos	2011	2012	2013	2014	2015	2016
BCG	53,7	47,4	40,1	46,2	54,9	44,5
Poliomielite	71,2	57,5	44,7	51,2	60,4	43,1
DTP/Hib/HB	70,4	54,8	59,9	49,7	64,0	50,5
Rotavírus	58,0	52,7	44,7	50,6	71,0	59,9
Pneumocócica	47,0	49,3	56,8	48,8	60,7	59,5
Meningococo C	72,4	52,2	64,1	50,0	65,5	54,3
Tríplice Viral	65,0	61,4	75,1	55,2	58,8	58,9

Fonte: MS/SVS/DEVIT/CGPNI/Sistema de informação do Programa Nacional de Imunizações (http://pni.datasus.gov.br)

• Sabendo que o Brasil possui 5.570 municípios, qual a quantidade de municípios em que a população não estava devidamente protegida contra a poliomielite, em 2016? Apenas 43,1%, ou 2400 dos municípios brasileiros estavam em 2016 protegidos contra a Poliomielite. Assim
5570 - 2400 = 3.170, ou 56,9% dos municípios apresentavam falhas na imunização.

c) Uma família tem o seguinte consumo mensal de energia elétrica.

Equipamento	Potência (W)	Quantidade	Horas utilizadas por dia	Consumo Mensal (W)
Iluminação - LFC	24	10	6	43.200
Máquina de Lavar	300	1	1	9.000
Geladeira	84	1	24	60.480
Forno Elétrico	800	1	0,2	4.800
Ferro de Passar	400	1	0,5	6.000
Chuveiro	5.500	1	0,4	66.000
Liquidificador	300	1	0,1	900
Televisor	70	2	2	8.400
			Total	198.780

Diante desse registro estão pensando em fazer algumas mudanças para economizar. Se o chuveiro for trocado por um de 4.400W e deixarem de usar quatro lâmpadas quanto diminuiriam em seu consumo mensal?

consumo mensal = potência x quantidade x horas utilizadas por dia x 30.

• O consumo mensal de um chuveiro de 4.400W será de: 4.400 x 1 x 0,4 x 30 = 52.800W
• Então, essa economia será de 66.000 – 52.800 = 13.200W.
• Quatro lâmpadas a menos reduziria o consumo em 24 x 4 x 6 x 30 = 17.280W.
• A redução mensal seria de 13.200 + 17.280 = 30.480W

2 Disponível em https://www.conass.org.br/consensus/queda-da-imunizacao-brasil/

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 10

PROBLEMAS DE CONTAGEM (5 aulas)

As atividades propostas nesta sequência contribuem para o desenvolvimento da habilidade: Resolver problema de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples, arranjo simples e/ou combinação simples. Vamos continuar propondo e discutindo a resolução de problemas. O tema é bem interessante e poderá mobilizar bastante os alunos, porém eles utilizarão um tipo diferente de pensamento, o combinatório, que normalmente não é muito explorado na escola. As aprendizagens a serem desenvolvidas pelos alunos são:

- leitura e interpretação de enunciados de problemas envolvendo a contagem, identificando diferentes modos de referência aos dados e situações apresentadas;
- identificação das informações que determinam os tipos de organização dos dados para determinação do procedimento a ser utilizado;
- aplicação de procedimentos e cálculos adequados para a resolução – permutação e combinação;
- validação do resultado encontrado para argumentar e justificar a solução dada.

Os problemas de contagem exigem uma leitura apurada e discussões com os colegas para que a interpretação e compreensão dos enunciados aconteça. Discuta com seus colegas sobre como cada um entende a proposta e, se achar necessário, reescreva de um modo que fique mais claro para você. Professor é fundamental que os alunos discutam os enunciados para compreenderem detalhes nos textos dos problemas que não podem passar despercebidos.

10.1 ATIVIDADE 1 PRINCÍPIO FUNDAMENTAL (2 aulas)

a) Vamos começar a conversar sobre o princípio fundamental da contagem que diz que se há x modos de tomar uma decisão D1 e, tomada a decisão D1, há y modos de tomar a decisão D2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D1 e D2 é x vezes y (xy).
Professor, confira se todos os alunos entenderam o que está aí escrito. Peça que expliquem com suas palavras para que você tenha condição de avaliar o nível de entendimento e verificar se precisam de novas discussões.

Vamos aplicar esse princípio em algumas situações.
• Com 5 homens e 5 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal? Vamos pensar nas decisões a serem tomadas.

D1: A escolha do homem.
Qual a quantidade de escolhas que se tem? 5
D2: A escolha da mulher.
Qual a quantidade de escolhas que se tem? 5
Aplicando o princípio fundamental, de quantos modos é possível formar um casal? 5 x 5 = 25 Se achar interessante proponha uma vivência da situação para que eles percebam as possibilidades que estão sendo apresentadas.
• Quantos são os números de três algarismos distintos?
Nesta situação é preciso verificar o entendimento do que seja montar esse número, isto é, por onde va-

mos começar a escrevê-lo, pela unidade ou pela centena? Vamos deixar combinado que vamos montar como normalmente escrevemos um número, da esquerda para a direita.

____ ____ ____
1º 2º 3º

Agora vamos às decisões!

D1: A escolha do primeiro algarismo.

Qual a quantidade de escolhas que se tem? 9. Novo cuidado com o enunciado! Justifique sua decisão Espera-se que o aluno perceba que para o número ter 3 algarismos ele não pode começar com o 0

D2: A escolha do segundo algarismo.

Qual a quantidade de escolhas que se tem? 9. Novo cuidado com o enunciado! Justifique sua decisão Espera-se que o aluno perceba que se os algarismos devem ser distintos ele não poderá ser igual ao primeiro.

D3: A escolha do terceiro algarismo.

Qual a quantidade de escolhas que se tem? 8. Justifique sua decisão Espera-se que o aluno reconheça não poder usar os que já foram pensados nas posições anteriores.

Aplique o princípio fundamental para descobrir quantos são os números de três algarismos distintos.

9 x 9 x 8 = 648

• Quantos são os números ímpares com 4 algarismos?

Professor, mantenha com os alunos o esquema anterior para a resolução de todos os problemas. A intenção é a de organizar o pensamento para a superação das dificuldades com esse tipo de problema.

1º algarismo: 9 possibilidades, pois o 0 não pode estar na primeira posição, senão o número teria 3 algarismos.

2º algarismo: 10 possibilidades, o zero pode ser usado.

3º algarismo: 10 possibilidades.

4º algarismo: somente ímpares: 1,3,5,7,9

Total de combinações: 9 x 10 x 10 x 5 = 4.500

• De quantos modos 3 pessoas podem se sentar em 5 cadeiras em fila?

A primeira pode escolher sua cadeira de 5 modos, a segunda de 4 e a terceira de 3. Portanto 5 x 4 x 3 = 60

• De quantos modos se pode responder em uma prova com 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão?

Em cada uma das 10 questões se tem 5 modos de resposta, logo

$5^{10} = 5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5$.

10.2 ATIVIDADE 2 UM RESULTADO A SER MEMORIZADO (1 aula)

a) Alguns problemas de contagem aparecem muito e, então, memorizar como eles são resolvidos é um modo de economizar trabalho. Eles continuam sendo de aplicação do princípio fundamental.

• De quantos modos podemos organizar n objetos distintos em uma fila?

O modo de pensar é o mesmo, o que muda é o modo de representar os números, que serão representados algebricamente para poder ser aplicado em qualquer situação do mesmo tipo.

D1: A escolha do objeto a ocupar a primeira posição.

Qual a quantidade de escolhas que se tem? n.

D2: A escolha do objeto a ocupar a segunda posição.

Qual a quantidade de escolhas que se tem? n - 1.

D3: A escolha do objeto a ocupar a terceira posição.

Qual a quantidade de escolhas que se tem? n - 2.
Dn: A escolha do objeto a ocupar a enésima posição.
Qual a quantidade de escolhas que se tem? 1.

Aplicando o princípio fundamental tem-se:
n (n - 1) (n – 2) (n – 3) ... 1

O produto n (n – 1) (n – 2) (n – 3) ... 1 é chamado de n fatorial e é representado por n!

Cada ordem que se dá aos objetos é chamada de permutação simples.

A permutação simples de n objetos é dada por $P_n = n!$

• De quantos modos 7 livros podem ser dispostos em uma prateleira? 7! = 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 5040
• Quantos são os anagramas da palavra “calor”? 5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120
Quantos começam por consoante? São 3 modos de escolher a consoante para ocupar a primeira posição, depois tem-se a permutação para as outras 4 posições, isto é 4!. Total : 3 x 4! = 3 x 4 x 3 x 2 x 1= 72.

10.3 ATIVIDADE 3 OUTRO RESULTADO A SER MEMORIZADO. (2 aulas)

Em algumas situações queremos selecionar um grupo de objetos distintos entre todos os disponíveis. Aí vem a pergunta:
De quantos modos podemos selecionar *p* elementos distintos entre *n* elementos distintos dados?
Situações deste tipo são chamadas de Combinações Simples e podem ser representadas por

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

a) Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com exatamente 3 homens, podem ser formadas?
Leitura cuidadosa do problema: quantos homens e quantas mulheres devem fazer parte da comissão?
3 homens e 2 mulheres
D1: Dentre os 5 homens, escolher 3.
Qual a quantidade de escolhas que se tem? $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10.$

D2: Dentre as 4 mulheres escolher 2.
Qual a quantidade de escolhas que se tem? $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6.$
Aplicar o princípio fundamental: 10 x 6 = 60.

b) Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com pelo menos 3 homens, podem ser formadas?
Leitura cuidadosa do problema: A expressão “com pelo menos 3 homens” indica que poderá haver comissões compostas por: 3 homens e 2 mulheres, 4 homens e 1 mulher, 5 homens.

D1: Escolha de homens para o primeiro tipo de comissão.
Qual a quantidade de escolhas que se tem? $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10.$

D2: Escolha de mulheres para o primeiro tipo de comissão.
Qual a quantidade de escolhas que se tem? $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$.
Aplicar o princípio fundamental: $10 \times 6 = 60$

D3: Escolha de homens para o segundo tipo de comissão.
Qual a quantidade de escolhas que se tem? $C_5^4 = \frac{5!}{4!(5-4)!} = 5$.

D4: Escolha de mulheres para o segundo tipo de comissão.
Qual a quantidade de escolhas que se tem? $C_4^1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4$.
Aplicar o princípio fundamental: $5 \times 4 = 20$.
Professor comente com os alunos que $0! = 1$ por definição.

D5: Escolha de homens para o terceiro tipo de comissão.
Qual a quantidade de escolhas que se tem? $C_5^5 = \frac{5!}{5!(5-5)!} = 1$.

D6: Escolha de mulheres para o terceiro tipo de comissão.
Qual a quantidade de escolhas que se tem? Como não serão selecionadas mulheres a possibilidade fica apena nos homens.
Aplicar o princípio fundamental: 1.

Resultado final: Soma dos diferentes momentos de aplicação do princípio fundamental.
$60 + 20 + 1 = 81$

c) Tem-se 5 pontos sobre uma reta R e 8 pontos sobre uma reta Q paralela a R. Quantos triângulos com vértices nesses pontos podem ser desenhados?
Leitura cuidadosa do problema: como podem ser selecionados os pontos de cada reta para formar os triângulos? Espera-se que o aluno perceba que ou se pega 1 ponto na reta R e outros 2 na Q, ou 2 na reta R e 1 na reta Q.

D1: Como escolher os pontos da reta R para triângulos do tipo 1? Tomando 1 a 1
Qual a quantidade de escolhas que se tem? 5.

D2: Como escolher os pontos da reta Q para triângulos do tipo 1? 2 a 2.
Qual a quantidade de escolhas que se tem? $C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = 28$.
Aplicar o princípio fundamental: $5 \times 28 = 140$

D3: Como escolher os pontos da reta R para triângulos do tipo 2? 2 a 2
Qual a quantidade de escolhas que se tem? $C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$.

D4: Como escolher os pontos da reta Q para triângulos do tipo 2? 1 a 1.
Qual a quantidade de escolhas que se tem? 8.
Aplicar o princípio fundamental: $10 \times 8 = 80$.

Resultado final: Soma dos diferentes momentos de aplicação do princípio fundamental. $140 + 80 = 220$.

6 - Matemática - EM - 3ª Série.indd 55 18/07/2019 17:02:37

SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES 11

PROBABILIDADE (4 aulas)

As atividades propostas nesta sequência contribuem para o desenvolvimento da habilidade: Calcular a probabilidade de um evento. As aprendizagens a serem desenvolvidas pelos alunos são:

- uso dos termos específicos nas propostas de cálculo de probabilidade – Espaço Amostral e Evento;
- identificação dos elementos que compõem o espaço amostral e os compõem eventos favoráveis à situação a ser resolvida;
- aplicação de procedimentos e cálculos adequados para a obtenção da probabilidade;
- reconhecimento de que a porcentagem é uma forma de representação da probabilidade.

11.1 ATIVIDADE 1 A PROBABILIDADE É UMA RAZÃO

a) Em algum momento você já deve ter pensado na chance de ser sorteado para ganhar algo que queria muito! Vamos pensar um pouco sobre isso!
Imagine que esteja em um grupo de 4 amigos e resolvem fazer uma “vaquinha” para comprar um game e jogarem. Ao final, resolvem sorteá-lo entre vocês. Qual a sua chance de ganhar?

• Para pensar sobre isso, primeiro devemos considerar o número de elementos envolvidos como possíveis sorteados – o Espaço Amostral. Neste exemplo os elementos do espaço amostral são são os quatro amigos que poderão ser identificados com as iniciais de seus nomes, por exemplo: A, B, C e D.

• Agora, pense no número de situações que seriam favoráveis a você neste sorteio. Apenas 1, sorteio de seu nome. Esse número reflete o que chamamos de eventos favoráveis a você.

• Pronto! A chance de você ser sorteado é dada pela razão entre o número de possibilidades favoráveis a você e o número total de possibilidades. Que neste caso será 1 em 4 possibilidades ($\frac{1}{4}$). Esta será a probabilidade de você ser sorteado!

b) Agora, imagine que um de seus amigos diga que se for sorteado ele dará o game a você, então quantas são as possibilidades favoráveis a você? Serão duas possibilidades. E sua probabilidade de ganhar, como fica? 2 em 4 ou $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

c) Imagine que para fazer o sorteio vocês decidam que vão tirar uma carta do baralho, sendo que cada um escolhe um naipe – espada, paus, ouro ou copas. Assim, aquele que tirar uma carta com o naipe escolhido será o vencedor.

• Nessa situação, qual é o espaço amostral? Todas as cartas do baralho, quantos elementos fazem parte dele? São 13 cartas por naipe, sendo 4 naipes (espada, paus, ouro e copas) totalizando 52 cartas.

• Quantos desses elementos são favoráveis a você? 13 cartas de um naipe.

• Qual a probabilidade de você ser sorteado? 13 em 52 ou $\frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

6 - Matemática - EM - 3ª Série.indd 56 18/07/2019 17:02:37

• Mudou a sua situação inicial? Espera-se que o aluno perceba que não é simplesmente aumentando os casos favoráveis a ele que a probabilidade aumenta, tudo depende do espaço amostral.

A probabilidade de ocorrência de um evento é dada pela razão entre o número de casos favoráveis e o número total de casos.

$$P(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número total de casos}}$$

11.2 ATIVIDADE 2 RECORDANDO QUE AS PORCENTAGENS SÃO RAZÕES

a) A porcentagem é uma comparação que fazemos com o número 100. Veja como ele pode ser usado e vá completando os espaços:

• 60% ($\frac{60}{100}$) dos alunos de uma escola são meninas. Isso significa que em cada grupo de 100 alunos, 60 são meninas e, portanto, 40 são meninos.

• Numa loja de games 25% ($\frac{25}{100}$) dos jogos são de guerra, isso significa que em cada grupo de 100 games, 25 são de guerra e os outros meninos são de outras modalidades.

• Na classe da Bia 100% $\frac{100}{100}$ dos alunos trazem seu material em mochilas. Isso significa quetodos os alunos usam mochila.

Será que na classe de Bia tem 100 alunos? Não.

b) Embora a porcentagem indique a comparação com 100, é possível usarmos outras frações, desde que sejam equivalentes à fração de denominador 100. Escreva frações equivalentes a cada uma das porcentagens.

$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = \frac{2}{10} = \ldots$

$30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} = \ldots$

$20\% = \frac{20}{100} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5} = \ldots$

$50\% = \frac{50}{100} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = \ldots$

$25\% = \frac{25}{100} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4} = \ldots$

$75\% = \frac{75}{100} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = \ldots$

c) Quais frações são equivalentes a 100%? Espera-se que o aluno perceba que são as frações equivalentes a 1.

d) Explique como chegou a essa conclusão. Espera-se que o aluno reconheça que o 100% corresponde ao todo considerado.

Dê um exemplo de algo que 100% de seus colegas de classe têm.

Resposta pessoal

Professor observe se todos os alunos reconhecem a identificação do 100% em diferentes situações. Peça a eles que deem outros exemplos e em cada situação, habitue-os a se perguntarem “quem” é o 100%.

11.3 ATIVIDADE 3 ALGUNS PROBLEMAS DE PROBABILIDADE

Professor Permita que os alunos discutam em grupos os enunciados e montem seus processos de solução. Depois, proponha que eles mesmos expliquem seus procedimentos de solução.

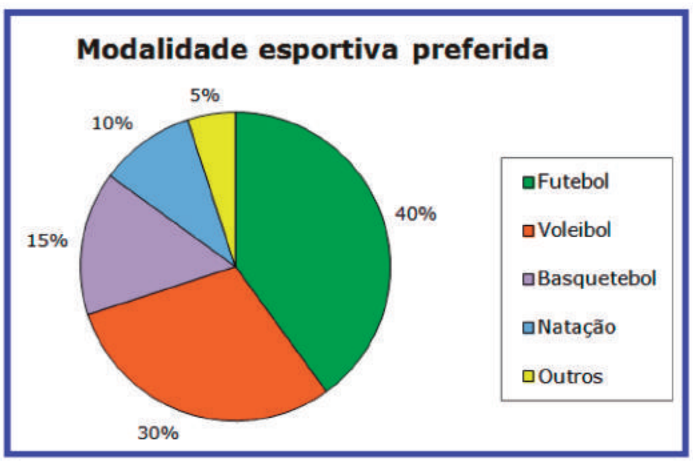
a) As perspectivas de envelhecimento da população mundial estimam que em 2050, nos países desenvolvidos, a população de pessoas com 60 anos ou mais estará próxima de 35% da população. Nessas condições qual será a probabilidade de se escolher, aleatoriamente, uma pessoa de 60 anos ou mais na população dos países desenvolvidos?

• Este problema vai exigir que você utilize seus conhecimentos sobre porcentagem. A porcentagem também é uma razão, pois $35\% = \frac{35}{100}$.

• O que significa essa comparação de 35 com o 100? Se não lembrar, pesquise para responder. É uma razão percentual que estabelece uma comparação equivalente à relação entre os valores absolutos considerados. Professor(a) estimule essa discussão entre os alunos de modo que fique melhor compreendido o significado de uma relação percentual.

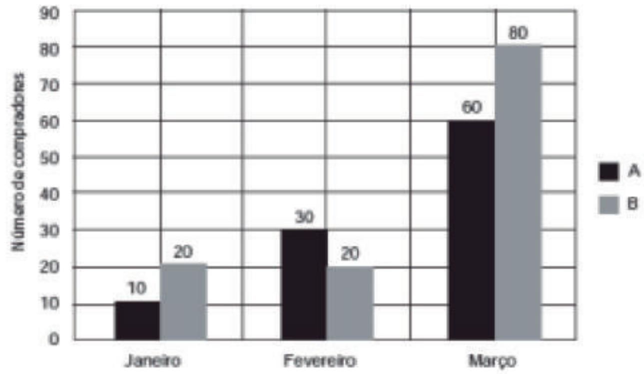
• Diante desse significado, é possível escrever a relação entre o número de casos favoráveis e o número total de casos e chegar à probabilidade pedida. Escreva-a: Serão 35 chances de escolher uma pessoa de 60 anos ou mais dentre 100 pessoas, que equivale a considerar o total de idosos em relação ao total de habitantes. Assim, a probabilidade seria a razão $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$.

b) Em um levantamento feito entre alunos do Ensino Médio de uma escola, sobre os esportes preferidos, chegou-se a esse resultado.



• Qual a probabilidade de se escolher, aleatoriamente, um dos alunos do ensino Médio dessa escola cujo esporte preferido seja futebol ou voleibol? A chance de escolher um aluno que gosta de futebol é de 40% e de voleibol de 30%. Ao escolhermos um aluno do Ensino Médio que goste de futebol ou voleibol aumentamos nossa chance para 40% + 30% = 70%.
Professor discuta com os alunos o significado do “ou” colocado no enunciado. É importante que eles percebam que isso permite que o número de casos favoráveis seja a adição das duas preferências.

c) (ENEM 2013) Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico:



A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro brinde entre os compradores do produto B. Qual a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

a) $\frac{1}{20}$ b) $\frac{3}{242}$ c) $\frac{5}{22}$ d) $\frac{6}{25}$ e) $\frac{7}{15}$

Professor continue a orientar os alunos na busca do número de elementos do Espaço Amostral e do número de casos favoráveis.

Assim, os alunos deverão descobrir que para a loja A o espaço amostral é formado por 100 compradores e para a loja B é formado foram 120.

Para ser sorteado um comprador de fevereiro o número de casos favoráveis para a loja A é 30 e para a B é 20.

$P(A) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

$P(B) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

Como os dois devem acontecer ao mesmo tempo e um é independente do outro aplicamos o princípio multiplicativo $\frac{3}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{20}$

Lançando simultaneamente um dado e uma moeda, qual a probabilidade de obtermos o número 4 no dado e “cara” na moeda?

Professor questione os alunos sobre o que este problema tem de semelhante ao anterior. Discuta as possibilidades do lançamento do dado e as possibilidades do lançamento da moeda para reconhecerem a independência de cada um e a aplicação do princípio multiplicativo entre as probabilidades.

$\frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO ESTADO DE SÃO PAULO
COORDENADORIA PEDAGÓGICA – COPED

Coordenador
Caetano Pansani Siqueira

Assessor Técnico
Vinicius Gonzalez Bueno

Diretora do Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão Pedagógica – DECEGEP
Valéria Arcari Muhi

Diretora do Centro de Ensino Médio – CEM
Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

Diretora do Centro de Anos Finais do Ensino Fundamental – CEFAF
Carolina dos Santos Batista Murauskas

Equipe Curricular de Língua Portuguesa
Katia Regina Pessoa
Mary Jacomine da Silva
Mara Lucia David
Marcos Rodrigues Ferreira
Teônia de Abreu Ferreira

Equipe Curricular de Matemática
Ilana Brawerman
João dos Santos Vitalino
Otávio Yoshio Yamanaka
Vanderley Aparecido Cornatione

COLABORADORES

Redatora de Matemática
Silvia Sentelhas

6 - Matemática - EM - 3ª Série.indd 60 18/07/2019 17:02:38

SÃO PAULO
GOVERNO DO ESTADO

Secretaria de Educação

APRENDER SEMPRE

Material do Professor

APRENDER SEMPRE • Material do Professor • 3ª série - Ensino Médio

Matemática