GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

Caderno do Professor

9º Ano do Ensino Fundamental

Matemática

São Paulo

3º Bimestre de 2019

24ª Edição

APRESENTAÇÃO

A Avaliação da Aprendizagem em Processo – AAP - se caracteriza como ação desenvolvida de modo colaborativo entre a Coordenadoria Pedagógica e a Coordenadoria de Informação, Tecnologia, Evidência e Matrícula.

Iniciada em 2011, em apenas dois anos/séries, foi gradativamente sendo expandida e desde 2015 está abrangendo todos os alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio além de, continuamente, aprimorar seus instrumentos e formas de registro.

A AAP, fundamentada no Currículo do Estado de São Paulo, propõe o acompanhamento da aprendizagem das turmas e alunos, de forma individualizada, tendo caráter diagnóstico. Tem como objetivo apoiar as unidades e os docentes na elaboração de estratégias adequadas, a partir da análise de seus resultados, que contribuam efetivamente para melhoria da aprendizagem e desempenho dos alunos, especialmente nas ações de recuperação contínua.

As habilidades selecionadas para a AAP, em Língua Portuguesa e Matemática, passaram a ter como referência, a partir de 2016, a Matriz de Avaliação Processual elaborada pela COPED e já disponibilizada à rede. Nas edições de 2019 prossegue esse mesmo referencial assim como, nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental permanece a articulação com as expectativas de aprendizagem de Língua Portuguesa e Matemática e com os materiais do Programa Ler e Escrever e Educação Matemática nos Anos Iniciais – EMAI.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação, na forma de cadernos de provas para os alunos, também foram elaborados os respectivos Cadernos do Professor, com orientações específicas para os docentes, contendo instruções para a aplicação da prova (Anos Iniciais), quadro de habilidades de cada prova, exemplar da prova, gabarito, orientações para correção (Anos Iniciais), grade de correção e recomendações pedagógicas gerais.

Estes subsídios, agregados aos registros que o professor já possui e juntamente com as informações incorporadas na Plataforma Foco Aprendizagem, a partir dos dados inseridos pelos docentes no SARA – Sistema de Acompanhamento dos Resultados de Avaliações – devem auxiliar no planejamento, replanejamento e acompanhamento das ações pedagógicas, mobilizando procedimentos, atitudes e conceitos necessários para as atividades de sala de aula, sobretudo aquelas relacionadas aos processos de recuperação das aprendizagens.

COORDENADORIA PEDAGÓGICA
COPED

COORDENADORIA DE INFORMAÇÃO,
TECNOLOGIA, EVIDÊNCIA E MATRÍCULA - CITEM

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA - 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Questão	Código da Habilidade	Descrição
01	MP11	Identificar a existência ou não de semelhança entre duas figuras planas.
02		
03	MP12	Identificar a razão de semelhança entre duas figuras planas.
04		
05	MP13	Identificar a correspondência entre ângulos congruentes de dois triângulos semelhantes.
06		
07	MP14	Resolver problemas envolvendo semelhança de triângulos.
08		
09	MP11	Identificar a existência ou não de semelhança entre duas figuras planas.
10	MP15	Resolver problemas aplicando as relações métricas do triângulo retângulo.
11	MP16	Resolver problemas aplicando as relações trigonométricas do triângulo retângulo.
12		

GABARITO

	A	B	C	D
1	■			
2			■	
3		■		
4		■		
5			■	
6		■		
7			■	
8				■
9				■

	A	B	C	D
10	■			
11				■
12	■			

COMENTÁRIOS E RECOMENDAÇÕES PEDAGÓGICAS

A premissa básica, a respeito de um processo avaliativo deve ser considerada como instrumento que subsidiará tanto o aluno no seu desenvolvimento cognitivo, quanto ao professor no redimensionamento de sua prática pedagógica.

Desta forma, a avaliação da aprendizagem passa a ser um instrumento que auxiliará o educador a atingir os objetivos propostos em sua prática educativa, neste caso a avaliação sob essa ótica deve ser tomada na perspectiva diagnóstica, servindo como instrumento para detectar as dificuldades e possibilidades de desenvolvimento do educando.

Neste sentido, as 12 questões que constam deste caderno, procuram verificar o nível de desenvolvimento das habilidades descritas na Matriz de Avaliação Processual de Matemática, notadamente as do 2º bimestre letivo.

Nas linhas a seguir, apresentamos uma breve caracterização das habilidades e o seu respectivo conteúdo.

- ☐ *(MP11) – Identificar a existência ou não de semelhança entre duas figuras planas.*

Ao identificarmos se duas figuras são semelhantes, poderemos estabelecer, as relações de proporcionalidade que demandam a realização de operações algébricas e a mobilização de estratégias de raciocínio não exigidas anteriormente

- ☐ *(MP12) – Identificar a razão de semelhança entre duas figuras planas.*

Ao identificarmos se duas figuras são semelhantes, poderemos estabelecer, as relações de proporcionalidade que demandam a realização de operações algébricas e a mobilização de estratégias de raciocínio não exigidas anteriormente.

- ☐ *(MP13) – Identificar a correspondência entre ângulos congruentes de dois triângulos semelhantes.*

Além da proposição de problemas, o desenvolvimento desta habilidade tem como objetivo a identificação de correspondência entre as medidas dos lados de triângulos semelhantes a partir da identificação dos ângulos congruentes, lembrando que o não cumprimento dessa etapa, conduz normalmente, à escrita de falsas proporcionalidades.

- ☐ *(MP14) – Resolver problemas envolvendo semelhança de triângulos.*

Neste caso a apresentação de situações envolvendo a semelhança de triângulos, segue a condição: "O triângulo é o único tipo de polígono para qual a semelhança é definida apenas a partir de uma condição: ângulos correspondentemente congruentes. A proporcionalidade entre as medidas dos lados passa a ser, nesse caso, consequência, e não exigência, como ocorre para os demais polígonos.

- ☐ *(MP15) – Resolver problemas aplicando as relações métricas do triângulo retângulo.*

Neste caso a apresentação de situações envolvendo a semelhança de triângulos, segue a condição: "O triângulo é o único tipo de polígono para qual a semelhança é definida apenas a partir de uma condição: ângulos correspondentemente congruentes. A proporcionalidade entre as medidas dos lados passa a ser, nesse caso, consequência, e não exigência, como ocorre para os demais polígonos.

- ☐ *(MP16) – Resolver problemas aplicando as relações trigonométricas do triângulo retângulo.*

Para finalizar o diagnóstico do desenvolvimento das habilidades relativo ao 3º bimestre, inserimos o tratamento das razões trigonométricas que parte da fixação da medida do ângulo agudo do triângulo retângulo e da obtenção dos valores de suas razões (seno, cosseno e tangente). Trata-se, portanto, destacando o fato de que as razões trigonométricas são, prioritariamente, associadas ao ângulo, e não às medidas dos lados do triângulo retângulo.

Finalmente, a avaliação, entendida aqui como processual, haverá que ser percebida como um processo de mapeamento e da diagnose do processo de aprendizagem, ou seja, a obtenção de indicadores qualitativos do processo de ensino-aprendizagem no trabalho docente.

É importante salientar que as observações que constam nas grades de correção deste caderno são apenas pressupostos de resolução, cabendo ao professor analisar os registros dos alunos e não considerar as observações indicadas como norma padrão e que o objetivo maior, é a proposição de uma grade de correção pelo próprio professor e assim realizar uma análise de acordo com a realidade do processo de ensino-aprendizagem desenvolvido em sala de aula.

Equipe Curricular de Matemática – CEFAF/CEM-COPED

Habilidade MP11	Identificar a existência ou não de semelhança entre duas figuras planas.

Questão 1

Para garantirmos que dois polígonos sejam semelhantes é necessário que:

I. Possuam o mesmo número de lados.
II. Os lados correspondentes sejam proporcionais.
III. Os ângulos internos correspondentes sejam congruentes.
IV. O número de lados seja proporcional.

A alternativa que garante a proporcionalidade é:

(A) **I, II e III**

(B) II, III e IV

(C) I, III e IV

(D) I, II e IV

Correção Comentada

O objetivo da questão é que o aluno identifique a existência de semelhança entre duas figuras planas a partir de uma ampliação ou uma redução.

Para que dois polígonos sejam semelhantes, deve existir proporcionalidade entre seus lados correspondentes, além de ângulos correspondentes congruentes.

Das alternativas propostas, as que garantem que dois polígonos sejam semelhantes são: I, II e III.

A alternativa correta é a letra **(A).**

(A)

I, II e III	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado para resolver a questão. Entende as condições necessárias para que dois polígonos sejam semelhantes: deve existir proporcionalidade entre seus lados correspondentes, além de ângulos correspondentes congruentes.**

(B)

II, III e IV	Resposta incorreta.	O aluno provavelmente confundiu o termo “proporcionais” com “iguais” ao afirmar que o item IV é verdadeiro. Professor, precisa retomar com este aluno as condições necessárias para que dois polígonos sejam semelhantes ressaltando a diferença entre proporcionalidade e congruência.

(C)

I, III e IV	Resposta incorreta.	O aluno provavelmente confundiu o termo “proporcionais” com “iguais” ao afirmar que o item IV é verdadeiro e ao excluir o item II provavelmente confundiu “número de lados” (item I) com as medidas dos lados (que referencia a item II). Professor, precisa retomar com este aluno as condições necessárias para que dois polígonos sejam semelhantes ressaltando a diferença entre proporcionalidade e congruência, bem como medida de lados e quantidade de lados.

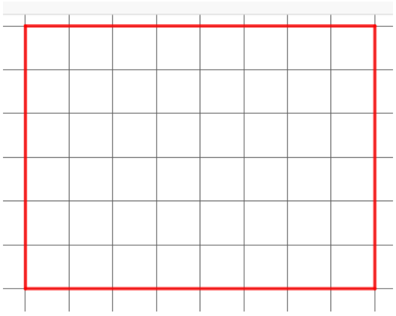
(D)

I, II e IV	Resposta incorreta.	O aluno provavelmente confundiu o termo “proporcionais” com “iguais” ao afirmar que o item IV é verdadeiro e ao excluir o item III provavelmente não considera esta condição necessária. Professor, precisa retomar com este aluno as condições necessárias para que dois polígonos sejam semelhantes ressaltando a diferença entre proporcionalidade e congruência, bem como dar alguns contraexemplos para mostrar a veracidade do item III (quadrado e losango)

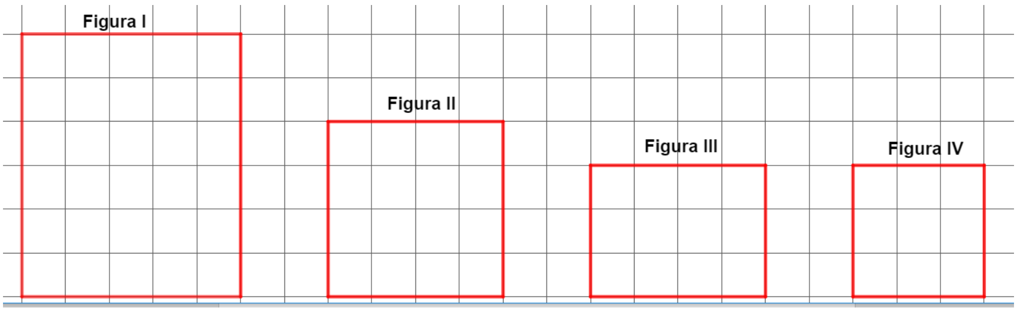
Habilidade MP11	Identificar a existência ou não de semelhança entre duas figuras planas.

Questão 2

Observe a figura, desenhada no quadriculado 1 x 1



Das figuras reduzidas abaixo (desenhada no quadriculado 1 x 1), a semelhante à figura acima é:



(A) Figura I

(B) Figura II

(C) **Figura III**

(D) Figura IV

O objetivo da questão é que o aluno identifique a existência de semelhança entre duas figuras planas a partir de uma ampliação ou uma redução.

A figura dada é um retângulo de 8 x 6 (possui quatro lados e ângulos internos de 90°) onde a razão entre o se comprimento e a sua largura é $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

Para garantirmos que dois polígonos sejam semelhantes é necessário que:

- Possuam o mesmo número de lados.
- Os lados correspondentes sejam proporcionais
- Os ângulos internos correspondentes sejam congruentes

As alternativas propostas possuem o mesmo número de lados e os ângulos internos de 90°, portanto seus ângulos são congruentes. Faltando verificar qual a figura das alternativas **guarda a razão $\frac{4}{3}$ entre seus lados**.

A figura I é um retângulo 5 x 6, a razão entre seus lados é $\frac{5}{6}$

A figura II é um retângulo 4 x 4, a razão entre seus lados é $\frac{4}{4} = 1$

A figura III é um retângulo 4 x 3, a razão entre seus lados é $\frac{4}{3}$

A figura IV é um retângulo 3 x 3, a razão entre seus lados é $\frac{3}{3} = 1$

Outra opção seria encontrar a razão (que deve ser constante) entre os lados da figura dada com os lados correspondentes das figuras das alternativas. Encontramos esta razão (constante) com a figura III.

$$\frac{lado\ da\ figura\ dada}{lado\ da\ figura\ III} = \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = 2$$

Portanto, concluímos que:

O retângulo da **figura III** é uma redução do retângulo dado, pois os ângulos são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais.

A alternativa correta é a letra **(C).**

(A)

Figura I	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno observou que a figura I possui 6 quadradinhos de altura como a figura dada e considerou isto suficiente para sua afirmativa. Professor, precisa retomar com este aluno as condições necessárias para que dois polígonos sejam semelhantes, ressaltando que todos os lados devem ser proporcionais, para isto a necessidade de compará-los.

(B)

Figura II	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno observou que a figura II possui 4 quadradinhos no comprimento e que é a metade dos 8 quadradinhos da figura dada e considerou isto suficiente para sua afirmativa. Professor, precisa retomar com este aluno as condições necessárias para que dois polígonos sejam semelhantes, ressaltando que a divisão exata **entre um par** de lados não é garantia de proporcionalidade, mas que todos os lados devem ser proporcionais, para isto a necessidade de compará-los.

(C)

Figura III	**Resposta correta.**	**O aluno demonstra ter verificado as condições necessárias para que ocorra a semelhança entre figuras planas, mostrando assim ter a habilidade averiguada na questão.**

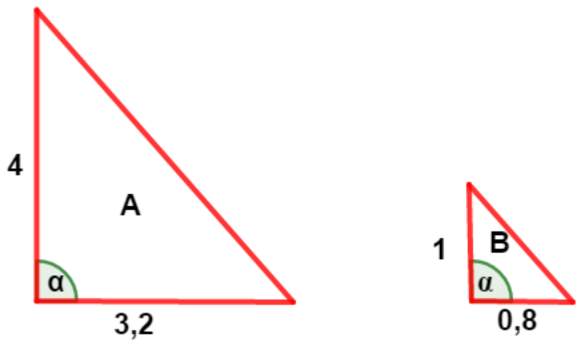
(D)

Figura IV	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno observou que a figura IV possui 3 quadradinhos na altura e que é a metade dos 6 quadradinhos da figura dada e considerou isto suficiente para sua afirmativa. Professor, precisa retomar com este aluno as condições necessárias para que dois polígonos sejam semelhantes, ressaltando que a divisão exata **entre um par** de lados não é garantia de proporcionalidade, mas que todos os lados devem ser proporcionais, para isto a necessidade de compará-los.

Habilidade MP12	Identificar a razão de semelhança entre duas figuras planas.

Questão 3

Observe os triângulos A e B a seguir:



Sabendo que os triângulos A e B são semelhantes, a constante de proporcionalidade k que gerou o triângulo B é:

(A) k = 0,2

(B) **k = 0,25**

(C) k = 2,4

(D) k = 3

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo da questão é que o aluno identifique a razão de semelhança entre dois triângulos, a partir da comparação das medidas dos lados e do ângulo dos triângulos A e B.

A questão dada afirma que os triângulos são semelhantes, então existe uma constante de proporcionalidade entre seus lados. Pelos dados da questão (valores das medidas dos lados) observamos que o triângulo B foi obtido a partir de uma redução do triângulo A. Então, a razão entre os lados do triângulo B e seus correspondentes no triângulo A é a constante de proporcionalidade procurada. (k). k= $\frac{medida\ do\ lado\ B}{medida\ do\ lado\ A}$

$$k = \frac{0{,}8}{3{,}2} = \frac{1}{4} = 0{,}25 \ ou \ k = \frac{1}{4} = 0{,}25.$$

Desta forma, a medida dos lados do triângulo B é a quarta parte da medida dos lados do triângulo A.

A alternativa correta é a letra **(B).**

(A)

k = 0,2	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno sabe como encontrar a constante de proporcionalidade, mas ao efetuar $1 \div 4$ parou a divisão na casa decimal, não atentando no resto 2. Professor, é bom alertar o aluno que se para uma divisão se não exata, quando o quociente apresentar dízima, ou quando é pedido valor aproximado e que também é bom verificar quantas casas decimais apresentam as demais alternativas da questão (se houver).

(B)

k = 0,25	**Resposta correta.**	**O aluno demonstra ter domínio nas condições necessárias para garantir a semelhança entre figuras planas, encontrando corretamente a constante de proporcionalidade através da condição de proporcionalidade entre os lados.**

(C)

k = 2,4	Resposta incorreta.	O aluno provavelmente, observou as figuras vendo que o triângulo B é menor que o triângulo A então fez uma subtração 3,2 – 0,8 = 2,4. Professor, é importante retomar com o aluno como encontrar a razão de proporcionalidade entre os lados de um polígono.

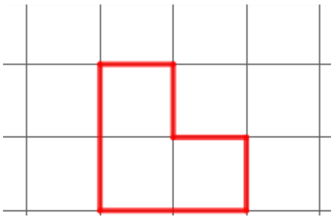
(D)

k = 3	Resposta incorreta.	O aluno provavelmente, observou as figuras vendo que o triângulo B é menor que o triângulo A então fez uma subtração 4 – 1 = 3. Professor, é importante retomar com o aluno como encontrar a razão de proporcionalidade entre os lados de um polígono.

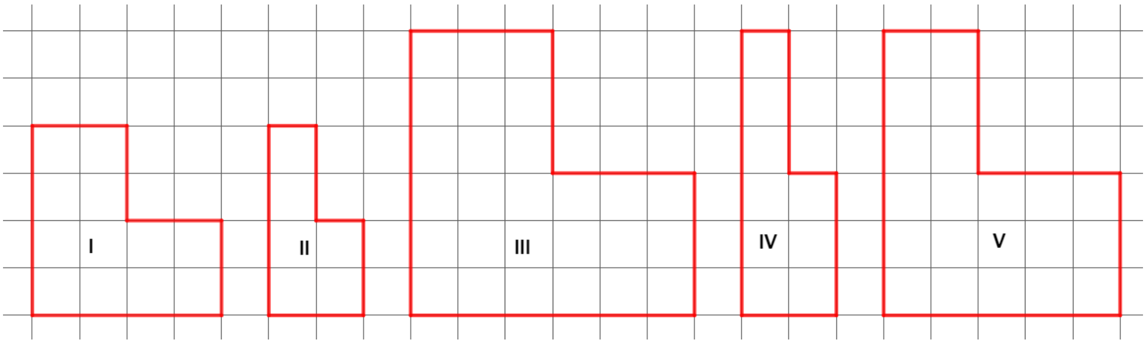
Habilidade MP12	Identificar a razão de semelhança entre duas figuras planas.

Questão 4

(Adaptada – Nova Escola) Na figura abaixo cada lado do quadradinho mede 1 u.



As figuras a seguir (cada lado do quadradinho mede 1 u) que tiveram suas dimensões ampliadas em 2 e 3 vezes respectivamente, em relação a figura acima, são:



(A) Figura I e Figura II

(B) **Figura I e Figura III**

(C) Figura II e Figura IV

(D) Figura III e Figura V

O objetivo da questão é que o aluno identifique a razão de semelhança entre duas figuras planas a partir de uma ampliação ou uma redução.

O enunciado da questão trás “dimensões ampliadas”, o que nos garante que há semelhança entre polígonos e para que dois polígonos sejam semelhantes é necessário que:

a. Possuam o mesmo número de lados.
b. Os lados correspondentes sejam proporcionais.
c. Os ângulos internos correspondentes sejam congruentes.

As condições a e c são atendidas nas figuras de I a V em relação a figura dada, faltando verificar a condição b.

Das alternativas propostas:

- a medida dos lados da **figura I** é o dobro da medida dos lados correspondentes da figura dada. Observamos uma constante de proporcionalidade dada pela razão $k = 2$.
- a medida dos lados da **figura III** é o triplo da medida dos lados correspondentes da figura dada. Observamos uma constante de proporcionalidade dada pela razão $k = 3$.

Portanto, concluímos que:

As **figuras I e III** são ampliações da figura dada, pois os ângulos são congruentes e os lados correspondentes mantêm uma proporcionalidade.

A alternativa correta é a letra **(B).**

(A)

Figura I e Figura II	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno só observou que o lado vertical das duas figuras possui o dobro de quadrados da figura dada, e não verificou os demais lados. Professor, é pertinente retomar a condição "os lados correspondentes sejam proporcionais" que isso significa todos os lados dos polígonos.

(B)

Figura I e Figura III	**Resposta correta.**	**O aluno demonstra saber as condições necessárias para verificar a semelhança entre figuras planas, encontrando corretamente a constante de proporcionalidade através da condição de proporcionalidade entre os lados.**

(C)

Figura II e Figura IV	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno observou que o lado horizontal das duas figuras possui o mesmo número de quadrados da figura dada, escolheu a alternativa e não verificou os demais lados. Professor, este aluno não compreendeu a condição "os lados correspondentes devem ser proporcionais" que isso significa todos os lados dos polígonos.

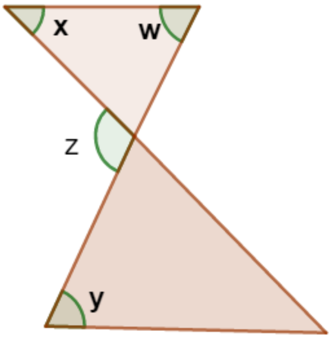
(D)

Figura III e Figura V	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno só observou que o lado vertical das duas figuras possui o triplo de quadrados da figura dada, e não verificou os demais lados. Professor, é pertinente retomar a condição "os lados correspondentes sejam proporcionais" que isso significa todos os lados dos polígonos.

Habilidade MP13	Identificar a correspondência entre ângulos congruentes de dois triângulos semelhantes.

Questão 5

Na figura a seguir temos dois triângulos semelhantes nos quais os ângulos x e y medem respectivamente 45° e 55°. Calcule a medida dos ângulos w e z, respectivamente.



(A) 55° e 45°

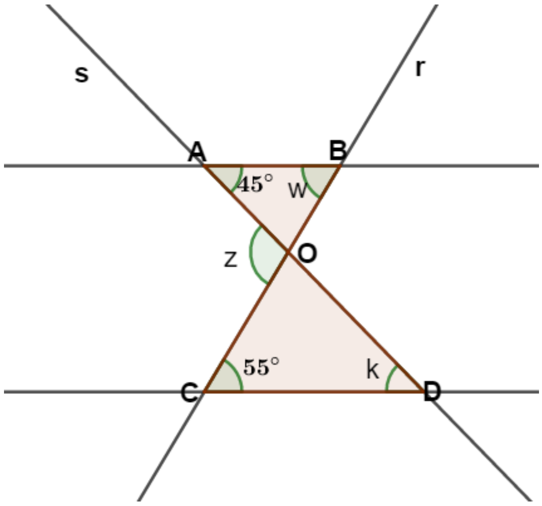
(B) 55° e 80°

(C) **55° e 100°**

(D) 80° e 100°

O enunciado nos informa que temos dois triângulos semelhantes então, o lado $\overline{AB}$ está sobre uma reta paralela à reta que contém o lado $\overline{CD}$. Essas duas retas estão sendo cortadas pelas retas transversais r e s.

Colocando os valores dos ângulos informados e atribuindo denotações auxiliares, temos:



Com essas informações, temos $\hat{w}$ e $55°$ como ângulos alternos internos, logo $\boldsymbol{\hat{w}}$ **=** $\mathbf{55°}$**.**

Sabemos que a soma dos ângulos internos em qualquer triângulo é sempre 180°, então podemos afirmar que o ângulo AÔB é = $180°$ - $45°$ – $w°$ → $180°$ - $45°$ – $55°$, AÔB = $80°$ e este ângulo é suplementar de $\hat{z}$. Com isto podemos concluir que $\hat{z}$ = $180°$ – $80°$, $\boldsymbol{\hat{z}}$ **=** $\mathbf{100°}$**.**

Então, $\boldsymbol{\hat{w}}$ **=** $\mathbf{55°}$ **e** $\boldsymbol{\hat{z}}$ **=** $\mathbf{100°}$**.**

Portanto, a alternativa correta é a **(C).**

(A)

55° e 45°	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno comparou os dados nos dois triângulos, como no triangulo superior tinha $45°$ e faltava o $\hat{w}$, olhou para o triângulo inferior e viu o $55°$ e para o $\hat{z}$ colocou o outro ângulo dado $45°$. Professor, precisa retomar com este aluno as condições para que dois triângulos sejam semelhantes e depois rever os ângulos congruentes formados quando duas retas paralelas são cortadas por uma transversal.

(B)

55° e 80°	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno comparou os dados nos dois triângulos, como no triangulo superior tinha $45°$ e faltava o $\hat{w}$, olhou para o triângulo inferior e viu o $55°$ e sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, fez $180°$ - $45°$ – $55°$ obtendo $80°$, não atentou entretanto que encontrou o ângulo interno ao triângulo, atribuindo este valor a $\hat{z}$. Professor, é pertinente mostrar a este aluno, quais são os ângulos internos e quais são os ângulos externos de um triângulo.

(C)

55° e 100°	**Resposta correta.**	**O aluno mostra saber que a soma dos ângulos internos em qualquer triângulo é sempre 180° e as condições necessárias para que dois triângulos sejam semelhantes bem como os ângulos congruentes que duas retas paralelas formam quando cortadas por uma transversal. Demonstrando assim ter a habilidade averiguada em questão.**

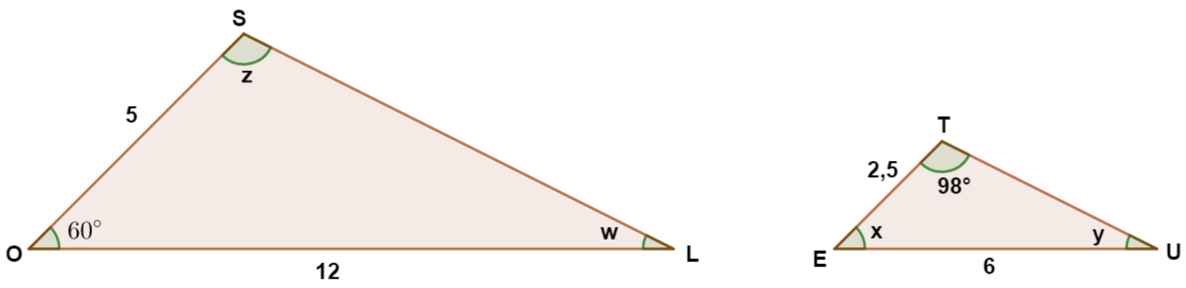
(D)

80° e 100°	Resposta incorreta.	Provavelmente este aluno somou os dois ângulos dados $45° + 55° = 100°$ e atribuiu a $\hat{w}$ e depois lembrou do 180° que é bem usado nos exercícios em sala e fez $180° - 100° = 80°$ e atribuiu este valor a $\hat{z}$, não se atentando a palavra respectivamente. Professor, precisa retomar com este aluno as condições necessárias para que dois triângulos sejam semelhantes e depois rever os ângulos congruentes formados quando duas retas paralelas são cortadas por uma transversal.

Habilidade	Identificar a correspondência entre ângulos congruentes
MP13	de dois triângulos semelhantes.

Questão 6

Observe as figuras abaixo:



O triângulo SOL é uma ampliação do triângulo TEU. As medidas x, y, z e w dos ângulos indicados são:

(A) x = 22°, y = 60°, z = 22° e w = 98°

(B) **x = 60°, y = 22°, z = 98° e w = 22°**

(C) x = 60°, y = 32°, z = 98° e w = 32°

(D) x = 60°, y = 38°, z = 98° e w = 38°

O objetivo da questão é que o aluno identifique a semelhança de dois triângulos, pela congruência entre os seus ângulos.

O enunciado relata que o triângulo SOL é uma ampliação do triângulo TEU, então podemos afirmar que os ângulos internos correspondentes são congruentes.

$\hat{T} = \hat{S} \rightarrow \boldsymbol{\hat{z} = 98^{\circ}}$

$\hat{E} = \hat{O} \rightarrow \boldsymbol{\hat{x} = 60^{\circ}}$

$\hat{U} = \hat{L} \rightarrow \boldsymbol{\hat{y} = \hat{w}}$

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180°, analisando o triângulo TEU temos:

$\hat{x} + \hat{y} + 98^{\circ} = 180^{\circ}$

$60^{\circ} + \hat{y} + 98^{\circ} = 180^{\circ}$

$\hat{y} = 180^{\circ} - 158^{\circ}$

$\hat{y} = 22^{\circ}$

$\boldsymbol{\hat{y} = \hat{w}}$**,** então $\boldsymbol{\hat{w} = 22^{\circ}}$

Temos então: $\boldsymbol{\hat{x} = 60°}$**,** $\boldsymbol{\hat{y} = 22°}$**,** $\boldsymbol{\hat{z} = 98°}$ **e** $\boldsymbol{\hat{w} = 22°}$

Desta forma, a alternativa correta é a letra **(B).**

(A)

x = 22°, y = 60°, z = 22° e w = 98°	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno não atentou a palavra “respectivamente” contida no enunciado. Professor, é pertinente explicar ao aluno o significado que esta palavra tem na escolha da alternativa.

(B)

x = 60°, y = 22°, z = 98° e w = 22°	**Resposta correta.**	**O aluno mostra saber que, a soma dos ângulos internos em qualquer triângulo é sempre 180° e, a correspondência entre ângulos congruentes de dois triângulos semelhantes.**

(C)

x = 60°, y = 32°, z = 98° e w = 32°	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno fez $\mathbf{180^{\circ} - 158^{\circ}}$ e encontrou erroneamente $\mathbf{32^{\circ}}$. Professor, é bom verificar se este aluno distraiu ou tem dificuldade em trabalhar com o sistema decimal.

(D)

x = 60°, y = 38°, z = 98° e w = 38°	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno fez $\mathbf{180^{\circ} - 158^{\circ}}$ e encontrou erroneamente $\mathbf{38^{\circ}}$. Professor, é bom verificar se este aluno distraiu ou tem dificuldade em trabalhar com o sistema decimal.

Habilidade MP14	Resolver problemas envolvendo semelhança de triângulos.

Questão 7

Um lado de um triângulo mede 45 m. Num triângulo semelhante, o lado correspondente mede 30 m. Se o perímetro do primeiro é de 120 m, o do segundo será de:

(A) 45 m

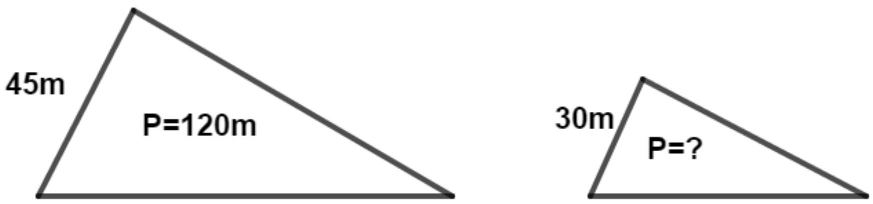
(B) 75 m

(C) **80 m**

(D) 180 m

CORREÇÃO COMENTADA

Temos então dois triângulos semelhantes, conforme o enunciado



Perímetro é a soma das medidas de todos os lados, como os lados correspondentes são proporcionais (apresentam uma constante de proporcionalidade), logo os perímetros também serão, isto é, a razão entre os perímetros terá a mesma constante de proporcionalidade apresentada entre os lados correspondentes.

$$\frac{45}{30} = \frac{120}{P} \rightarrow 45P = 120 \times 30 \rightarrow P = \frac{3600}{45} \rightarrow P = 80\ m$$

A alternativa correta é a da letra **(C)**

(A)

45 m	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno ajuntou números fazendo 120 – 45 – 30 = 45, apresentando dificuldade de compreensão do que foi pedido. Professor, há necessidade de retomar com este aluno o conceito de razão, proporção e das condições necessárias para que dois polígonos sejam semelhantes.

(B)

75 m	Resposta incorreta.	O aluno provavelmente fez a diferença entre os lados correspondentes encontrando 45 – 30 = 15, como são três lados multiplicou 15 x 3 = 45 depois encontrou a diferença entre o perímetro dado com o valor que encontrou 120 – 45 = 75. Professor, há necessidade de retomar com este aluno o conceito de razão, proporção, condições necessárias para que dois polígonos sejam semelhantes, bem como classificação de triângulos quanto aos lados, alertando-o que não se pode assumir quaisquer classificação se não estiver especificado.

(C)

80 m	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou o enunciado corretamente, sabe o que é perímetro, apresenta domínio em semelhança de triângulos encontrando corretamente a constante de proporcionalidade entre os lados e que esta constante é a mesma para correspondência entre os perímetros dessas figuras.**

(D)

180 m	Resposta incorreta.	O aluno compreende o que foi pedido e provavelmente se enganou ou apresenta fragilidade em expressar as correspondências entre os polígonos não

		atentando a ordem da razão. Provavelmente fez $\frac{30}{45} = \frac{120}{P} \rightarrow P = \frac{45 \times 120}{30} \rightarrow$ $P = 180$ Na primeira razão relacionou medida do lado do segundo triângulo com a medida do lado do primeiro triângulo e a razão entre os perímetros fez o inverso. Professor, com esse aluno é pertinente reforçar a "construção" da proporção.

Habilidade MP14	Resolver problemas envolvendo semelhança de triângulos.

Questão 8

Rodrigo observou que em determinada hora do dia, o Edifício “Conquista” projeta uma sombra de 20 metros ao mesmo tempo em que uma árvore de 9 metros projeta uma sombra de 4 metros (O edifício e a arvore estão na vertical, apoiados na mesma horizontal). Se mais tarde a sombra da árvore diminuir 1 metro a sombra do edifício passará a medir:

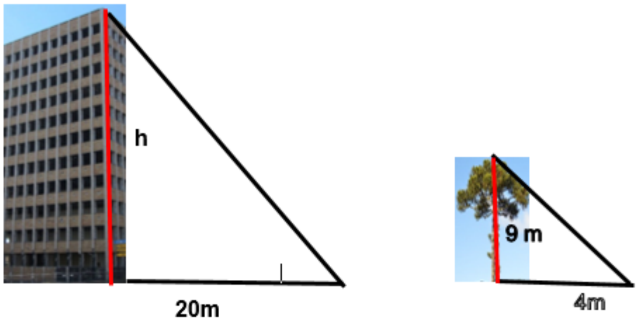
(A) 45 m

(B) 22,5 m

(C) 19 m

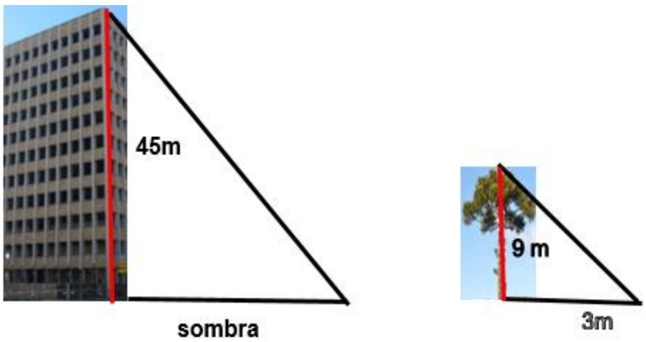
(D) **15 m**

O desenho ajuda no entendimento e na visualização dos triângulos retângulos semelhantes, uma vez que o Sol forma o mesmo ângulo de incidência nos dois objetos.



Precisamos primeiramente encontrar a altura do prédio em questão. Pela semelhança de triângulos podemos escrever a razão entre as alturas e a razão entre as sombras projetadas e igualá-las.

$$\frac{20}{4} = \frac{h}{9} \rightarrow h = \frac{20 \times 9}{4} \rightarrow h = 45\,metros$$



Como o enunciado nos trás que em outro momento a sombra da árvore diminuiu em um metro, passando então para 3m, logo houve também neste instante a redução da sombra do prédio. Os triângulos formados continuam semelhantes, daí temos:

$$\frac{sombra}{3} = \frac{45}{9} \rightarrow sombra = \frac{45 \times 3}{9} \rightarrow sombra = 15\,metros$$

Que torna a alternativa (**D**), correta.

(A)

45 m	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno encontrou a altura do prédio e não atentou para que a questão pedia. Professor, precisa mais uma vez reforçar com este aluno a necessidade de ler a questão mais de uma vez.

(B)

22,5 m	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno encontrou corretamente a altura do prédio, e quando foi encontrar a sombra do prédio pedida na questão, subtraiu 1 m da altura da árvore em vez de subtrair 1m da sombra da árvore conforme descrito na questão. $\frac{sombra}{4} = \frac{45}{8} \rightarrow sombra = \frac{45 \times 4}{8} \rightarrow$ $sombra = 22{,}5.$ Professor, precisa mais uma vez reforçar com este aluno a necessidade de ler a questão mais de uma vez.

(C)

19 m	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno encontrou corretamente a altura do prédio e ao ler que a sombra da árvore diminuiu em 1m, o mesmo fez com a sombra do prédio 20 – 1 = 19. Professor, há necessidade de retomar com este aluno o que vem a ser proporcionalidade.

(D)

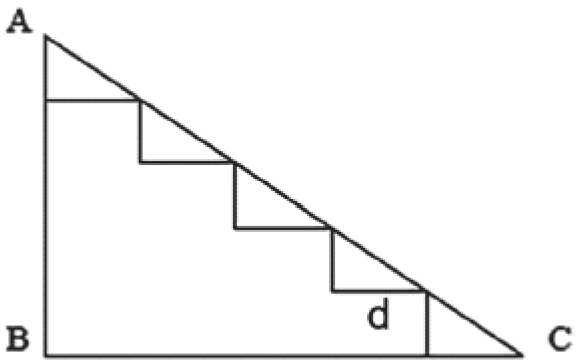
15 m	**Resposta correta.**	**O aluno demonstra que entendeu o enunciado, encontrou corretamente a altura do prédio e a nova sombra do prédio no momento que a sombra da árvore diminuiu em 1 m, mostrando assim domínio em proporção e habilidade em resolver este problema que envolve semelhança de triângulos.**

Habilidade MP11	Identificar a existência ou não de semelhança entre duas figuras planas.

Questão 9

https://questoes.grancursosonline.com.br/questoes-de-concursos/matematica-relacoes-trigonometricas (acesso em 30/05/2019)

A figura a seguir representa o perfil de uma escada. Cada degrau tem a mesma extensão (d) e a mesma altura. Sabendo que o lado BC mede 4 m e que AC mede 5 m determine, em centímetros, a extensão (d) de cada degrau:



(A) 20

(B) 40

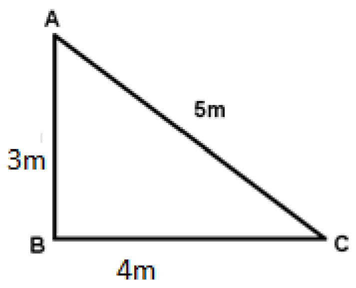
(C) 60

(D) 80

A escada em questão apresenta 4 degraus, mas o lado AC contém a medida de cinco extensão de degrau, este dado é importante para a resolução da questão.

Se somarmos as cinco extensões dos degraus, teremos a medida do lado BC, então se tivermos a medida do lado BC e dividirmos por cinco encontraremos a medida pedida.

Temos então este triângulo,



Aplicando uma das relações métricas do triângulo retângulo que é:

Hipotenusa^2= cateto^2+ cateto^2, teremos:

$(\overline{AC})^2 = (\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 \rightarrow 5^2 = (AB)^2 + (4)^2 \rightarrow (\overline{AB})^2 = 25 - 16 \rightarrow \overline{AB} = \sqrt{9} \rightarrow \overline{AB} = 3\ m$

Conforme explicado acima devemos dividir $\overline{BC}$ por 5:

$4 \div 5 = 0{,}80$ m = 80 cm que é a medida da extensão de cada degrau.

Portanto, a alternativa correta é a **(D).**

Grade de Correção

(A)

20	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno multiplicou os dois valores que encontrou 4 x 5 = 20. Professor, este aluno demonstra que não compreendeu o enunciado e não reconhece um triângulo retângulo bem como a relação métrica mais usual que é o Teorema de Pitágoras.

(B)

40	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno multiplicou os dois valores que encontrou 4 x 5 = 20 e como cada degrau apresenta altura e extensão multiplicou por 2; 20 x 2= 40. Professor, este aluno demonstra que compreendeu parcialmente o enunciado, porém não reconhece um triângulo retângulo bem como a relação métrica mais usual que é o Teorema de Pitágoras.

(C)

60	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno calculou a extensão da altura (espelho) do degrau.

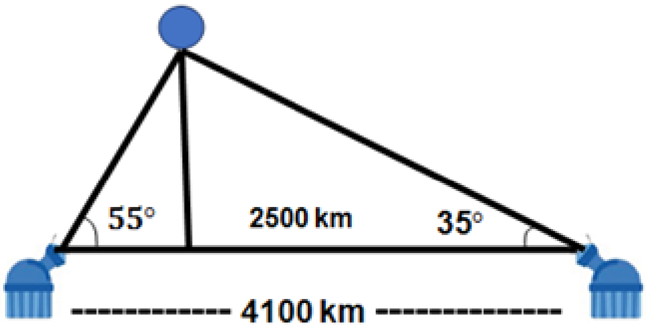
(D)

80	Resposta correta.	O aluno demonstra total compreensão do enunciado.

Habilidade MP15	Resolver problemas aplicando as relações métricas do triângulo retângulo.

Questão 10

(Adaptada – Nova Escola) Dois observatórios registram, no mesmo momento, um mesmo satélite. Um observa sob um ângulo de $35°$, e outro a um ângulo de $55°$. A distância entre os dois observatórios é 4100 km, e um deles está a 2500 km do ponto logo abaixo do satélite. Determine a altura que se encontra este satélite.



(A) **2 000 km**

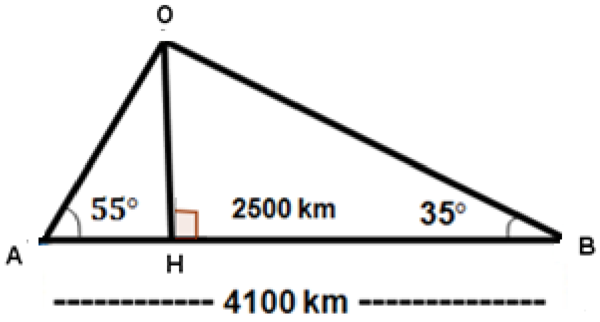
(B) 1 600 km

(C) 200 km

(D) 50 km

CORREÇÃO COMENTADA

Temos a seguinte figura:



Podemos garantir que o triângulo AOB é retângulo em O, pois $O\hat{A}B = 55°$ e $O\hat{B}A = 35°$ e como a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é $180°$, então,

$$O\hat{A}B + O\hat{B}A + A\hat{O}B = 180° \rightarrow 55° + 35° + A\hat{O}B = 180° \rightarrow A\hat{O}B = 90°$$

O triângulo AÔB é retângulo e $\overline{OH}$ é a altura relativa à hipotenusa tornando os segmentos $\overline{AH}\ e\ \overline{HB}$ projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

$\overline{HB} = 2500\ km$ e $\overline{AH} = 4100 - 2500 = 1600\ km.$

Uma das relações métricas do triângulo retângulo garante que a altura relativa à hipotenusa elevada ao quadrado é igual o produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa. Temos então:

$$(\overline{OH})^2 = \overline{AH} \times \overline{HB} \rightarrow (\overline{OH})^2 = 1600 \times 2500 \rightarrow (\overline{OH})^2 = 4000000 \rightarrow \overline{OH} = \sqrt{4000000} \rightarrow \overline{OH} = 2\,000\ km.$$

Portanto, a altura que se encontra o satélite é de 2000 km, e a alternativa correta é a **(A).**

(A)

2 000 km	**Resposta correta.**	**O aluno entendeu o que foi pedido, reconheceu que o triângulo é retângulo, encontrou a projeção que faltava do cateto sobre a hipotenusa e aplicou corretamente a relação métrica do triângulo retângulo pertinente à resolução da questão, onde a hipotenusa elevada ao quadrado é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.**

(B)

1 600 km	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno observa que o segmento AH pode ser obtido e faz 4100 – 2500 =. 1600 encontra esta resposta e não atenta ao que foi pedido na questão. Professor, é importante mostrar ao aluno que os distratores podem levar a enganos e por isto há necessidade de atenção no que foi pedido na questão.

(C)

200 km	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno entendeu o que foi pedido, aplicou corretamente a relação métrica do triângulo retângulo pertinente à resolução da questão, mas confundiu-se ao extrair a raiz quadrada de 4000000.

(D)

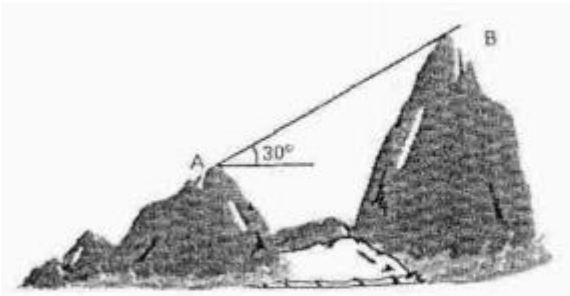
50 km	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno entendeu o que foi pedido, pensou corretamente a relação métrica do triângulo retângulo pertinente à resolução da questão, porém não atentou em calcular a projeção $\overline{AH}$ e a considerou como 1. $(\overline{OH})^2 = \overline{AH}\,.\,\overline{HB} \rightarrow (\overline{OH})^2 = 1 \times 2500$ $\overline{OH} = \sqrt{2500} \rightarrow \overline{OH} = 50\ km$

Habilidade	Resolver problemas aplicando as relações
MP16	trigonométricas do triângulo retângulo.

Questão 11

http://clubes.obmep.org.br/blog/brincando-com-trigonometria-problemas/
(Acesso em 30/05/2019)

As alturas (em relação ao nível do mar) em que estão dois pontos A e B são, respectivamente, 812 m e 1020 m. Do ponto **A** vê-se o ponto **B** sob um ângulo de $30°$ com o plano horizontal, conforme a figura. Determine a distância entre os pontos **A** e **B**.



Dados: sen 30° = $\frac{1}{2}$; cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$; tg 30° = $\frac{\sqrt{3}}{3}$

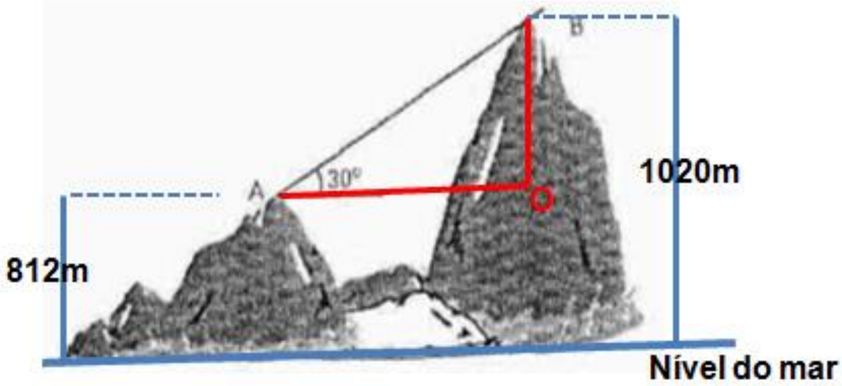
(A) $104\ m$

(B) $208\sqrt{3}\ m$

(C) $\frac{416\sqrt{3}}{3}\ m$

(D) $\mathbf{416\ m}$

Ao observarmos a situação descrita, temos a opção de construirmos um triângulo retângulo e encontrarmos através de uma das relações trigonométricas do triângulo retângulo, o valor da hipotenusa que é a distância AB, procurada.



Após construirmos o triângulo retângulo em O temos em relação ao ângulo de $30°$, $\overline{OB}$ como cateto oposto e $\overline{AO}$ como cateto adjacente. Para termos a medida de $\overline{OB}$, basta observar que a altura do ponto O é a mesma que a do ponto A, daí basta subrairmos da altura do ponto B a altura do ponto A.

$$\overline{OB} = 1020 - 812 \rightarrow \overline{OB} = 208\,m$$

Temos então a relação trigonométrica do triângulo retângulo que afirma que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa} \text{ daí } sen\ 30° = \frac{208}{\overline{AB}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{208}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = 208 \times 2 \rightarrow \overline{AB} = 416\,m$$

Portanto, a alternativa correta é a letra **(D)**.

(A)

$104\,m$	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno entendeu o problema, construiu o triângulo retângulo, encontrou o cateto faltante, mas confundiu-se na relação trigonométrica do triângulo retângulo que encontra o $sen\alpha$, colocando a hipotenusa dividida pelo cateto oposto, ficando assim: $sen\ 30° = \frac{\overline{AB}}{208} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\overline{AB}}{208} \rightarrow \overline{AB} = \frac{208 \times 1}{2} \rightarrow \overline{AB} = 104\,m.$ Professor, precisa verificar se o aluno se enganou ou tem dúvida em reconhecer os lados de um triângulo retângulo. (cateto oposto e cateto adjacente)

(B)

$208\sqrt{3}\,m$	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno entendeu o problema, construiu o triângulo retângulo, encontrou o cateto faltante, sabe que cateto oposto dividido pela hipotenusa consegue solucionar o problema, mas confundiu-se na fórmula e colocou $tg\alpha$, em lugar de $sen\alpha$, ficando assim: $tg\ 30° = \frac{208}{\overline{AB}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{208}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = \frac{208 \times 3}{\sqrt{3}} \rightarrow \overline{AB} = 208\sqrt{3}\,m.$ Professor, esse aluno precisa rever as relações trigonométricas do triângulo retângulo.

(C)

$\frac{416\sqrt{3}}{3}\,m$	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno entendeu o problema, construiu o triângulo retângulo, encontrou o cateto faltante, sabe que cateto oposto dividido pela hipotenusa consegue solucionar o problema, mas confundiu-se na fórmula e colocou $cos\alpha$ em lugar de $sen\alpha$, ficando assim: $cos\ 30° = \frac{208}{\overline{AB}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{208}{\overline{AB}} \rightarrow \overline{AB} = \frac{208 \times 2}{\sqrt{3}} \rightarrow \overline{AB} = \frac{416\sqrt{3}}{3}\,m.$ Professor, esse aluno precisa rever as relações trigonométricas do triângulo retângulo, salientando cateto oposto e cateto adjacente.

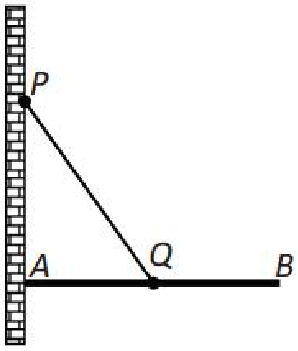
(D)

$416\ m$	**Resposta correta.**	**O aluno entendeu o enunciado, construiu corretamente o triângulo retângulo necessário para a resolução e encontrou por meio de uma das relações trigonométricas do triângulo retângulo, a distância $\overline{AB}$, procurada.**

Habilidade MP16	Resolver problemas aplicando as relações trigonométricas do triângulo retângulo.

Questão 12

(PC MA – FGV 2012) A figura abaixo mostra uma viga AB de 4 m de comprimento presa no ponto A de uma parede vertical. A viga é mantida na posição horizontal pelo cabo de aço PQ de forma que P está fixo na parede, AP é vertical e Q está no meio da viga AB. Sabe-se que o ângulo APQ mede 40º.



Dados: sen 40º = 0,64; cos 40º = 0,77; tg 40º = 0,84

A distância entre os pontos A e P é de aproximadamente:

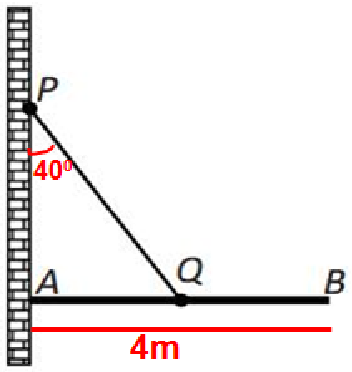
(A) **2,38 m**

(B) 2,60 m

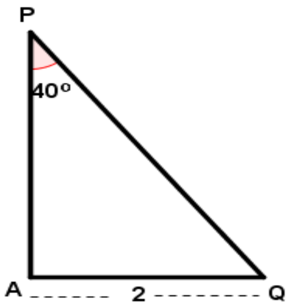
(C) 3,13 m

(D) 4,76 m

Analisando o enunciado, temos a viga na horizontal, um cabo fixado na parede vertical formando o triângulo PAQ retângulo em A com o $\hat{P}$= $40°$ e $\overline{AB}$ = 4 m



Conforme o enunciado o ponto Q está no meio de $\overline{AB}$ então se $\overline{AB}$ = 4 m teremos $\overline{AQ}$ = 2m



A questão pede a distância de AP, como este triângulo é retângulo em A, $\overline{AP}$ é cateto adjacente e $\overline{AQ}$ é cateto oposto, ambos em relação ao ângulo de $40°$. A relação trigonométrica do triângulo retângulo $tg \propto = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$ nos dará a distância pedida.

$tg 40° = \frac{2}{AP} \rightarrow 0{,}84 = \frac{2}{AP} \rightarrow \overline{AP} = \frac{2}{0{,}84} \rightarrow \overline{\boldsymbol{AP}} \cong$ **2,38 m.**

A alternativa correta é a letra **(A)**

(A)

2,38 m	**Resposta correta.**	**O aluno entendeu o problema, encontrou o valor de $\overline{AQ}$, sabe que cateto oposto dividido pelo cateto adjacente consegue solucionar o problema demonstrando assim propriedade no uso da relação pertinente.**

(B)

2,60 m	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno entendeu a questão, encontrou o valor de $\overline{AQ}$, sabe que cateto oposto dividido pelo cateto adjacente consegue solucionar o problema, mas confundiu-se na fórmula e colocou $cos\alpha$, em lugar de $tg\alpha$, ficando assim: $cos\ 40° = \frac{2}{\overline{AP}} \rightarrow 0{,}77 = \frac{2}{\overline{AP}} \rightarrow \overline{AP} = \frac{2}{0{,}77} \rightarrow \overline{AP} \cong 2{,}60$. Professor, esse aluno precisa rever as relações trigonométricas do triângulo retângulo.

(C)

3,13 m	Resposta incorreta.	Provavelmente o aluno entendeu a questão, encontrou o valor de $\overline{AQ}$, sabe que cateto oposto dividido pelo cateto adjacente consegue solucionar o problema, mas confundiu-se na fórmula e colocou $sen\alpha$, em lugar de $tg\alpha$, ficando assim: $sen\ 40° = \frac{2}{\overline{AP}} \rightarrow 0{,}64 = \frac{2}{\overline{AP}} \rightarrow \overline{AP} = \frac{2}{0{,}64} \rightarrow \overline{AP} \cong 3{,}13$. Professor, esse aluno precisa rever as relações trigonométricas do triângulo retângulo.

(D)

4,76 m	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno não atentou ao enunciado quando diz que o ponto Q está na metade da distância de A até B e construiu o triângulo PAB, provavelmente sabe o que é cateto oposto e adjacente a um ângulo e sabe qual a relação trigonométrica que deve usar.

		$tg40° = \frac{4}{\overline{AP}} \rightarrow 0{,}84 = \frac{4}{\overline{AP}} \rightarrow \overline{AP} = \frac{4}{0{,}84} \rightarrow \overline{AP} \cong 4{,}76$ Professor, chamar a atenção deste aluno orientando que o ângulo APQ e APB não são iguais.

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

COORDENADORIAS

Coordenadoria Pedagógica - COPED
Coordenador: Caetano Pansani Siqueira

Coordenadoria de Informação, Tecnologia, Evidência e Matrícula - CMITE
Coordenador: Thiago Guimarães Cardoso

DEPARTAMENTOS

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão Pedagógica - DECEGEP
Diretor: Valéria Arcari Muhi

Centro dos Anos Finais do Ensino Fundamental - CEFAF
Diretora: Carolina dos Santos Batista Murauskas

Centro de Ensino Médio - CEM
Diretora: Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

Equipe Curricular CoPED de Matemática – Leitura crítica e validação do material
Ilana Brawerman, João dos Santos Vitalino, Marcos José Traldi, Otávio Yoshio Yamanaka e Vanderley Aparecido Cornatione

Autoria do material
Benedito de Melo Longuini, Edson dos Santos Pereira, Erika Aparecida Navarro Rodrigues, Fernanda Machado Pinheiro, Ines Chiarelli Dias, Leandro Geronazzo, Lilian Ferolla de Abreu, Lilian Silva de Carvalho, Luciene Ramos Americo, Malcon Pulvirenti, Marques, Marcelo Balduino Silva, Maria Denes Tavares da Silva, Rodrigo Soares de Sá, Rosilaine Sanches Martins, Simoni Renata e Silva Perez, Sueli Aparecida Gobbo Araujo, Willian Casari de Souza.

Departamento de Avaliação Educacional - DAVED
Diretora: Patricia de Barros Monteiro
Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Planejamento e Análise de Avaliações - CEPAV
Diretor: Juvenal de Gouveia

Ademilde Ferreira de Souza, Cristiane Dias Mirisola, Ilton Campos Cavalcanti, Márcia Soares de Araújo Feitosa, Soraia Calderoni Statonato, Sylvia Russiano Toledo Casari

Centro de Aplicação de Avaliações - CEAPA
Diretora: Isabelle Regina de Amorim Mesquita

Amanda Morais Cardoso, Denis Delgado dos Santos, José Guilherme Brauner Filho, Kamila Lopes Candido, Nilson Luiz da Costa Paes, Teresa Miyoko Souza Vilela

Departamento de Tecnologia de Sistemas
Diretor: Marcos Aparecido Barros de Lima

Centro de Planejamento e Integração de Sistemas
Diretora: Camila da Silva Alcazar
Viviana Fernandes dos Santos – Analista de Sistemas

Representantes do CAPE
Leitura crítica, validação e adaptação do material para os deficientes visuais
Tânia Regina Martins Resende