GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

Caderno do Professor

2ªSérie do Ensino Médio

Matemática

São Paulo

3º Bimestre de 2019

24ª Edição

APRESENTAÇÃO

A Avaliação da Aprendizagem em Processo – AAP - se caracteriza como uma ação desenvolvida de modo colaborativo entre a Coordenadoria de Gestão da Educação Básica e a Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional.

Iniciada em 2011 e voltada a apenas dois anos/séries, foi gradativamente sendo expandida e, desde 2015, abrange todos os alunos dos Ensinos Fundamental e Médio além de, continuamente, aprimorar seus instrumentos.

A AAP, fundamentada no Currículo do Estado de São Paulo, propõe o acompanhamento da aprendizagem das turmas e alunos de forma individualizada, com um caráter diagnóstico. Tem como objetivo apoiar as unidades escolares e os docentes na elaboração de estratégias adequadas a partir da análise de seus resultados, contribuindo efetivamente para melhoria da aprendizagem e desempenho dos alunos, especialmente nas ações de recuperação contínua.

As habilidades selecionadas para a AAP, em Língua Portuguesa e Matemática, têm como referência, a partir de 2016, a Matriz de Avaliação Processual elaborada pela CGEB e já disponibilizada à rede.

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental permanece a articulação com as expectativas de aprendizagem de Língua Portuguesa e Matemática e com os materiais do Programa Ler e Escrever e da Educação Matemática nos Anos Iniciais – EMAI.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação, na forma de cadernos de provas para os alunos, também foram elaborados os respectivos exemplares do Professor, com orientações específicas para os docentes, instruções para a aplicação (Anos Iniciais), quadro de habilidades de cada prova, gabaritos, orientações e grades para correção e recomendações pedagógicas gerais.

Estes subsídios, agregados aos registros que o professor já possui e informações sistematizadas no Sistema de Acompanhamento dos Resultados de Avaliações - SARA, incorporando os dados resultantes da AAP, devem auxiliar no planejamento, replanejamento e acompanhamento das ações pedagógicas, mobilizando procedimentos, atitudes e conceitos necessários para as atividades de sala de aula, sobretudo aquelas relacionadas aos processos de recuperação das aprendizagens.

COORDENADORIA PEDAGÓGICA
COPED

COORDENADORIA DE INFORMAÇÃO,
TECNOLOGIA, EVIDÊNCIA E MATRÍCULA - CITEM

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

Questão	Código da Habilidade	Descrição
01	MP11	Identificar a probabilidade como uma razão.
02		
03	MP12	Expressar uma probabilidade na forma percentual.
04		
05	MP13	Calcular a probabilidade simples da ocorrência de um evento.
06		
07	MP14	Resolver problemas envolvendo o princípio multiplicativo da contagem.
08		
09	MP15 e MP16.	Resolver problemas de análise combinatória, que envolvam arranjos simples e/ou combinações.
10		
11		
12	MP17	Identificar a regularidade na construção do Triângulo de Pascal.

GABARITO

	A	B	C	D	E
1	○	●	○	○	○
2	○	○	○	○	●
3	○	○	○	○	●
4	○	○	●	○	○
5	○	○	○	●	○
6	○	○	●	○	○
7	○	○	●	○	○
8	●	○	○	○	○
9	○	○	○	○	●

	A	B	C	D	E
10	○	○	●	○	○
11	○	○	●	○	○
12	○	●	○	○	○

COMENTÁRIOS E RECOMENDAÇÕES PEDAGÓGICAS

A premissa básica, a respeito de um processo avaliativo deve ser considerada como instrumento que subsidiará tanto o aluno no seu desenvolvimento cognitivo, quanto ao professor no redimensionamento de sua prática pedagógica.

Desta forma, a avaliação da aprendizagem passa a ser um instrumento que auxiliará o educador a atingir os objetivos propostos em sua prática educativa, neste caso a avaliação sob essa ótica deve ser tomada na perspectiva diagnóstica, servindo como instrumento para detectar as dificuldades e possibilidades de desenvolvimento do educando.

Neste sentido, as questões que constam deste caderno, procuram verificar o nível de desenvolvimento das habilidades descritas na Matriz de Avaliação Processual de Matemática, notadamente as do 3º bimestre letivo.

Nas linhas a seguir, apresentamos uma breve caracterização das habilidades e o seu respectivo conteúdo.

- *(MP11) – Identificar a probabilidade como uma razão.*

Apresentar o cálculo de probabilidades sem a exigência de raciocínio combinatório significa priorizar o fato de que podemos expressar a chance de ocorrência de um evento por intermédio de uma razão entre dois valores: a parte e o todo. O numerador dessa razão coincide com o número de resultados esperados para o experimento, enquanto o denominador coincide com o número de resultados possíveis, todos eles considerados igualmente prováveis.

- *(MP12) – Expressar uma probabilidade na forma percentual.*

Uma razão entre dois valores pode ser expressa na língua materna por intermédio de uma fração, cujo denominador é 100, ou seja, através de um dado percentual, por exemplo, em uma classe de 40 alunos, se qualquer um tem uma chance em quarenta de ser sorteado, precisamos formalizar essa condição, que expressamos na língua materna por intermédio de uma fração 1/40, que pode ser representado por uma porcentagem, 2,5%.

Desta forma, os alunos da 2ª série do Ensino Médio o terreno preparado para o estudo formalizado das probabilidades, desde que os casos a eles apresentados não envolvam, inicialmente, raciocínio combinatório.

- *(MP13) – Calcular a probabilidade simples da ocorrência de um evento.*

Problemas envolvendo raciocínio combinatório são, na maioria das vezes, resolvidos por intermédio de uma adição ou de uma multiplicação, embora quase sempre a escolha pela multiplicação, seja a mais aconselhável, já que envolve raciocínio mais elaborado e eficiente.

A solução de situações-problema envolvendo simultaneamente raciocínio combinatório e cálculo de probabilidades costuma acarretar dificuldades maiores do que aquelas em que se aplicam esses conteúdos de maneira independente. Entre as diversas justificativas possíveis, podemos enunciar o fato de que as características conjuntas desses conteúdos impedem que os problemas sejam facilmente agrupados em tipos padrão, de maneira que resolver um deles sempre passe pela mobilização da estratégia de raciocínio que o associa a algum anteriormente resolvido e compreendido, como ocorre, mais facilmente, com problemas de outros grupos de conteúdos matemáticos.

- *(MP14) – Resolver problemas envolvendo o princípio multiplicativo da contagem.*

Uma adição de n parcelas iguais a p pode ser representada pelo produto $n \cdot p$. Muitas são as situações-problemas resolvidas por intermédio de uma adição desse tipo. Outras adições não formadas por parcelas iguais, também podem ser expressas por intermédio de um produto, como é o caso de $5 + 4 + 3 + 2 + 1$, que é igual a $(6 \cdot 5) \div 2 = 15$, tal ordenação é chamada de princípio multiplicativo, que é válida apenas no interior princípio aditivo.

Em notação matemática isso seria o mesmo que considerarmos, que determinada atividade pode ser realizada em duas etapas, ou seja, de m e nas maneiras distintas, o total de possibilidades será dado pelo produto de m por n (m x n).

- *(MP15) – Resolver problemas de arranjos simples.*

No Ensino Médio, muitos cursos abandonam a ideia da representação da solução por meio das árvores e passam a priorizar a classificação dos problemas em alguns tipos:

permutação, arranjos e combinações que, segundo essa opção didática, podem ser resolvidos a partir da aplicação de fórmulas matemáticas.

Considerando que o ensino de análise combinatória e probabilidades a partir desse enfoque deixa de favorecer a diversidade de estratégias de resolução e, consequentemente, de percursos de aprendizagem, uma vez que a representação da solução do problema por intermédio de desenhos, diagramas e/ou tabelas é um dos comportamentos heurísticos reconhecidos como um dos mais importantes a serem mobilizados pelos estudantes quando enfrentam situações que são de fato problemas.

- *(MP16) – Resolver problemas de combinações.*

A impossibilidade de padronização exige, mais do que em outros casos, que os alunos mobilizem diversas estratégias de raciocínio. Portanto cabe ao professor estimular a resolução de diversos problemas de análise combinatória e probabilidades com o foco voltado para o tipo de raciocínio exigido, em vez da clássica separação em problemas típicos, baseada no tipo de operação matemática envolvida.

Para a matriz de referência da avaliação de Matemática, consideramos a união das duas habilidades destacadas nas habilidades MP15 e MP16, pelo motivo de não particularizar o desenvolvimento de cada habilidade e sim o desenvolvimento do conhecimento, relativo ao tratamento dos problemas de Análise Combinatória.

- *(MP17) – Identificar a regularidade na construção do Triângulo de Pascal.*

Um cálculo de probabilidades sempre está associado a um “sim” e a um “não”, ou a um “sucesso” e a um “fracasso”, sem, todavia, que esses aspectos sejam expressos por probabilidades iguais. Em outras palavras, nem sempre há 50% de chance para o “sim” e 50% para o “não”, como no caso da face observada no lançamento de uma moeda em que o “sim” pode ser coroa e o “não” pode ser cara.

Para o comprador de um número de uma rifa, em um total de 200, o “sim” é 0,5% e o “não” é 99,5%. O que ocorre com o cálculo de probabilidades de eventos que se repetem n vezes sob as mesmas condições, isto é, situações em que “sim” ou “não” são esperados, cada um, mais de uma vez, como no caso do lançamento de quatro dados, com o objetivo de se conseguir duas vezes o número seis na face superior? A resolução desse tipo de problema pode ser associada ao desenvolvimento de um binômio do tipo [(sim) + (não)]n, de modo que, assim procedendo, estamos atribuindo significado real à busca do termo geral do Binômio de Newton, bem como aos elementos das linhas do Triângulo de Pascal.

Finalmente, a avaliação, entendida aqui como processual, haverá que ser percebida como um processo de mapeamento e da diagnose do processo de aprendizagem, ou seja, a obtenção de indicadores qualitativos do processo de ensino-aprendizagem no trabalho docente.

É importante salientar que as observações que constam nas grades de correção deste caderno são apenas pressupostos de resolução, cabendo ao professor analisar os registros dos alunos e não considerar as observações indicadas como norma padrão e que o objetivo maior, é a proposição de uma grade de correção pelo próprio professor e assim realizar uma análise de acordo com a realidade do processo de ensino-aprendizagem desenvolvido em sala de aula.

Equipe Curricular de Matemática – CEFAF/CEM-COPED

Habilidade	Identificar a probabilidade como uma razão.
MP11	

Questão 1

O dodecaedro é um poliedro regular com 12 faces (figura 1). A figura 2 mostra a planificação de um dodecaedro com suas faces numeradas de 01 a 12.

Figura 1

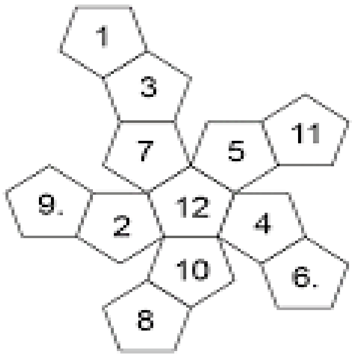


Figura 2

Ao lançar esse dodecaedro, a probabilidade de cair um número ***primo*** na face voltada para cima é

(A) $\frac{1}{2}$.

(B) $\mathbf{\frac{5}{12}}$.

(C) $\frac{1}{3}$.

(D) 12.

(E) $\frac{1}{4}$.

Professor, nas questões que envolvem probabilidade é muito importante que os alunos identifiquem os elementos que compõem o espaço amostral (Ω) e o evento (E).

Para o lançamento de um dodecaedro, temos um poliedro regular com 12 faces que estão numeradas de 01 a 12, então identificamos o seguinte espaço amostral

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

Logo o evento será a ocorrência de um número primo, ou seja, $E = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. A Probabilidade de ocorrer um número primo na face voltada para cima é a razão entre o número de elementos no conjunto do evento e número de elementos no conjunto do espaço amostral

$$P = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{5}{12}$$

Na devolutiva da questão outros conceitos poderão ser retomados com os alunos, tais como os poliedros regulares e as características dos números primos.

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

$\frac{1}{2}$	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno considerou todos os números ímpares de 01 a 12 como sendo números primos, ou seja, o espaço amostral Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} e o evento E = {1, 3, 5, 7, 9, 11} concluindo que a probabilidade de ocorrer um número primo na face voltada para cima seja: $P = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. Outra possibilidade seria considerar o número 01 como primo concluindo assim que o evento seria E = {1, 2, 3, 5, 7, 11}.

(B)

$\frac{5}{12}$	**Resposta correta**	O aluno interpretou e raciocinou corretamente, identificou o espaço amostral Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, o evento E = {2, 3, 5, 7, 11} e efetuou corretamente os cálculos da probabilidade seguindo a relação $P = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{5}{12}$

(C)

$\frac{1}{3}$	Resposta incorreta	(Possivelmente o aluno se equivocou e não considerou o número 2 como primo, ou seja, o espaço amostral Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} e o evento E = {3, 5, 7, 11}. Ao calcular a probabilidade encontrou $P = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

(D)

12	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno não identifica a característica dos números primos e assinalou a alternativa que indica o número de faces do dodecaedro.

(E)

$\frac{1}{4}$	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno considerou como número primo apenas 2, 3 e 5, ou seja, o espaço amostral Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12} e o evento E = {2, 3, 5}, tomando como referência um dado com 06 faces, porém usou o espaço amostral do dodecaedro. Uma possibilidade de cálculo seria $P = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Habilidade	Identificar a probabilidade como uma razão.
MP11	

Questão 2

Num avião viajam 14 brasileiros, 11 japoneses, 4 americanos e 3 árabes. Escolhendo ao acaso um passageiro, determine a probabilidade de este não ser nem japonês, nem americano.

(A) 0

(B) $\frac{4}{32}$

(C) $\frac{11}{32}$

(D) $\frac{15}{32}$

(E) $\boldsymbol{\frac{17}{32}}$

Correção Comentada

Professor, o espaço amostral (Ω) determina todas as possibilidades de resultados a serem encontrados. No problema proposto, o conjunto do espaço amostral é dado por:

Ω = {14 brasileiros, 11 japoneses, 4 americanos e 3 árabes}, totalizando 32 pessoas no avião:

14 + 11 + 4 + 3 = 32.

O evento E é o total de passageiros, exceto americanos e japoneses, ou seja,

E = {14 brasileiros, 3 árabes} totalizando 17 pessoas.

Então a probabilidade de escolher ao acaso um passageiro que não seja japonês, nem americano é:

$$P = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{17}{32}$$

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

0	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno se equivocou e considerou que a pessoa sorteada seja japonesa e americana ao mesmo tempo (fato impossível), logo a probabilidade é zero.

(B)

$\frac{4}{32}$	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno considerou a probabilidade de sortear somente os 4 americanos. O enunciado destaca que devemos calcular a probabilidade de não ser americano nem japonês.

(C)

$\frac{11}{32}$	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno se equivocou e calculou a probabilidade de escolher ao acaso 11 japoneses dentre os 32 passageiros.

(D)

$\frac{15}{32}$	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno se equivocou e calculou a probabilidade de sortear ao acaso um japonês ou um americano. Ideia inversa ao que está proposto no problema.

(E)

$\frac{17}{32}$	**Resposta correta**	O aluno raciocinou corretamente e interpretou o enunciado, identificando o espaço amostral e o evento para calcular a probabilidade de sortear ao acaso um passageiro que não seja americano nem japonês.

Habilidade	Expressar uma probabilidade na forma percentual.
MP12	

Questão 3

Uma fábrica de produtos de porcelana utiliza duas máquinas A e B para produzir o mesmo tipo de prato. A porcentagem de pratos defeituosos produzidos, respectivamente, pelas máquinas A e B é de 15% e de 5%. Foram misturados, numa caixa 100 pratos produzidos por A e 100 produzidos por B. Se tirarmos um prato ao acaso e ele for defeituoso, a probabilidade de que tenha sido produzido pela máquina A é de

Sugestão: Organize as informações em uma tabela.

(A) 10%

(B) 15%

(C) 20%

(D) 25%

(E) 75%

CORREÇÃO COMENTADA

A caixa possui um total de 200 pratos, 100 produzidos pela máquina A e 100 produzidos pela máquina B, onde 15% de 100 = 15 pratos defeituosos da máquina A e 5% de 100 = 5 pratos defeituosos da máquina B.
Logo, há um total de 20 pratos defeituosos. Como já foi identificado que o prato retirado é defeituoso, o espaço amostral fica reduzido de 200 para 20.

Utilizando a sugestão de organizar as informações do problema em uma tabela temos que:

Pratos	**Máquina**		**Total**
	A	**B**	
Defeituosos	15	5	20
Não defeituosos	85	95	180
Total	100	100	200

Então a probabilidade do prato defeituoso que foi retirado ser da máquina A é

$$P = \frac{15}{20} = 0{,}75 = 75\%.$$

Professor fique atento a identificação do espaço amostral condicionado ao prato retirado ser defeituoso e a partir daí calcular a probabilidade deste prato ser produzido pela máquina A.

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

10%	Resposta incorreta	Provavelmente o aluno não interpretou corretamente o problema e considerou o número do espaço amostral igual a 200 e o número do evento igual a 20, fazendo erroneamente o seguinte cálculo de probabilidade: $P = \frac{20}{200} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$.

(B)

15%	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno considerou os 15% de pratos defeituosos produzidos pela máquina A no espaço amostral de 100 pratos

(C)

20%	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno não interpretou corretamente o enunciado e somou as porcentagens de pratos defeituosos 15% + 5% = 20%

(D)

25%	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno identificou corretamente o espaço amostral de pratos defeituosos, porém fez o cálculo da probabilidade considerando a quantidade pratos defeituosos da máquina B.

(E)

75%	**Resposta correta**	O aluno interpretou corretamente o enunciado e identificou o espaço amostral e o evento para calcular a probabilidade $P = \frac{15}{20} = 0{,}75 = 75\%$.

Habilidade MP12	Expressar uma probabilidade na forma percentual.

Questão 4

Para analisar o desempenho de um novo remédio, realizam-se estudos em populações contendo pacientes sadios e doentes. Quatro situações distintas podem acontecer nesse contexto de teste:

I) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO, resultado correto.
II) Paciente TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO, resultado errado
III) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é POSITIVO, resultado errado.
IV) Paciente NÃO TEM a doença e o resultado do teste é NEGATIVO, resultado correto.

O quadro refere-se a um teste diagnóstico para uma certa doença X, aplicado em uma amostra composta por quinhentos indivíduos.

	Doença X	
Resultado	Tem a doença	Não tem a doença
Positivo	300	75
Negativo	75	50

Considerando todos os pacientes envolvidos no teste, qual a probabilidade do resultado do exame estar **errado**?

(A) 15%

(B) 25%

(C) 30%

(D) 50%

(E) 70%

Correção Comentada

Ao interpretar a tabela temos 75 pacientes sadios que apresentaram resultados positivos e 75 pacientes doentes com resultados negativos, totalizando 150 pacientes com resultados errados. Portanto, a probabilidade do exame estar com o resultado errado em um universo de 500 pacientes é:

$$P = \frac{150}{500} = 0{,}30 = 30\%$$

Professor, para esta questão o aluno deverá realizar a leitura atenta, pois alguns dados são fundamentais para a resolução:

- Qual o total de pacientes que realizaram o exame?
- Quantos pacientes doentes estão com resultados negativos?
- Quantos pacientes sadios estão com resultados positivos?

E a partir disso identificar quem são os elementos do espaço amostral e do evento.

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

15%	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno se equivocou e considerou apenas um dos resultados errados da amostra do medicamento. Sendo, 75 o evento considerado em 500 pacientes do espaço amostral. Uma possibilidade de cálculo seria: $P = \frac{75}{500} = 0{,}15 = 15\%$

(B)

25%	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno não interpretou corretamente o enunciado e considerou como evento os indivíduos que não tem a doença. Sendo 125 o evento considerado em 500 pacientes do espaço amostral. Uma possibilidade de cálculo seria: $P = \frac{(75+50)}{500} = \frac{125}{500} = 0{,}25 = 25\%$

(C)

30%	**Resposta correta.**	O aluno realizou interpretou corretamente o enunciado e a tabela do problema,somando todos os pacientes doentes com resultado negativo e sadios com resultados positivos, sendo o evento 150 e o espaço amostral 500.

(D)

50%	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno não interpretou corretamente o problema e considerou a probabilidade de 50% para certo e 50% para errado.

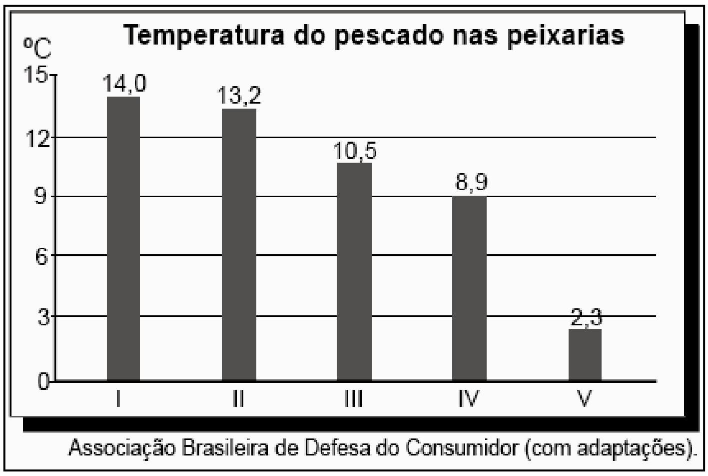
(E)

70%	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno se equivocou ao interpretar o problema e calculou a probabilidade do exame estar certo. $P = \frac{350}{500} = 0{,}7 = 70\%$.

Habilidade	Calcular a probabilidade simples de um evento.
MP13	

Questão 5

(ENEM) Uma das principais causas da degradação de peixes frescos é a contaminação por bactérias. O gráfico apresenta resultados de um estudo acerca da temperatura de peixes frescos vendidos em cinco peixarias. O ideal é que esses peixes sejam vendidos com temperaturas entre **2ºC** e **4ºC**.



Selecionando-se aleatoriamente uma das cinco peixarias pesquisadas, a probabilidade de ela vender peixes frescos na condição ideal é igual a

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) $\frac{4}{5}$

(D) $\mathbf{\frac{1}{5}}$

(E) $\frac{1}{4}$

CORREÇÃO COMENTADA

Professor, a leitura do gráfico é fundamental para a resolução desta atividade, tendo em vista que a partir dele podemos identificar quem é o espaço amostral e o evento para calcular a probabilidade de escolhermos ao acaso uma peixaria que esteja nos padrões exigidos para a venda de peixes na temperatura adequada.

Espera-se que o aluno identifique no gráfico que, somente a peixaria V possui temperatura no intervalo 2°C < 2,3C < 4°C.

Então temos:

- Número do espaço amostral n(Ω) = 5 peixarias
- Número do evento n(E) = 01 (Peixaria V)

$$P = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{1}{5}$$

Grade de Correção

(A)

$\frac{1}{2}$	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno se equivocou ao interpretar o enunciado e o gráfico do problema. Uma possibilidade se raciocínio seria utilizar o intervalo de temperaturas de 2ºC a 4°C para encontrar erroneamente a probabilidadeP = 2/4 =1/2

(B)

$\frac{2}{3}$	Resposta incorreta	O aluno possivelmente identificou corretamente que peixaria V está vendendo os peixes na temperatura adequada, porém se equivocou ao calcular a probabilidade e assinalou a alternativa que indicava a expressão 2/3 associando erroneamente a temperatura 2,3°C

(C)

$\frac{4}{5}$	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno se equivocou e calculou a probabilidade de escolher ao acaso uma peixaria que não venda os peixes dentro da condição, ou seja, 4 dentre as 5 peixarias não vendem peixes na temperatura adequada.

(D)

$\frac{1}{5}$	**Resposta correta**	O aluno interpretou corretamente o enunciado e gráfico apresentado no problema e identificou que somente a peixaria V possui temperatura no intervalo indicado 2°C < 2,3°C <4°C. Então dentre as cinco peixarias temos somente uma com a condição ideal. P = 1/5.

(E)

$\frac{1}{4}$	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno identificou corretamente que apenas uma das peixarias atende a condição de vender os peixes na temperatura adequada, porém ao calcular a probabilidade considerou o número do evento corretamente, igual a 1 e o número do espaço amostral considerou as outras 4 peixarias fazendo o seguinte cálculo P = 1/4

Habilidade	Calcular a probabilidade simples da ocorrência de um evento.
MP13	

Questão 6

Uma loja de roupa fez a seguinte promoção:

"Nas compras acima de R$200,00 reais você ganha um cupom para concorrer a uma TV 42 polegadas".

No final da promoção a central de atendimento havia distribuído 1500 cupons numerados de 1 a 1500. Uma das senhas é sorteada ao acaso, qual a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 130?

(A) $\frac{1}{1500}$

(B) $\frac{13}{1500}$

(C) $\mathbf{\frac{13}{150}}$

(D) $\frac{1}{130}$

(E) $\frac{150}{13}$

CORREÇÃO COMENTADA

Inicialmente vamos identificar o espaço amostral e o evento para o cálculo da probabilidade.

Espaço amostral: 1500 cupons.

Evento: Os primeiros 130 cupons.

Então, usando a razão da probabilidade, temos que:

$$P = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{130}{1500} = \frac{13}{150}$$

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

$\frac{1}{1500}$	Resposta incorreta.	O aluno se equivocou ao interpretar o problema e considerou apenas uma possibilidade no espaço amostral de 1500 clientes.

(B)

$\frac{13}{1500}$	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno interpretou corretamente o enunciado, identificou o evento e o espaço amostral. Porém se equivocou ao simplificar a razão no cálculo da probabilidade. Uma possibilidade erronea de cálculo seria: $P = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{130}{1500} = \frac{13}{1500}$.

(C)

$\frac{13}{150}$	**Resposta correta.**	O aluno interpretou corretamente o enunciado, idenficou o espaço amostral e o evento para calcular a probablidade de sortearmos ao acaso um dos 130 primeiros clientes da loja.

(D)

$\frac{1}{130}$	Resposta incorreta.	O aluno se equivocou ao interpretar o problema e considerou apenas uma possibilidade no espaço amostral de 130 clientes.

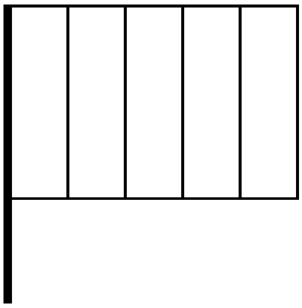
(E)

$\frac{150}{13}$	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno interpretou corretamente o enunciado, identificou o evento e o espaço amostral. Porém inverteu a razão que representa a probabilidade fazendo $P = \frac{n(\Omega)}{n(E)}$ ao invés de $P = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$.

Habilidade	Resolver problemas envolvendo o princípio multiplicativo da contagem.
MP14	

Questão 7

Uma professora de arte propôs aos seus alunos a confecção de uma bandeira oficial para representar a escola. Todos os alunos confeccionarão um modelo que irá para votação de todos os alunos da escola. Veja o molde da bandeira:



A bandeira deve seguir alguns padrões, que é a utilização das cores do uniforme da escola: azul, amarelo, vermelho e verde nas suas cinco faixas. Porém, duas faixas consecutivas não podem ser pintadas com a mesma cor. Quantas possibilidades diferentes os alunos terão para escolher a sua bandeira?

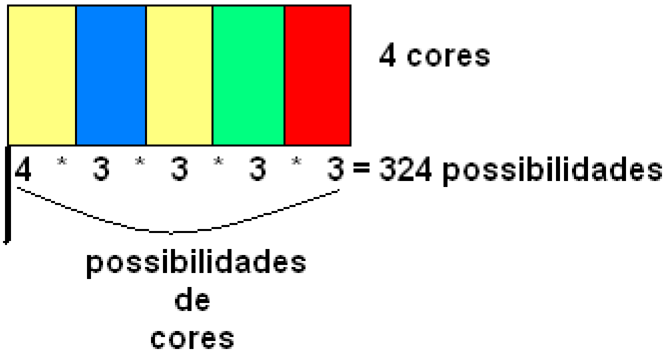
(A) 96

(B) 120

(C) 324

(D) 1024

(E) 1280



Professor, ao fazer a devolutiva da questão é importante enfatizar que as cores podem se repetir, com exceção da sua faixa consecutiva. O exemplo a cima destaca que a cor amarela aparece na primeira e terceira faixa.

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

96	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno se equivocou ao interpretar o problema, considerando que nas primeiras 4 faixas todas as cores sejam distintas e apenas na última se repita uma delas. Uma possibilidade de cálculo seria: $4.3.2.1.4 = 96$.

(B)

120	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno se equivocou ao interpretar o problema, considerando que nas primeiras 4 faixas todas as cores sejam distintas e apenas na última se repita uma delas. Uma possibilidade de cálculo seria: $4.3.2.1.4 = 96$.

(C)

324	**Resposta correta**	O aluno interpretou corretamente o enunciado e fez os cálculos obedecendo aos padrões que a professora impôs. 4.3.3.3.3 = 324

(D)

1024	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno não considerou a condição de que a faixa consecutiva da bandeira não poderá ser pintada da mesma cor. Um possível raciocínio de cálculo seria $4.4.4.4.4 = 1024$.

(E)

1280	Resposta incorreta	O aluno compreendeu o enunciado e como fazer cálculo para atender a condição de que duas faixas consecutivas não poderão ter a mesma cor, porém, se equivocou e ao encontrar o resultado utilizou 5 cores ao invés de 4 como indica o problema. Uma possibilidade de cálculo seria: $5.4.4.4.4 = 1280$.

Habilidade MP14	Resolver problemas envolvendo o princípio multiplicativo da contagem.

Questão 8

Uma empresa de cartão de crédito enviará cartões para seus clientes com senhas previamente definida para utilizar o cartão. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, sempre começando com Letra. Veja as opções descritas no quadro a seguir, em que “L” e “D” representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

Opção	Formato
I	LLLLL
II	LLLLD
III	LLLDD
IV	LLDDD
V	LDDDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, **não** podem se repetir em qualquer das opções. A opção que oferece o maior número possibilidades distintas de senhas é:

(A) I

(B) II

(C) III

(D) IV

(E) V

Para a resolução deste problema, é muito importante ressaltar os elementos fundamentais que fazem parte da estrutura da senha, letras e números. O enunciado destaca 26 letras do alfabeto e 10 algarismos do sistema de numeração decimal. Comparando os 5 tipos de senhas disponíveis usando apenas letras ou letras e números distintos, a possibilidade que apresenta o maior número de senhas possíveis é aquela composta apenas por letras. Veja:

LLLLL = 26.25.24.23.22 = 7.893.600 senhas diferentes.

LLLLD = 26.25.24.23.10 = 3.588.000 senhas diferentes.

LLLDD = 26.25.24.10.9 = 1.404.000 senhas diferentes.

LLDDD = 26.25.10.9.8 = 468.000 senhas diferentes.

LDDDD = 26.10.9.8.7 = 131.040 senhas diferentes.

Grade de Correção

(A)

I	**Resposta correta.**	A aluno interpretou corretamente o enunciado e a tabela apresentada no problema, concluindo que a senha que possui somente letras apresenta mais possibilidades distintas tendo em vista que o número de letras do alfabeto (26) é maior que o número de dígitos do sistema de numeração decimal (10).

(B)

II	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno se equivocou, pois, o número de possibilidades das senhas LLLLD (26.25.24.23.10) é menor que LLLLL (26.25.24.23.22).

(C)

III	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno se equivocou, pois, o número de possibilidades das senhas LLLDD (26.25.24.10.9) é menor que LLLLL (26.25.24.23.22).

(D)

IV	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno se equivocou, pois, o número de possibilidades das senhas LLDDD (26.25.10.9.8) é menor que LLLLL (26.25.24.23.22).

(E)

V	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno se equivocou, pois, o número de possibilidades das senhas LDDDD (26.10.9.8.7) é menor que LLLLL (26.25.24.23.22).

Habilidade MP15/MP16	Resolver problemas de análise combinatória, que envolvam arranjos simples e/ou combinações.

Questão 9

No sistema de numeração decimal existem 9 000 números de 4 algarismos, dos quais 1 000 é o menor deles e 9 999 o maior. Entre esses 9 000 números, muitos deles não possuem algarismos repetidos, como 1 025, 2 149, 4 582 ou 9 760. Quantos números com 4 algarismo distintos possuem em nosso sistema de numeração?

(A) 10000

(B) 9000

(C) 6561

(D) 5040

(E) 4536

CORREÇÃO COMENTADA

Antes de fazer a correção do problema, é importante retomar com os alunos a estrutura do sistema de numeração decimal e destacar, por exemplo, que em um número de 4 algarismos o zero nunca aparece na unidade de milhar.

Para encontrar a solução devemos considerar que na casa da unidade de milhar temos 9 possibilidades (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9). Nas outras três posições, o zero retorna para a contagem e devemos calcular o arranjo sem repetição de 9 algarismos tomados 3 a 3. Veja:

$$9.A_{9,3} = 9.\frac{9!}{(9-3)} = 9.\frac{9!}{6!} = 9.\frac{9.8.7.6!}{6!} = 9.9.8.7 = 4536.$$

A tabela a seguir mostra o total de possibilidades em cada valor posicional. Lembramos que, utilizamos o **arranjo simples** para obter a quantidade de agrupamentos possíveis de serem realizados com os elementos de um conjunto finito. No arranjo os elementos trocam de posição, ou seja, ordem. Com isso os agrupamentos tornam-se distintos, por possuírem seus elementos organizados em uma ordem diferente, que é o caso dos problemas que utilizam o sistema de numeração.

Unidade de milhar	**Centena**	**Dezena**	**Unidade**
9 possibilidades (exclui-se o zero)	9 possibilidades (dos 10 algarismos, um já foi escolhido na posição anterior, porém o zero retorna a contagem)	8 possibilidades (já foram escolhidos dois algarismos nas casas anteriores).	7 possibilidades (Já foram escolhidos 3 nas casas anteriores).
9	9	8	7

9.9.8.7 = 4536 números com quatro algarismos distintos.

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

10000	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno se equivocou e calculou o arranjo com repetição, considerando que cada valor posicional pode assumir qualquer um dos 10 algarismo do sistema de numeração decimal. Uma possibilidade de cálculo seria $A_{10,4} = 10^4 = 10.10.10.10 = 10000$). Outra hipótese para não escolher essa alternativa é que no enunciado do problema é destacado que existem 9000 números com 4 algarismos, ou seja, 10000 é maior que 9000.

(B)

9000	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno interpretou o problema, porém, se confundiu e fez o cálculo do total de números com 4 algarismo, sejam repetidos ou não. Provavelmente o cálculo efetuado foi $9.A_{10,3} = 9.10^3 = 9.10.10.10 = 9000$). Destacando que o aluno considerou que no valo posicional da unidade de milhar não podemos considerar o zero.

(C)

6561	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno se equivocou fazendo o cálculo das possibilidades considerando apenas 9 algarismos utilizando o conceito de arranjo com repetição. Uma possibilidade de raciocínio seria: $A_{9,4} = 9^4 = 9.9.9.9 = 6561$.

(D)

5040	Resposta incorreta	O aluno interpretou corretamente o problema e fez os cálculos, porém considerou o zero na posição da unidade de milhar. Uma possibilidade de cálculo seria $A_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!} = 10.9.8.7 = 5040$.

(E)

4536	**Resposta correta**	O aluno interpretou corretamente o problema, considerando a estrutura numérica do sistema de numeração decimal, o valor posicional e encontrou a quantidade de números com 4 algarismos distintos realizando o seguinte cálculo: $9.A_{9,3} = 9.\frac{9!}{(9-3)} = 9.\frac{9!}{6!} = 9.\frac{9.8.7.6!}{6!} = 9.9.8.7 = 4536$.

Habilidade MP15/MP16	Resolver problemas de análise combinatória, que envolvam arranjos simples e/ou combinações.

Questão 10

Um treinador de basquete deseja escolher 05 atletas para compor um time profissional, essa escolha deverá ser feita dentre os 10 integrantes da equipe do seu clube. De quantas maneiras diferentes o treinador poderá organizar seu time?

(A) 2

(B) 50

(C) 252

(D) 30240

(E) 100000

CORREÇÃO COMENTADA

Professor, para fazer a devolutiva desta questão é importante destacar que a combinação é o número total de agrupamentos e independe da posição que cada elemento assume no grupo. No problema em questão temos uma equipe de 10 atletas que serão organizados em times de 5 jogadores, independe da posição que cada um assumirá no time.

A relação fundamental para a combinação é:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Onde ***n*** representa o total de atletas na equipe e ***p*** a quantidade de integrantes do time. Então temos que organizar grupos com 10 atletas tomados 5 a 5:

$$C_{10,5} = \frac{10!}{5!\,(10-5)!} = \frac{10!}{5!\,5!} = \frac{10.9.8.7.6.5!}{5!\,5!} = \frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2.1} = 252$$

É muito comum os alunos confundirem arranjo com combinação ou vice-versa, caso perceba esse problema proporcione atividades complementares contextualizadas para que os estudantes percebam as características específicas de cada um.

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

2	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno se equivocou ao identificar a quantidade de times que podem ser formados com 10 atletas e organizou o grupo em 2 times de 05 pessoas.

(B)

50	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno não interpretou corretamente o problema e não utilizou a definição de combinação de elementos. Uma possibilidade de raciocínio equivocado é multiplicar o total de integrantes da equipe com a quantidade de atletas que deve compor o time. $10.5 = 50$

(C)

252	**Resposta correta**	O aluno interpretou corretamente o problema e utilizou a relação para encontrar a combinação de ***n*** elementos agrupados ***p*** a ***p***. realizando o seguinte cálculo $C_{n,p} = C_{10,5}$.

(D)

30240	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno se equivocou ao interpretar o problema e fez o cálculo do arranjo de ***n*** elementos tomados ***p*** a ***p.*** Ou seja, considerou os 10 integrantes da equipe organizados em 05 posições específicas do time. $A_{10,5} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10.9.8.7.6.5!}{5!} = 10.9.8.7.6 = 30240$

(E)

100000	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno se equivocou ao interpretar o problema e fez o calculo do arranjo de ***n*** elementos tomados ***p*** a ***p.*** Ou seja, organizando os 10 integrantes da equipe tomados 5 a 5 com a ideia do arranjo simples com repetição. $A_{10,5} = 10^5 = 10.10.10.10.10 = 100000$

Habilidade MP15/MP16	Resolver problemas de análise combinatória, que envolvam arranjos simples e/ou combinações.

Questão 11

Uma pessoa vai retirar dinheiro num caixa eletrônico de um banco, mas na hora de digitar a senha esquece-se do número.

Ela apenas lembra que o número tem 5 algarismos, começa com 6, não tem algarismos repetidos e termina com o algarismo 7. O número máximo de tentativas para acertar a senha é:

(A) 6

(B) 210

(C) 336

(D) 1000

(E) 14112

CORREÇÃO COMENTADA

Professor, ao fazer a devolutiva desta questão, é importante destacar as informações dos números fixos da senha.

A senha tem 5 algarismos distintos;

___ ___ ___ ___ ___

O primeiro dígito é o número 6 e o último é o 7.

6 ___ ___ ___ 7.

Como não há dígitos repetidos na senha, ao fixar o número 6 na primeira posição e o número 7 na última, temos que arranjar os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, e 9 nos três dígitos centrais.

Veja uma possibilidade de cálculo:

$$A_{8,3} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8.7.6.5!}{5!} = 8.7.6 = 336\ possibilidades.$$

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

6	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno se equivocou e considerou a quantidade de números faltantes para preencher a senha 3.2.1. = 6

(B)

210	Resposta incorreta.	O aluno não interpretou corretamente o enunciado do problema considerando os valores numéricos apresentados no problema, fazendo o produto entre eles. 7.6.5 = 210.

(C)

336	**Resposta correta**	O aluno interpretou corretamente o problema, afixou os números no início e final da senha com 5 dígitos distintos e calculou o arranjo de 8 algarismos tomados 3 a 3: $A_{8,3} = 336$.

(D)

1000	Resposta incorreta.	Possivelmente o aluno desconsiderou a informação de que não há algarismos repetidos e fez o cálculo do arranjo com repetição de 10 algarismos em três lugares 10.10.10. $\mathrm{A}_{10,3} = 10^3$.

(E)

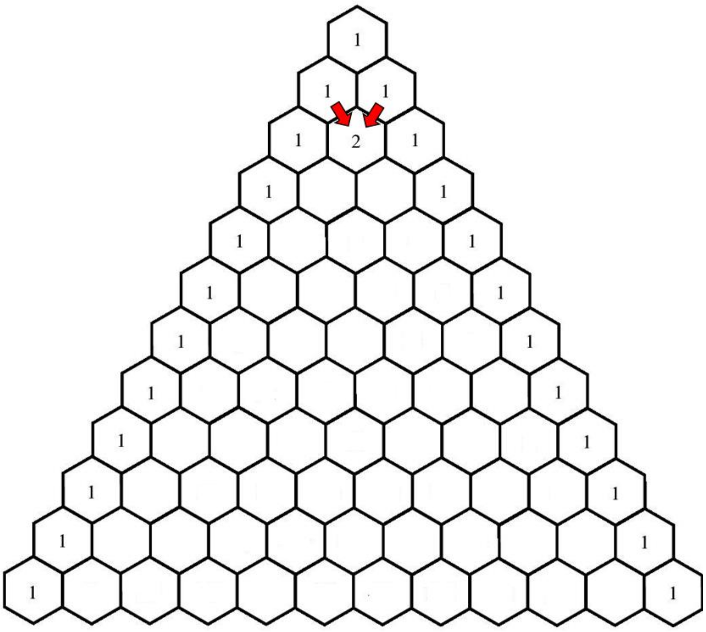
14112	Resposta incorreta.	O aluno interpretou corretamente o problema, afixou os números no início e final da senha com 5 dígitos distintos, porém se equivocou e multiplicou o 6 afixado no primeiro dígito e o 7 afixado no último com as possibilidades em cada valor posicional da segunda, terceira e quarta casa. 6.8.7.6.7 =14112.

Habilidade	Identificar a regularidade na construção do Triângulo de Pascal.
MP17	

Questão 12

A soma dos dois primeiros números de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 10. Quantos elementos dessa linha são menores que 50?

Complete a imagem para responder corretamente.



(A) 5 números

(B) 6 números

(C) 11 números

(D) 25 números

(E) 32 números

CORREÇÃO COMENTADA

Para visualizar a linha que satisfaz a condição do enunciado, primeiramente é necessário o preenchimento do triângulo de Pascal. Na Linha 9 cujo os elementos são (1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1) identificamos a condição de que a soma dos dois primeiros números 1 + 9 = 10, nessa linha temos 06 números menos que 50.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

OBS: A contagem das linhas do triângulo de pascal começa na linha 0, que possui um único elemento, o número 1.

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

5	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno interpretou corretamente o enunciado, mas se equivocou e marcou os elementos maiores que 50.

(B)

6	**Resposta correta.**	O aluno interpretou corretamente o enunciado, preencheu o triângulo de Pascal até identificar a linha cuja soma dos dois primeiros termos seja 10 e concluiu que há 06 números menores que 50 nessa linha.

(C)

11	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno interpretou corretamente o enunciado, mas se equivocou e contou todos os elementos da linha e não apenas o solicitado, menores que 50.

(D)

25	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno se equivocou e contou os elementos previamente preenchido na imagem.

(E)

32	Resposta incorreta	Possivelmente o aluno se equivocoue somou todos os elementos da linha 05 que aparece o valor 10 pela primeira vez.

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

COORDENADORIAS

Coordenadoria Pedagógica - COPED
Coordenador: Caetano Pansani Siqueira

Coordenadoria de Informação, Tecnologia, Evidência e Matrícula - CMITE
Coordenador: Thiago Guimarães Cardoso

DEPARTAMENTOS

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão Pedagógica - DECEGEP
Diretor: Valéria Arcari Muhi

Centro dos Anos Finais do Ensino Fundamental - CEFAF
Diretora: Carolina dos Santos Batista Murauskas

Centro de Ensino Médio - CEM
Diretora: Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

Equipe Curricular CoPED de Matemática – Leitura crítica e validação do material
Ilana Brawerman, João dos Santos Vitalino, Marcos José Traldi, Otávio Yoshio Yamanaka e Vanderley Aparecido Cornatione

Autoria do material
Benedito de Melo Longuini, Edson dos Santos Pereira, Erika Aparecida Navarro Rodrigues, Fernanda Machado Pinheiro, Ines Chiarelli Dias, Leandro Geronazzo, Lilian Ferolla de Abreu, Lilian Silva de Carvalho, Luciene Ramos Americo, Malcon Pulvirenti, Marques, Marcelo Balduino Silva, Maria Denes Tavares da Silva, Rodrigo Soares de Sá, Rosilaine Sanches Martins, Simoni Renata e Silva Perez, Sueli Aparecida Gobbo Araujo, Willian Casari de Souza.

Departamento de Avaliação Educacional - DAVED
Diretora: Patricia de Barros Monteiro
Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Planejamento e Análise de Avaliações - CEPAV
Diretor: Juvenal de Gouveia

Ademilde Ferreira de Souza, Cristiane Dias Mirisola, Ilton Campos Cavalcanti, Márcia Soares de Araújo Feitosa, Soraia Calderoni Statonato, Sylvia Russiano Toledo Casari

Centro de Aplicação de Avaliações - CEAPA
Diretora: Isabelle Regina de Amorim Mesquita

Amanda Morais Cardoso, Denis Delgado dos Santos, José Guilherme Brauner Filho, Kamila Lopes Candido, Nilson Luiz da Costa Paes, Teresa Miyoko Souza Vilela

Departamento de Tecnologia de Sistemas
Diretor: Marcos Aparecido Barros de Lima

Centro de Planejamento e Integração de Sistemas
Diretora: Camila da Silva Alcazar
Viviana Fernandes dos Santos – Analista de Sistemas

Representantes do CAPE
Leitura crítica, validação e adaptação do material para os deficientes visuais
Tânia Regina Martins Resende