GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

Caderno do Professor

1ª Série do Ensino Médio

Matemática

São Paulo

3º Bimestre de 2019

24ª Edição

APRESENTAÇÃO

A Avaliação da Aprendizagem em Processo – AAP - se caracteriza como uma ação desenvolvida de modo colaborativo entre a Coordenadoria de Gestão da Educação Básica e a Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional.

Iniciada em 2011 e voltada a apenas dois anos/séries, foi gradativamente sendo expandida e, desde 2015, abrange todos os alunos dos Ensinos Fundamental e Médio além de, continuamente, aprimorar seus instrumentos.

A AAP, fundamentada no Currículo do Estado de São Paulo, propõe o acompanhamento da aprendizagem das turmas e alunos de forma individualizada, com um caráter diagnóstico. Tem como objetivo apoiar as unidades escolares e os docentes na elaboração de estratégias adequadas a partir da análise de seus resultados, contribuindo efetivamente para melhoria da aprendizagem e desempenho dos alunos, especialmente nas ações de recuperação contínua.

As habilidades selecionadas para a AAP, em Língua Portuguesa e Matemática, têm como referência, a partir de 2016, a Matriz de Avaliação Processual elaborada pela CGEB e já disponibilizada à rede.

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental permanece a articulação com as expectativas de aprendizagem de Língua Portuguesa e Matemática e com os materiais do Programa Ler e Escrever e da Educação Matemática nos Anos Iniciais – EMAI.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação, na forma de cadernos de provas para os alunos, também foram elaborados os respectivos exemplares do Professor, com orientações específicas para os docentes, instruções para a aplicação (Anos Iniciais), quadro de habilidades de cada prova, gabaritos, orientações e grades para correção e recomendações pedagógicas gerais.

Estes subsídios, agregados aos registros que o professor já possui e informações sistematizadas no Sistema de Acompanhamento dos Resultados de Avaliações - SARA, incorporando os dados resultantes da AAP, devem auxiliar no planejamento, replanejamento e acompanhamento das ações pedagógicas, mobilizando procedimentos, atitudes e conceitos necessários para as atividades de sala de aula, sobretudo aquelas relacionadas aos processos de recuperação das aprendizagens.

COORDENADORIA DE GESTÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA - CGEB

COORDENADORIA DE INFORMAÇÃO, MONITORAMENTO E AVALIAÇÃO EDUCACIONAL - CIMA

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

Questão	Código da Habilidade	Descrição
01	13	Aplicar procedimentos de cálculos com potências de mesma base.
02		
03	14	Identificar o gráfico de uma função exponencial.
04		
05	15	Resolver situações-problema envolvendo função exponencial.
06		
07	16	Aplicar procedimentos de cálculos com logaritmos.
08		
09	17	Identificar os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas.
10		
11	18	Resolver situações-problema envolvendo função logarítmica.
12		

GABARITO

	A	B	C	D	E
01	○	○	●	○	○
02	○	○	○	○	●
03	○	●	○	○	○
04	○	○	○	●	○
05	○	○	●	○	○
06	○	○	○	○	●
07	○	○	○	●	○
08	○	○	●	○	○
09	○	○	●	○	○
10	●	○	○	○	○
11	○	○	●	○	○
12	○	○	○	●	○

COMENTÁRIOS E RECOMENDAÇÕES PEDAGÓGICAS

A premissa básica, a respeito de um processo avaliativo deve ser considerada como instrumento que subsidiará tanto o aluno no seu desenvolvimento cognitivo, quanto ao professor no redimensionamento de sua prática pedagógica.

Desta forma, a avaliação da aprendizagem passa a ser um instrumento que auxiliará o educador a atingir os objetivos propostos em sua prática educativa, neste caso a avaliação sob essa ótica deve ser tomada na perspectiva diagnóstica, servindo como instrumento para detectar as dificuldades e possibilidades de desenvolvimento do educando.

Neste sentido, as questões que constam deste caderno, procuram verificar o nível de desenvolvimento das habilidades descritas na Matriz de Avaliação Processual de Matemática, notadamente as do 3º bimestre letivo.

Nas linhas a seguir, apresentamos uma breve caracterização das habilidades e o seu respectivo conteúdo.

- (MP13) – Aplicar procedimentos com potências de mesma base

As potências já foram apresentadas aos alunos no Ensino Fundamental (no 6º ano, as primeiras noções; no 8º ano, as potências com expoentes inteiros, no 9º ano, os expoentes racionais e reais). Na primeira série do Ensino Médio, consolidam-se o significado de potência, sintetizando os fatos conhecidos na apresentação da função exponencial, com destaque para sua forma peculiar de crescimento ou decrescimento.

- (MP14) – Identificar o gráfico de uma função exponencial.

Um dos objetivos principais desta habilidade é o de estabelecer certa familiaridade com os gráficos de funções da forma $y = y_0 \cdot a^{kx}$, em que y_0 e k são constantes, e com cálculos envolvendo potências em situações práticas, em diferentes contextos.

- (MP15) – Resolver situações-problema envolvendo função exponencial.

Assim como as funções f(x) = ax + b constituem um padrão para o estudo dos fenômenos lineares, em que o crescimento ou decrescimento acontece a taxas constantes, as funções exponenciais constituem um novo padrão para a descrição e a compreensão de uma nova classe de fenômenos de natureza não linear.

- (MP16) – Aplicar procedimentos de cálculos com logaritmos.

Compreender e explorar as propriedades dos logaritmos, não passa de seu reconhecimento como expoentes de potências, nos cálculos já conhecidos. Sem dúvida, a linguagem dos logaritmos amplifica muito a competência leitora: trata-se da leitura e da compreensão de uma extensa classe de fenômenos, associados ao crescimento ou ao decrescimento exponencial.

- (MP17) – Identificar os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas.

A continuidade do desenvolvimento da habilidade anteriormente descrita ocorre por meio da exploração de gráficos de funções exponenciais e logarítmicas, verificando a capacidade de identificar as interdependências envolvidas, e reconhecer as relações existentes nas duas funções.

- (MP18) – Resolver situações problemas envolvendo função logarítmica.

Para finalizar, o diagnóstico do desenvolvimento das habilidades relativas ao 3º bimestre, inserimos a contextualização do estudo das funções logarítmicas, com destaque para as propriedades fundamentais desta função, cuja ênfase será, portanto, a contextualização dos conteúdos e temas já estudados ao longo das situações anteriores. A competência maior a ser desenvolvida é a capacidade de articular os conhecimentos já estudados, tendo em vista a intervenção direta na realidade.

Finalmente, a avaliação, entendida aqui como processual, haverá que ser percebida como um processo de mapeamento e da diagnose do processo de aprendizagem, ou seja, a obtenção de indicadores qualitativos do processo de ensino-aprendizagem no trabalho docente.

Seguindo esta concepção, o PCN destaca que:

> [...] cabe à avaliação fornecer aos professores as informações sobre como está ocorrendo a aprendizagem: os conhecimentos adquiridos, os raciocínios desenvolvidos, as crenças, hábitos e valores incorporados, o domínio de certas estratégias, para que ele possa propor revisões e reelaborações de conceitos e procedimentos parcialmente consolidados.
> (BRASIL, 2000, p. 54)

É importante salientar que as observações que constam nas grades de correção deste caderno são apenas pressupostos de resolução, cabendo ao professor analisar os registros dos alunos e não considerar as observações indicadas como norma padrão e que o objetivo maior, é a proposição de uma grade de correção pelo próprio professor e assim realizar uma análise de acordo com a realidade do processo de ensino-aprendizagem desenvolvido em sala de aula.

Equipe Curricular de Matemática – CEFAF/CGEB

Habilidade MP13	Aplicar procedimentos de cálculos com potências de mesma base.

Questão 1

Observe a sequência das figuras abaixo:

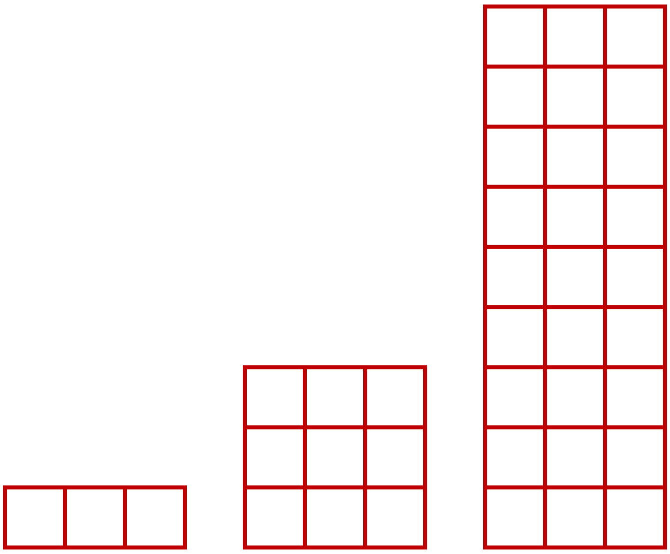


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Seguindo o mesmo padrão observado, a divisão do total de quadrados da figura 8 pelo total de quadrados da figura 3 resultará em:

(A) $3^{\frac{8}{3}}\ quadrados$

(B) $3^{3}\ quadrados$

(C) $3^{5}\ quadrados$

(D) $3^{8}\ quadrados$

(E) $3^{11}\ quadrados$

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo desta questão é que o aluno aplique procedimentos de cálculos com potência de mesma base.

A base das figuras permanece sempre a mesma (3) e o número de quadrados triplica de uma figura para outra, possibilitando a associação à potência de base 3. Ao perceber isso, fica fácil compreender que a figura 3 possui 3^3 quadrados e a que a figura 8 possui 3^8 quadrados.

Ao dividirmos o total de quadrados da figura 8 pelo total de quadrados da figura 3 obtemos:

$$\frac{3^8}{3^3} = 3^{8-3} = 3^5$$

Obtemos assim 3^5 quadrados, alternativa "C".

Professor, veja como seus alunos resolveram a questão e analise com eles os diferentes registros que fizeram.

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

$3^{\frac{8}{3}}$ *quadrados*	**Resposta incorreta**.	Possivelmente o aluno confundiu o conceito de divisão de potências de mesma base, realizando equivocadamente a divisão de seus expoentes.

(B)

3^3 *quadrados*	**Resposta incorreta.**	Provavelmente o aluno representou corretamente o total de quadrados da figura 3 em forma de potência, porém não se atentou para o enunciado do problema.

(C)

$\mathbf{3^5}$ ***quadrados***	**Resposta correta.**	**O aluno compreendeu corretamente o enunciado do problema. Encontrou o total de quadrados da figura 8, representou em forma de potência e realizou corretamente a divisão de potências de mesma base.**

(D)

3^8 *quadrados*	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno interpretou equivocadamente o enunciado do problema e apenas encontrou (e representou em forma de potência) o total de quadrados da figura 8.

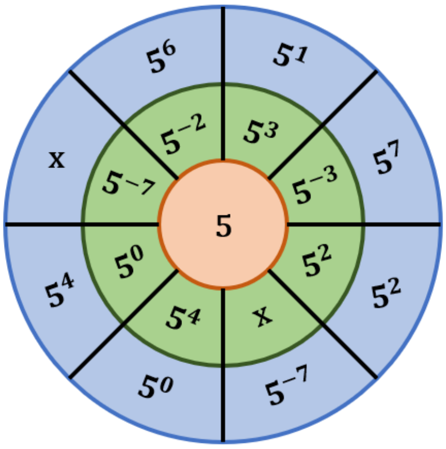
(E)

3^{11} *quadrados*	**Resposta incorreta.**	Provavelmente o aluno realizou erroneamente o produto do número total de quadrados das figuras 3 e 8.

Habilidade MP13	Aplicar procedimentos de cálculos com potências de mesma base.

Questão 2

No círculo mágico abaixo, o produto dos três valores, partindo do centro para a extremidade, resulta sempre em 5^5.



A partir do padrão observado acima, o valor de x é:

(A) 5^{-7}

(B) 5^{-3}

(C) 5^{-2}

(D) 5^{10}

(E) 5^{11}

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo da questão está em avaliar a habilidade do aluno ao trabalhar o produto de potências de mesma base. No produto de potências de mesma base, conserva-se a base e somam-se os expoentes. É possível verificar a afirmação do enunciado calculando qualquer produto partindo do centro para as extremidades. Por exemplo: $5.5^{-3}.5^{7} = 5^{1-3+7} = 5^{5}$. Tendo a afirmação como verdadeira, temos que: $5.x.5^{-7} = 5^{5}$, ou observando o outro x presente no círculo mágico, $5.5^{-7}.x = 5^{5}$. Tanto num caso como no outro temos que utilizar a propridade da multiplicação de potência de mesma base.

$$5.5^{-7}.x = 5^{5}$$

$$5^{1-7}.x = 5^{5}$$

$$5^{-6}.x = 5^{5}$$

A conclusão acerca do valor de x poderá vir através de um simples cálculo mental ou por meio de equação de 1º grau.

$$5^{-6}.x = 5^{5}$$

$$x = \frac{5^{5}}{5^{-6}}$$

$$x = 5^{5+6}$$

$$x = 5^{11}$$

Professor, veja como seus alunos resolveram a questão e analise com eles os diferentes registros que fizeram.

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

5^{-7}	**Resposta incorreta**.	Possivelmente o aluno percebeu que nos dois casos em que o x aparece o outro valor que aparece, além do 5 central, é o 5^{-7} em posições alternadas e isso induziu o aluno a acreditar que esse seria o valor de x.

(B)

5^{-3}	**Resposta incorreta.**	Provavelmente o aluno realizou erroneamente a soma dos expoentes 1 e -7 obtendo 8, levando-o a acreditar que deveria subtrair 3 para obter o expoente 5.

(C)

5^{-2}	**Resposta incorreta.**	O aluno que assinalou esta alternativa possivelmente se equivocou em dois momentos: desconsiderando o expoente 1 do 5 central e realizando erroneamente o cálculo do expoente -7 para obter o expoente 5.

(D)

5^{10}	**Resposta incorreta.**	Provavelmente o aluno compreende a propriedade do produto de potências de mesma base, porém não considerou o expoente 1 do 5 central.

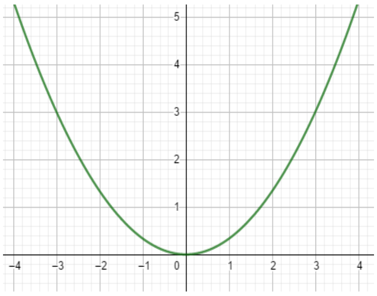
(E)

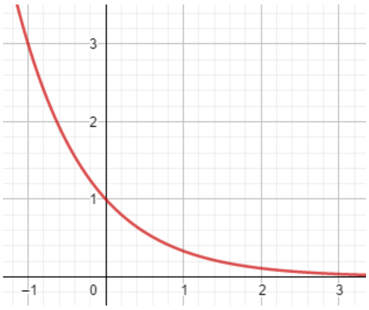
$\mathbf{5^{11}}$	**Resposta correta.**	**O aluno calculou corretamente o produto de potências de mesma base e realizou com eficiência a soma de expoentes inteiros.**

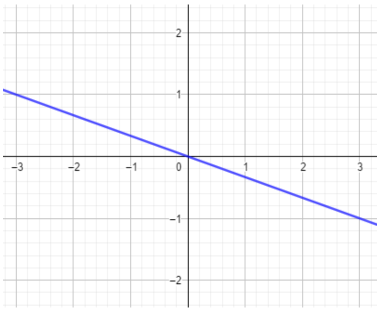
Habilidade MP14	Identificar o gráfico de uma função exponencial.

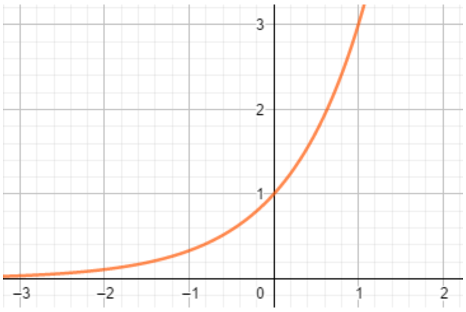
Questão 3

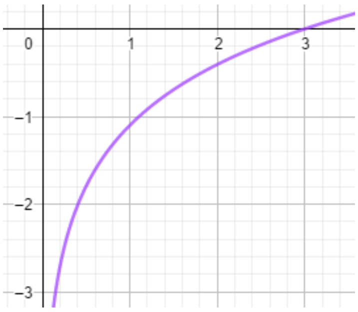
A representação gráfica da função exponencial $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ é:

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

(E) 

Correção Comentada

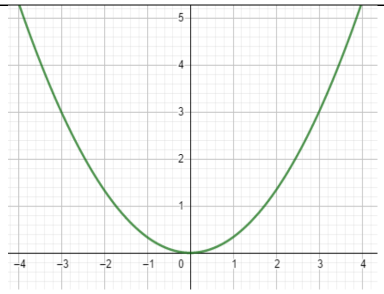
O objetivo desta questão é avaliar a percepção do aluno quanto as características de uma função exponencial através de seus gráficos. Espera-se que os alunos descartem as alternativas “A” (por ser de uma função quadrática) e “C” (por ser o gráfico de uma função afim. O “passo” seguinte seria avaliar se a função $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ é crescente ou decrescente, fato facilmente observado através de atribuição de valores a x (quando x=1, $f(x) = \frac{1}{3}$; quando x=2, $f(x) = \frac{1}{9}$; quando x=3, $f(x) = \frac{1}{27}$). Percebendo que f(x) é decrescente, a única alternativa cabível é a “B”.

Outra forma de encontrar o gráfico de $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ é observando os pontos notáveis dessa função, como por exemplo quando o x=0 temos o ponto (0; 1), já quando o x=-1 temos o ponto (-1; 3) e a única alternativa em que esses pontos pertencem a função é a alternativa “B”.

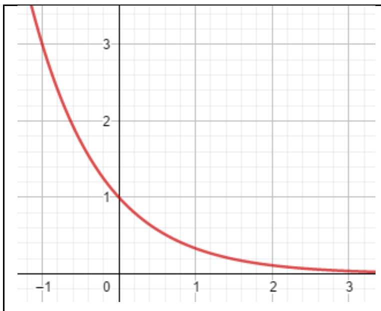
Professor, veja como seus alunos resolveram a questão e analise com eles os diferentes registros que fizeram.

Grade de Correção

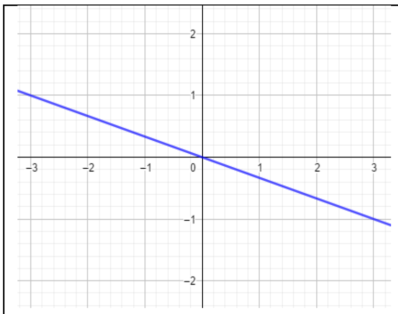
(A)

	**Resposta incorreta**.	O aluno que marcou esta alternativa possivelmente confunde função quadrática com função exponencial.

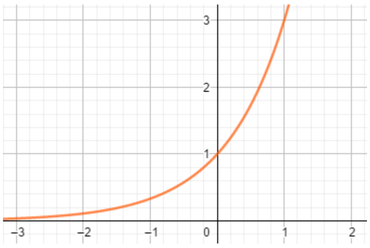
(B)

	**Resposta correta.**	**O aluno reconheceu as características de uma função exponencial e percebeu que, neste caso, a função era decrescente.**

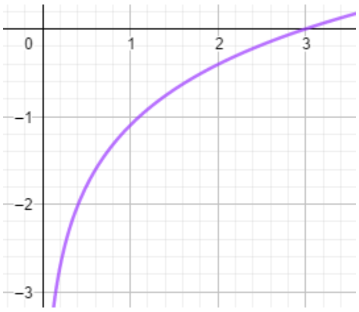
(C)

	**Resposta incorreta.**	Provavelmente o aluno não possui discernimento entre a função afim e a função exponencial, não compreendendo sequer a taxa de crescimento.

(D)

	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno reconhece uma função exponencial, porém não se atentou para os pontos notáveis da função descrita no enunciado, nem se era crescente ou decrescente.

(E)

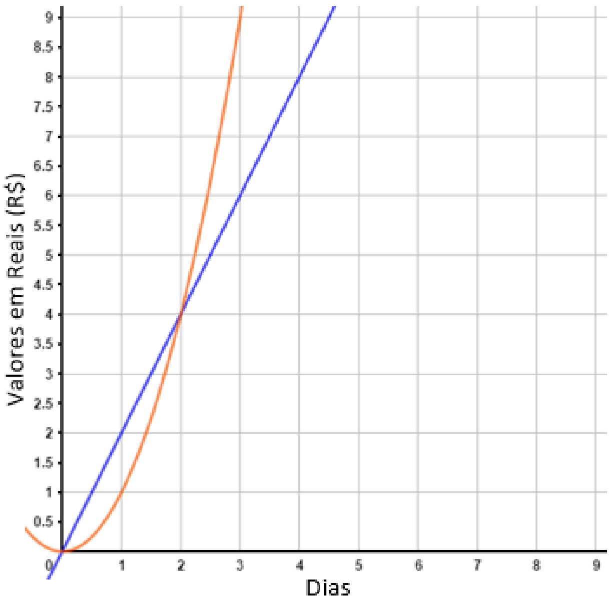
	**Resposta incorreta.**	O aluno que assinalou essa alternativa reconhece que o gráfico de uma função exponencial é representado por uma curva, porém não compreende que em uma função exponencial a taxa de crescimento é crescente e em uma função logarítmica a taxa de crescimento e decrescente. Além de não se atentar para os pontos notáveis da função dada e nem para o fato de tal função citada no enunciado ser decrescente.

Habilidade	Identificar o gráfico de uma função exponencial.
MP14	

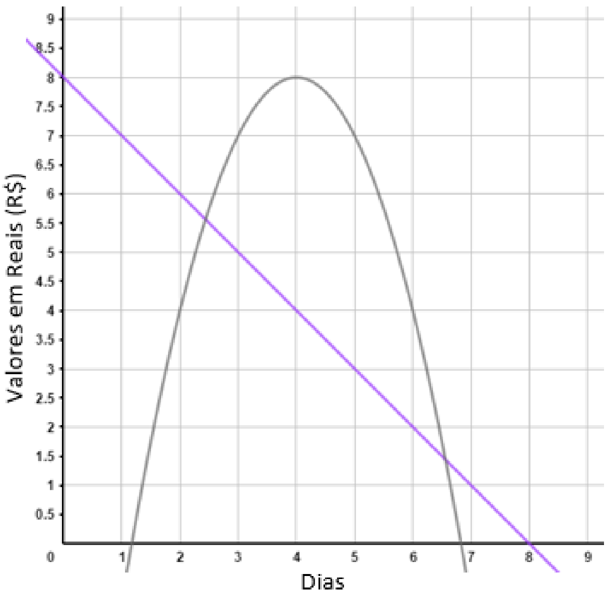
Questão 4

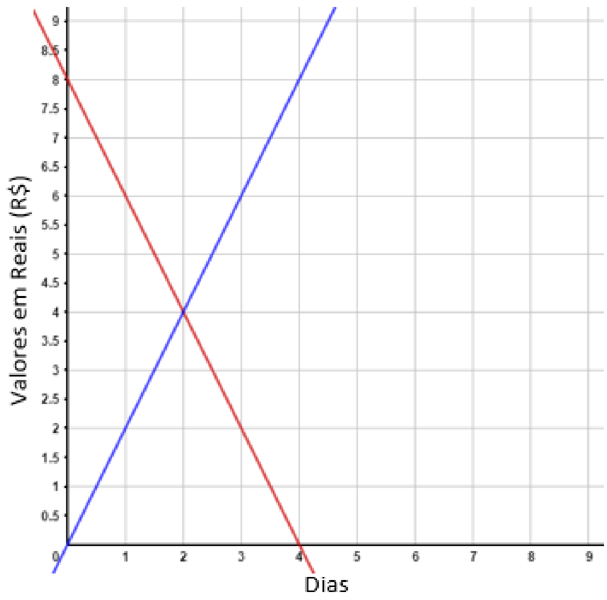
Benê, aluno do curso de matemática, fez um acordo com sua amiga Inês: iria lhe dar R$ 0,80 no primeiro dia e iria aumentar em R$ 0,80 o valor dado por dia (1º dia: R$ 0,80; 2º dia: R$ 1,60; 3º dia: R$ 2,40 e assim por diante), enquanto ela deveria lhe dar R$ 0,05 no primeiro dia e ir dobrando o valor a cada dia (1º dia: R$ 0,05; 2º dia: R$ 0,10; 3º dia: R$ 0,20; 4º dia: R$ 0,40; e assim por diante). No 8º dia Inês percebeu que estava pagando o mesmo tanto que estava recebendo de Benê e o questionou sobre o motivo para isso estar acontecendo. Benê demonstrou que o valor pago por ela era descrito por uma função exponencial ($g(x) = 0{,}05\,.\,2^{x-1}$), enquanto o valor recebido poderia ser representado por uma função afim ($f(x) = 0{,}8x$). Os gráficos que representam os valores pagos e recebidos por Inês são:

(A)

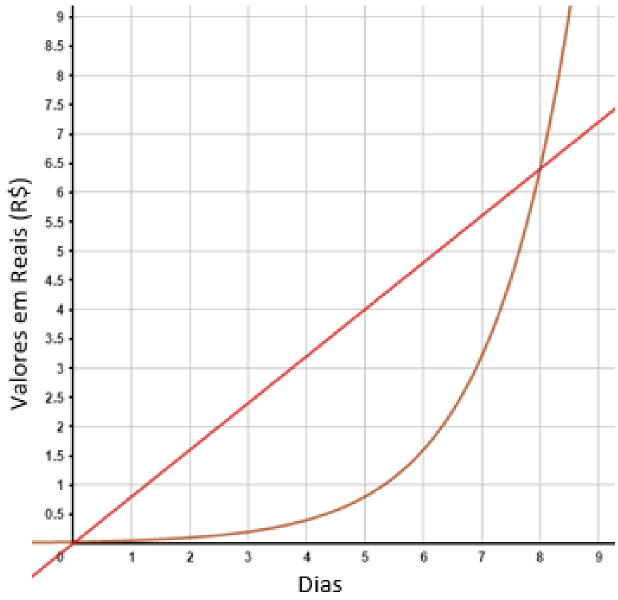


(B)

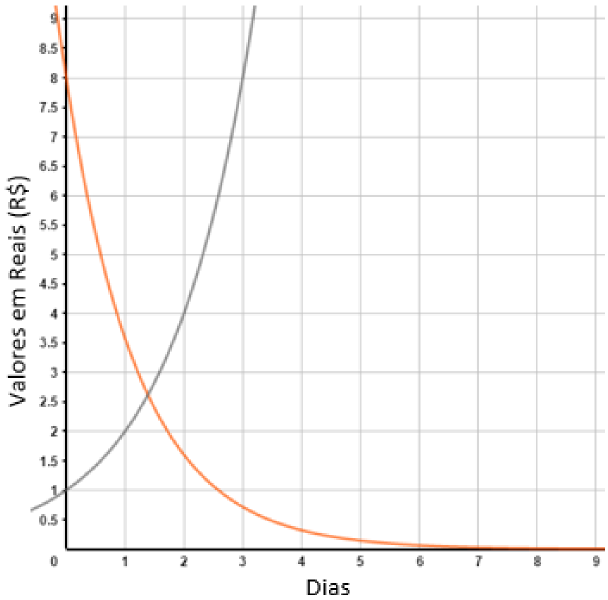



Valores em Reais (R$)
Dias

(C)


Valores em Reais (R$)
Dias

(D)

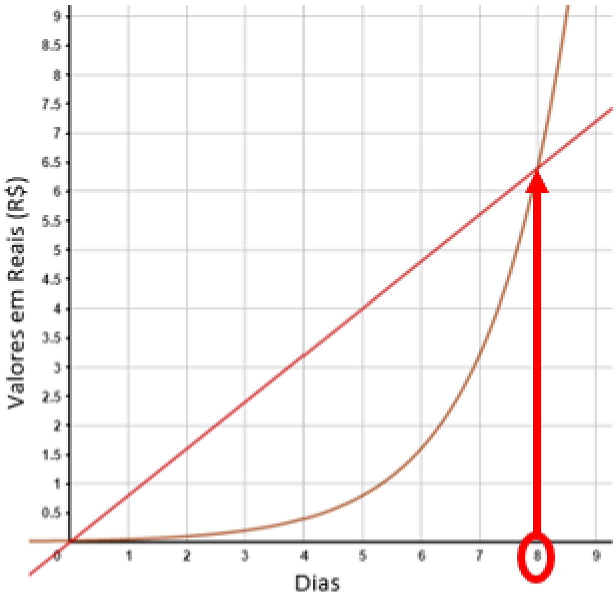

Valores em Reais (R$)
Dias

(E)

CORREÇÃO COMENTADA

Esta questão tem o objetivo de avaliar o conhecimento dos alunos com relação às características de uma função exponencial expressa em uma situação problema. No enunciado do problema os dois amigos Benê e Inês fazem uma aposta financeira: enquanto um (Benê) iniciava dando R$ 0,80 no primeiro dia e aumentando R$ 0,80 por dia, o outro (Inês) iniciava com R$ 0,05 e dobrava o valor a cada dia. Temos, portanto, uma função afim $f(x) = 0{,}8x$ e uma função exponencial $g(x) = 0{,}05 \, . \, 2^{x-1}$. Somente com essa informação de que uma é função afim e a outra é uma função exponencial já é possível eliminar os distratores, pois a única alternativa que possui uma função afim e uma função exponencial é a alternativa “D”.

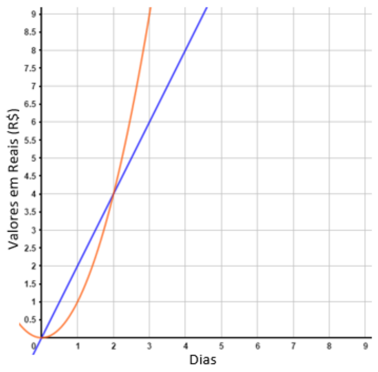
Outro ponto extremamente relevante apontado no enunciado é o fato de que no 8º dia o valor pago e o valor recebido por Inês se igualam, ou seja, as funções se “cruzam” no 8º dia. Isso ocorre apenas na alternativa “D”.



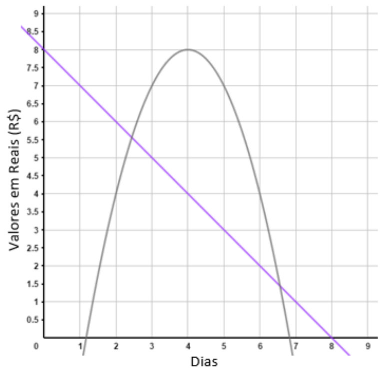
Professor, veja como seus alunos resolveram a questão e analise com eles os diferentes registros que fizeram.

GRADE DE CORREÇÃO

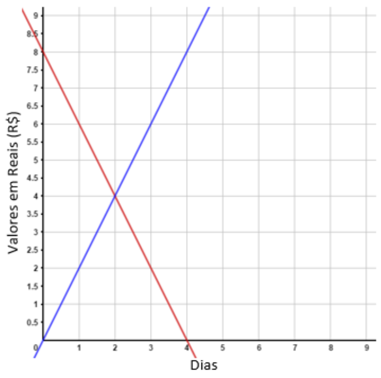
(A)

	**Resposta incorreta**.	Possivelmente o aluno não compreendeu o enunciado do problema. Não se atentou para o fato de que as funções se “encontram” no oitavo dia. Também confunde uma parte de uma curva parabólica com uma função exponencial.

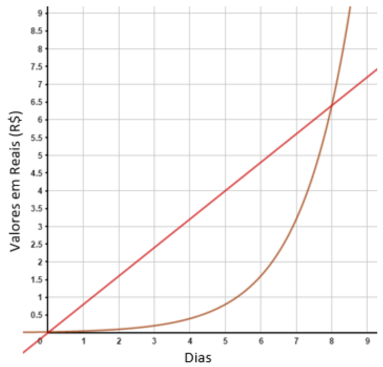
(B)

	**Resposta incorreta.**	O aluno que assinalou essa alternativa teve sua atenção chamada para o 8º dia e registrou esse valor como importante para a resolução do problema. Apesar da função afim cortar os eixos no ponto (8; 0) e (0; 8) e da função quadrática ter a imagem de seu vértice também com valor 8, não satisfazem a questão apontada na situação problema.

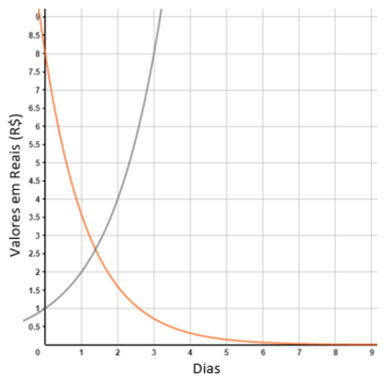
(C)

	**Resposta incorreta.**	Provavelmente o aluno não compreendeu o enunciado da questão e marcou aleatoriamente esta alternativa. Cabe verificar se ele acertou a questão anterior para perceber se ele reconhece a representação gráfica de uma função exponencial e nesta questão teve dificuldade de interpretação.

(D)

	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado da questão e assinalou a única alternativa que engloba uma função afim e uma função exponencial que se "tocam" no 8º dia.**

(E)

	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno compreende a função exponencial como uma curva, porém não se atentou para o fato de que apenas uma era exponencial, a outra era uma função afim. Não prestou atenção também no enunciado que ressalta que as duas se "encontram" no 8º dia.

Habilidade MP15	Resolver situações-problema envolvendo função exponencial.

Questão 5

Wilian aplicou R$ 300,00 na poupança de um determinado banco onde seu dinheiro renderia conforme a função: $f(t) = 300 \,.\, (1{,}1)^t$, com t representando o tempo em meses. Após 2 meses rendendo nesse banco, o dinheiro de Wilian aumentou para:

(A) $R\$ \ 121{,}00.$

(B) $R\$ \ 300{,}00.$

(C) $\boldsymbol{R\$ \ 363, 00}.$

(D) $R\$ \ 660{,}00.$

(E) $R\$ \ 1200{,}00.$

Correção Comentada

O objetivo desta questão é que o aluno resolva situações problema envolvendo função exponencial. A análise do crescimento de um capital submetido à juros compostos pode ser descrita por uma função exponencial.

Após dois meses de aplicação, temos que t=2, ou seja:

$$f(2) = 300 \,.\, (1{,}1)^2$$

$$f(2) = 300.1{,}21$$

$$f(2) = 363$$

O dinheiro de Wilian aumentou para R$ 363,00. A alternativa correta é a “C”.

Professor, veja como seus alunos resolveram a questão e analise com eles os diferentes registros que fizeram.

Grade de Correção

(A)

$R\$ \ 121{,}00$	**Resposta incorreta**.	Possivelmente o aluno calculou $1{,}1^2$, porém não considerou a parte decimal e não concluiu o cálculo com o capital de Wilian.

(B)

$R\$ \ 300{,}00$	**Resposta incorreta.**	O aluno que assinalou essa alternativa provavelmente não compreendeu o enunciado da questão e apenas utilizou o valor citado em seu início.

(C)

$\boldsymbol{R\$ \ 363, 00}$	**Resposta correta.**	**O aluno calculou corretamente $\boldsymbol{1, 1^2}$ e multiplicou corretamente esse valor por 300 encontrando o valor total do capital de Wilian após 2 meses de aplicação.**

(D)

$R\$ \ 660{,}00$	**Resposta incorreta.**	Provavelmente o aluno calculou erroneamente $300. (1{,}1)^2$, considerando $(1{,}1)^2$ como 1,1 . 2 = 2,2 e multiplicando esse valor por 300.

(E)

$R\$ \ 1200{,}00$	**Resposta incorreta.**	O aluno que assinalou esta alternativa possivelmente possui dificuldades em multiplicação com números com mais de um algarismo e também com decimais. Provavelmente encontrou 2,2 no cálculo equivocado de 1,1 . 1,1 e novamente equivocou-se no cálculo do produto desse valor por 300.

Habilidade	Resolver situações-problema envolvendo função exponencial.
MP15	

Questão 6

A Vitória-régia é uma planta aquática típica da região amazônica. A área ocupada por essa planta, em metros quadrados, obedece a função $f(x) = 3.2^x$, onde x representa o tempo, em dias, após a inserção da 1ª Vitória-régia num determinado lago. Após 8 dias da inserção de uma Vitória-régia num lago, a área ocupada por essas plantas será de:

(A) $6m^2$.

(B) $24m^2$.

(C) $48m^2$.

(D) $256m^2$.

(E) $\mathbf{768m^2}$.

CORREÇÃO COMENTADA

Esta questão visa avaliar a capacidade do aluno em resolver uma situação-problema envolvendo funções exponenciais.

A área ocupada por Vitórias-régias num lago obedece a função $f(x) = 3 \,.\, 2^x$, com x em dias após a inserção da 1ª Vitória-régia. Pode-se notar que a área ocupada por essas plantas dobra a cada dia. Após 8 dias teremos:

$$f(8) = 3 \,.\, 2^8$$

$$f(8) = 3.(2.2.2.2.2.2.2.2)$$

$$f(8) = 3 \,.\, 256$$

$$f(8) = 768m^2$$

Professor, veja como seus alunos resolveram a questão e analise com eles os diferentes registros que fizeram.

Grade de Correção

(A)

$6m^2$	**Resposta incorreta**.	Possivelmente o aluno não compreendeu o enunciado da questão e realizou apenas a multiplicação 3 . 2.

(B)

$24m^2$	**Resposta incorreta.**	O aluno que assinalou esta alternativa possivelmente compreendeu que o valor 8 que representa o 8º dia deveria ser utilizado na função, porém não compreendeu que este seria o expoente de 2 e realizou apenas 3 . 8.

(C)

$48m^2$	**Resposta incorreta.**	Provavelmente o aluno interpretou corretamente o enunciado da questão, porém apresenta dificuldade no cálculo de potência, onde ao invés de calcular $3 . 2^8$, calculou 3 . 2 . 8.

(D)

$256m^2$	**Resposta incorreta.**	O aluno que assinalou esta alternativa calculou corretamente a potência 2^8, porém não encontrou o produto dessa potência por 3.

(E)

$\mathbf{768m^2}$	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado da questão e calculou corretamente o produto da potência 2^8 por 3**

Questão 7

Na aula de matemática, Ana aprendeu alguns procedimentos de cálculos com logaritmos. Para calcular $log\ 6$, por exemplo, Ana usa $log 2 \approx 0{,}30$ e $\log 3 \approx 0{,}47$, e faz:

$\log 6 = \log(2 \cdot 3) = \log 2 + \log 3 \approx 0{,}30 + 0{,}47 \approx 0{,}77$.

Da mesma forma, Ana encontrou os seguintes resultados aproximados, respectivamente, para $\log 60$ e $\log 600$:

(A) 0,30 e 0,47

(B) 0,77 e 1,77

(C) 1,30 e 2,47

(D) 1,77 e 2,77

(E) 10,77 e 100,77

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo da questão é avaliar o domínio da habilidade de aplicar procedimentos de cálculos com logaritmos, pelo aluno.

Usando o resultado obtido na situação descrita, $log\ 6 \approx 0{,}77$, e aplicando procedimentos de cálculos com logaritmos, de forma similar ao processo sugerido no enunciado da questão, obtemos:

$\log 60 = \log(6 \cdot 10) = \log 6 + \log 10 \approx 0{,}77 + 1 \approx 1{,}77$ e

$\log 600 = \log(6 \cdot 100) = \log 6 + \log 100 \approx 0{,}77 + 2 \approx 2{,}77$

As operações com logaritmos, bem como suas propriedades fundamentais, correspondem a propriedades similares já conhecidas sobre potências.

Quando se afirma, por exemplo, que para multiplicar potências de mesma base mantém-se a base e somam-se os expoentes, ou seja, que $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, simultaneamente está se afirmando que o expoente a que se deve elevar a base a para se obter o produto $a^m \cdot a^n$ é igual a $(m + n)$, o que significa dizer que o logaritmo de $(a^m \cdot a^n)$ é igual a $(m + n)$. Em outras palavras, o logaritmo do produto é igual à soma dos logaritmos dos fatores.

Para a determinação dos logaritmos na base 10, ou seja, dos logaritmos decimais, existem tabelas construídas desde o século XVII, por meio de aproximações sucessivas. Atualmente, podemos obter aproximações para os logaritmos utilizando calculadoras eletrônicas científicas.

Professor, veja como seus alunos resolveram a questão e analise com eles os diferentes registros que fizeram.

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

(B) 0,30 e 0,47	**Resposta incorreta.**	O aluno parece não ter entendido a proposta e não reconhecer a possibilidade de aplicação de propriedades dos logaritmos para resolver o proposto, assim pode ter feito escolha pela alternativa que apresentava dados presentes no enunciado da questão.

(B)

0,77 e 1,77	**Resposta incorreta.**	O aluno parece não ter entendido a proposta e não reconhecer a possibilidade de aplicação de propriedades dos logaritmos para resolver o proposto, assim pode ter feito escolha pela alternativa que apresentava dados presentes no enunciado da questão.

(C)

1,30 e 2,47	**Resposta incorreta.**	O aluno parece não ter aplicado corretamente as propriedades dos logaritmos para resolver o proposto, assim pode ter usado os valores de $\log 2$ e $\log 3$ presentes no enunciado da questão, quando deveria ter usado $\log 6$ para obter o resultado correto.

(D)

1,77 e 2,77	**Resposta correta.**	**Possivelmente o aluno compreendeu a proposta e reconheceu a possibilidade de aplicação de propriedades dos logaritmos para resolver a questão, fazendo:** $\mathbf{\log 60 = \log(6 \cdot 10) = \log 6 + \log 10 \approx 0,77 + 1 \approx 1,77}$ $\mathbf{\log 600 = \log(6 \cdot 100) = \log 6 + \log 100 \approx 0,77 + 2 \approx 2,77}$

(E)

10,77 e 100,77	**Resposta incorreta.**	O aluno parece ter cometido erros ao aplicar as propriedades dos logaritmos para resolver o proposto, assim pode ter usado, incorretamente, $\log 10 = 10$ e $\log 100 = 100$.

Habilidade MP16	Aplicar procedimentos de cálculos com logaritmos.

Questão 8

Sejam x e y números reais tais que $x > 0$ e $0 < y \neq 1$.

Se $\log_y x = 5$, então o valor de $\log_y x^2$ é:

(A) 5

(B) 7

(C) 10

(D) 15

(E) 25

Correção Comentada

O objetivo da questão é avaliar o domínio da habilidade de aplicar procedimentos de cálculos com logaritmos, pelo aluno.

Para obter o valor de $\log_y x^2$, podemos aplicar os seguintes procedimentos:

$$\log_y x^2 = \log_y(\mathrm{x} \cdot \mathrm{x}) = \log_y x + \log_y x = 5 + 5 = 10$$

ou então,

$$\log_y x^2 = 2.\log_y x = 2 \cdot 5 = 10$$

Como vimos na questão anterior, as operações com logaritmos, bem como suas propriedades fundamentais, correspondem a propriedades similares já conhecidas sobre potências.

Professor, veja como seus alunos resolveram a questão e analise com eles os diferentes registros que fizeram.

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

5	**Resposta incorreta.**	O aluno parece não ter entendido a proposta e não reconhecer a possibilidade de aplicação de propriedades dos logaritmos para resolver a questão, assim pode ter feito escolha pela alternativa que apresentava um número presente no enunciado da questão.

(B)

7	**Resposta incorreta.**	O aluno parece não ter entendido a proposta e não reconhecer a possibilidade de aplicação de propriedades dos logaritmos para resolver a questão, assim pode ter feito escolha pela alternativa que apresentava a soma de números presentes no enunciado da questão.

(C)

10	**Resposta correta.**	**Possivelmente o aluno compreendeu a proposta e reconheceu a possibilidade de aplicação de propriedades dos logaritmos para resolver a questão, fazendo** $\log_y x^2 = \log_y(x \cdot x) = \log_y x + \log_y x = 5 + 5 = 10$ **ou então,** $\log_y x^2 = 2.\log_y x = 2 \cdot 5 = 10$

(D)

15	**Resposta incorreta.**	O aluno parece não ter entendido a proposta e não reconhecer a possibilidade de aplicação de propriedades dos logaritmos para resolver a questão, assim pode ter feito uma escolha aleatória.

(E)

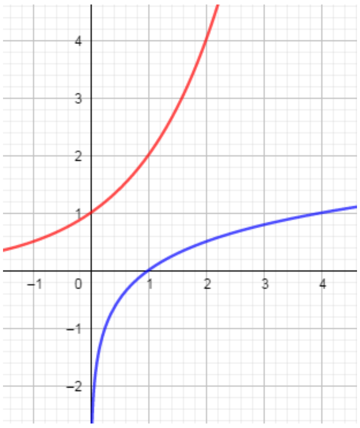
25	**Resposta incorreta.**	O aluno parece não ter entendido a proposta e não reconhecer a possibilidade de aplicação de propriedades dos logaritmos para resolver a questão, assim pode ter feito escolha pela alternativa que apresentava o quadrado de 5, número presente no enunciado da questão.

Habilidade	Identificar os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas.
MP17	

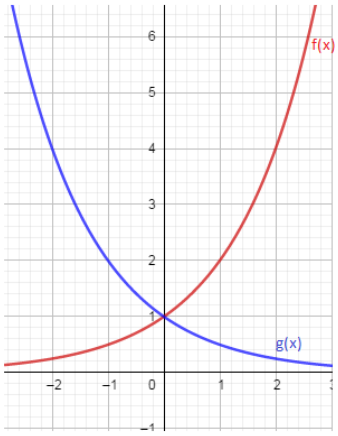
Questão 9

As funções exponencial e logarítmica são consideradas funções inversas. Assinale a alternativa que apresenta o gráfico da função $f(x) = 2^x$ e da sua inversa a função $g(x) = log_2 x$.

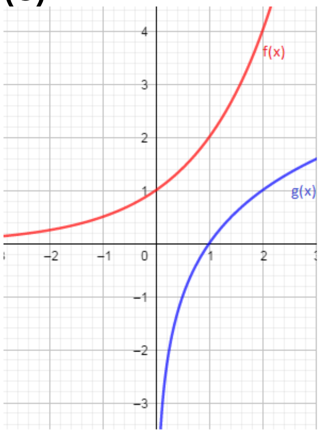
(A)



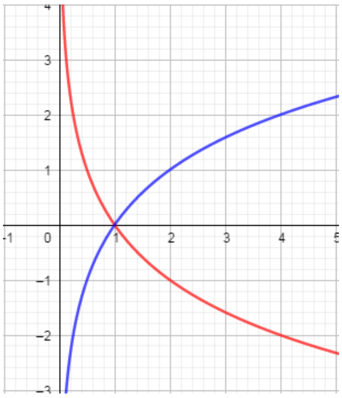
(B)



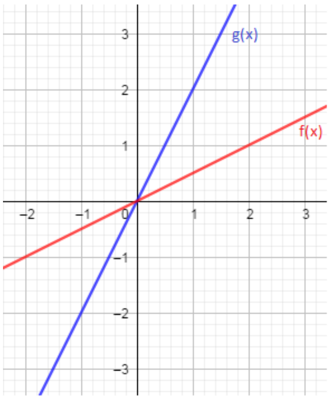
(C)



(D)



(E)



CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo desta questão é avaliar a habilidade do aluno em identificar os gráficos das funções exponencial e logarítmica, reconhecendo-as como funções inversas.

A resolução pode se pautar na verificação das propriedades dessas funções e/ou na validação de pontos pertencentes ao gráfico. Entre as principais características dessas funções, podemos destacar:

- Os gráficos são simétricos em relação a bissetriz dos quadrantes ímpares;
- A função $f(x) = 2^x$ é sempre positiva para qualquer valor de x ∈ IR, por isso seu gráfico está totalmente localizado acima do eixo x. Quando x = 0, temos $f(0) = 2^0 = 1$ e quando x = 1, temos $f(1) = 2^1 = 2$. Então o gráfico intercecta o eixo y no ponto (0, 1) e passa pelo ponto (1, 2).
- A função $g(x) = log_2 x$ é definida apenas para valores positivos de x, assim seu gráfico está totalmente localizado à direta do eixo y. Quando x = 1, $g(1) = log_2 1 = 0$ e quando x = 2, $g(2) = log_2 2 = 1$. Logo a função intercecta o eixo x no ponto (1, 0) e passa pelo ponto (2, 1).
- Observando as tabelas abaixo, nota-se que a função $f(x) = 2^x$ cresce à taxa crescente, isto é, cresce cada vez mais, e que a função $g(x) = log_2 x$ cresce à taxa decrescente, isto é, cresce cada vez menos (esta característica das duas funções justifica a curva apresentada por seus gráficos). Também observa-se que o valor de x em uma função corresponde ao valor de y na outra função.

x	$f(x) = 2^x$
-1	$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
0	$f(0) = 2^0 = 1$
1	$f(1) = 2^1 = 2$
2	$f(2) = 2^2 = 4$
3	$f(2) = 2^3 = 8$

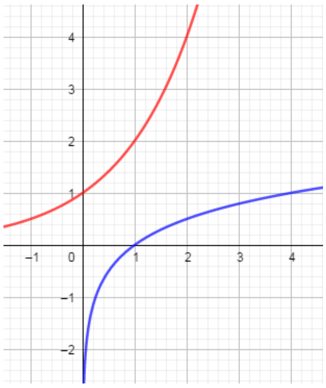
x	$g(x) = log_2 x$
$\frac{1}{2}$	$g\left(\frac{1}{2}\right) = log_2 \frac{1}{2} = -1$
1	$g(1) = log_2 1 = 0$
2	$g(2) = log_2 2 = 1$
4	$g(4) = log_2 4 = 2$
8	$g(8) = log_2 8 = 3$

A única alternativa que satisfaz todas as condições apresentadas acima é a alternativa **A**.

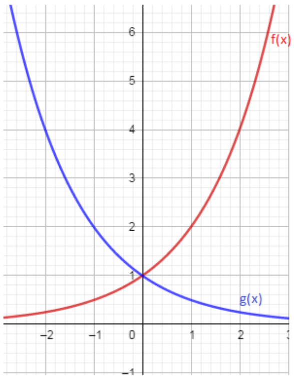
Professor, veja como seus alunos resolveram a questão e analise com eles os diferentes registros que fizeram.

GRADE DE CORREÇÃO

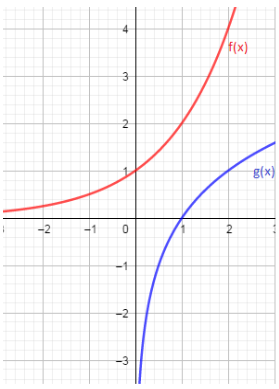
(A)

	**Resposta incorreta.**	O aluno identificou os gráficos das funções exponencial e logarítmica, porém não percebeu que o gráfico da função logarítmica apresentado não é o da função inversa de $f(x) = 2^x$, pois está na base 4, fato evidenciado pelo ponto (4, 1) pertencente a este gráfico.

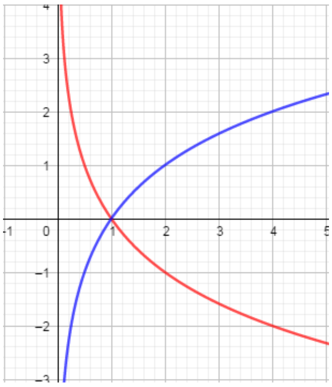
(B)

	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno apenas observou a simetria dos gráficos em relação ao eixo y, identificando-a, equivocadamente, como uma característica dos gráficos de duas funções inversas e não se atentando para o fato de se tratar de gráficos de duas funções exponenciais, uma crescente e outra decrescente.

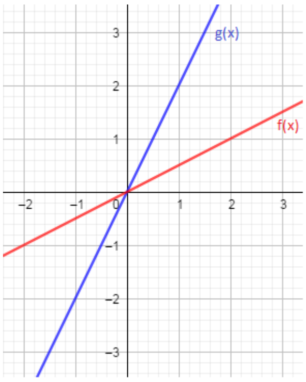
(C)

	**Resposta correta.**	O aluno identificou corretamente os gráficos das duas funções inversas pedidas. Possivelmente ele fez a verificação dos valores de pontos notáveis do gráfico, comparando o crescimento exponencial (crescimento à taxa crescente) com o crescimento logarítmo (crescimento à taxa decrescente) e identificando a simetria dos gráficos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

(D)

	**Resposta incorreta.**	O aluno que escolheu esta alternativa, mostra não ter conhecimento das propriedades das funções exponencial e logarítmica. Possivelmente apenas observou a simetria dos gráficos em relação ao eixo x, identificando-a, equivocadamente, como uma característica dos gráficos de duas funções inversas e não se atentando para o fato de se tratar de gráficos de duas funções logarítmicas, uma crescente e outra decrescente.

(E)

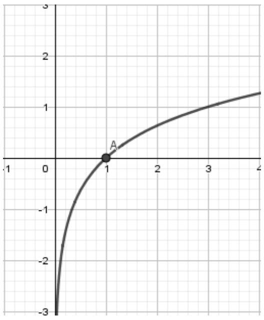
	**Resposta incorreta.**	O aluno que assinalou esta alternativa, provavelmente reconheceu os gráficos de duas funções inversas, porém não identificou os gráficos das funções exponencial e logarítmica, não verificando os pontos de intersecção destas funções com os eixos.

Habilidade	Identificar os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas.
MP17	

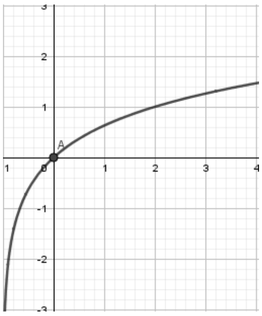
Questão 10

Assinale o gráfico que represena a função $f(x) = log_3 x$.

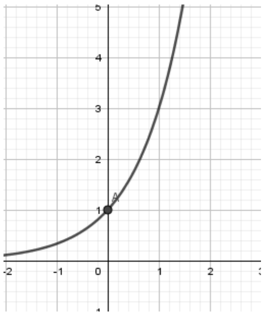
(A)



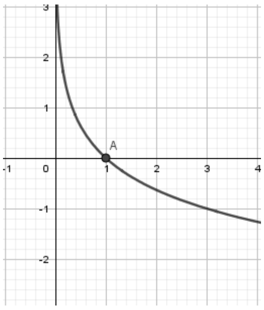
(B)



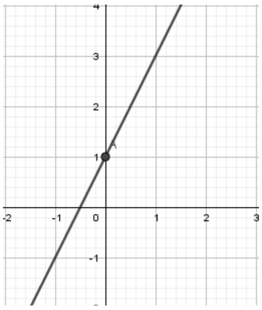
(C)



(D)



(E)

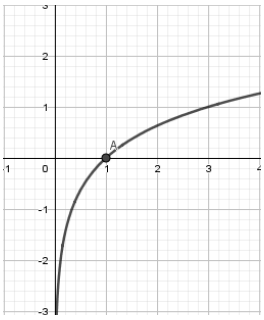


Correção Comentada

Esta questão tem por objetivo verificar a habilidade do aluno na identificação do gráfico de uma função logarítmica, utilizando para isto as principais características da função.

Dada a função $y = log_b x$, com x > 0 e 0 < b ≠ 1, o gráfico desta função necessariamente intercecta o eixo x no ponto (1, 0), pois substituindo o valor de x por 1 na função obtemos $y = log_b 1 = 0$ para qualquer valor de b. Outra característica da função exponencial é referente ao seu crescimento, a função $y = log_b x$ é crescente quando b > 1 e decrescente quando 0 < b < 1. A curva representativa do gráfico é obtida por uma situação de crescimento ou decrescimento a uma taxa decrescente. A função apresentada na questão possui b = 3, logo é crescente. A única alternativa que apresenta o gráfico com as características descritas é a alternativa:

(A)



Uma outra forma de resolver a questão, seria atribuir valores a x e verificar o gráfico que contém os pontos obtidos. Por exemplo:

Para x = 1, $y = log_3 1 = 0$, ponto (1, 0);

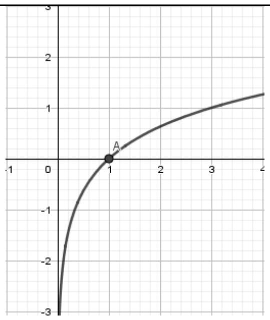
Para x = 3, $y = log_3 3 = 1$, ponto (3, 1).

O único gráfico que contém esses pontos é o gráfico da alternativa A.

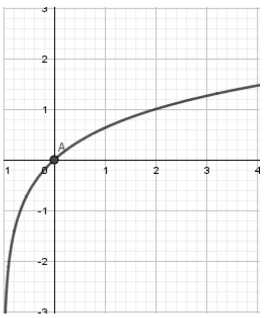
Professor, veja como seus alunos resolveram a questão e analise com eles os diferentes registros que fizeram.

GRADE DE CORREÇÃO

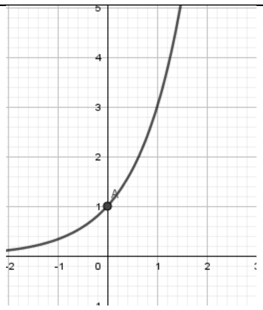
(A)

	**Resposta correta.**	**O aluno identificou as principais características da função apresentada, associando-a corretamente ao seu gráfico, ou calculou corretamente o valor de y, a partir de valores atribuídos para x dentro do domínio da função, reconhecendo corretamente o gráfico que contém os pontos encontrados.**

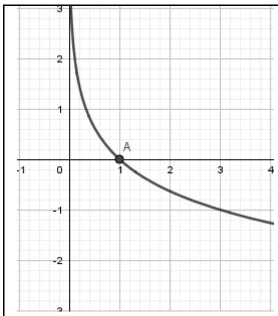
(B)

	**Resposta incorreta.**	O aluno que assinalou esta alternativa consegue identificar algumas características da função exponencial, como o crescimento e o formato da curva (curva que representa aumento crescente á taxa decrescente), mas não reconhece o ponto de interseção do gráfico da função dada com o eixo x. Esta alternativa apresenta o gráfico da função $y = log_3(x+1)$, que é obtido a partir da translação de 1 unidade para a esquerda do gráfico de $y = log_3 x.$

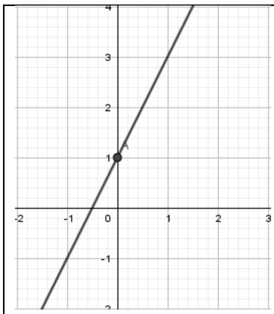
(C)

	**Resposta incorreta.**	Este gráfico representa uma função exponencial, inversa da função logarítmica. Provavelmente o aluno confundiu os gráficos dessas funções.

(D)

	**Resposta incorreta.**	O aluno identificou o gráfico de uma função logarítmica, porém não reconheceu o crescimento da função na sua expressão algébrica e/ou no seu gráfico.

(E)

	**Resposta incorreta.**	O aluno que assinalou esta alternativa mostra que não consegue associar uma função com seu gráfico e não sabe identificar as principais características de uma função através de seu gráfico.

Habilidade MP18	Resolver situações-problema envolvendo função logarítmica.

Questão 11

O site "pt.wikipedia.org/wiki/Cafeína" informa que uma xícara de café contém cerca de 100 mg de cafeína, cuja meia-vida no corpo humano é de, aproximadamente, 3 a 7 horas.

Supondo que a cada 4 horas depois de ingerido o café, a concentração de cafeína no sangue caia pela metade, podemos modelar esta situação pela função de decaimento exponencial: $\boldsymbol{Q(t) = 100.(0,84)^t}$, onde Q(t) é a concentração de cafeína no sangue após t horas do consumo.

Segundo a situação descrita acima, uma pessoa que ingeriu uma xícara de café as 7 horas da manhã ainda terá uma concentração de 16 mg de cafeína no sangue, aproximadamente as

(A) 21 horas.
(B) 19 horas.
(C) 17 horas.
(D) 10 horas.
(E) 8 horas.

Dados:
log 0,84 = -0,076
log 0,16 = -0,79
log 4 = 0,6
log 16 = 1,2

Correção Comentada

Nesta questão, o que se quer determinar é o tempo necessário para reduzir de 100 mg para 16 mg a concentração de café no sangue e a partir deste dado, calcular o momento em que isto ocorre.

Vamos, então, primeiro calcular o valor de t na função $\boldsymbol{Q(t) = 100.(0,84)^t}$ em que Q(t) = 16 e em seguida verificar em qual o momento do dia ela atingirá este valor.

$$\boldsymbol{Q(t) = 100 \cdot (0,84)^t}$$
$$16 = 100 \cdot (0{,}84)^t$$
$$\frac{16}{100} = 0{,}84^t$$
$$0{,}16 = 0{,}84^t$$
$$log 0{,}16 = log 0{,}84^t$$
$$-0{,}79 = t \cdot (-0{,}076)$$
$$t = \frac{-0{,}79}{-0{,}076}$$
$$t = 10{,}39$$

Em aproximadamente 10 horas a partir da ingestão de uma xícara de café a concentração de cafeína no sangue será de 16 mg. Como a pessoa tomou o café as 7 horas, concluímos que isto ocorrerá às **17 horas**.

Professor, veja como seus alunos resolveram a questão e analise com eles os diferentes registros que fizeram.

Grade de Correção

(A)

25	**Resposta incorreta.**	O aluno que assinalou esta alternativa, mostra não ter conhecimento sobre logarítmos e potências. Provavelmente associou a expressão "a cada 4 horas" com uma divisão, dividiu o valor inicial 100 por 4 e multiplou o resultado por 0,84.

(B)

19	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno substitui corretamente o valor de Q(t) na expressão dada, porém rsolveu a equação exponencial de forma incorreta, utilizando a divisão como operação inversa da potenciação e aproximando inadequadamente o valor encontrado 0,19 para o valor 19 apresentado no distrator.

(C)

17	**Resposta correta.**	**O aluno calculou corretamente o tempo necessário (t) para reduzir de 100 mg para 16 mg a concentração de cafeína no sangue e em seguida somou o tempo encontrado com 7 horas, horário em que a pessoa tomou o café.**

(D)

10	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno calculou corretamente o tempo necessário (t) para reduzir de 100 mg para 16 mg a concentração de cafeína no sangue, porem se esqueceu de somar o tempo encontrado com 7 horas, horário em que a pessoa tomou o café.

(E)

8	**Resposta incorreta.**	O aluno que assinalou esta alternativa, mostra não ter conhecimento sobre logarítmos e potências. Possivelmente o aluno não compreendeu o problema e apenas calculou a metade de 16 mg.

Habilidade	Resolver situações-problema envolvendo função logarítmica
MP18	

Questão 12

(ENEM 2018 modificado)

Um contrato a ser pago em 120 parcelas de R$ 640,00, a uma taxa de juros compostos de 1,4% ao mês, concede uma redução de juros em parcelas pagas antecipadamente, de acordo com o período de antecipação. Nesse caso, paga-se o valor presente, que é o valor, naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma data futura.

Um valor presente P submetido a juros compostos com taxa i, por um período de tempo n, produz um valor futuro V determinado pela fórmula

$$V = P \cdot (1 + i)^n.$$

Por quantos meses deve ser antecipado o pagamento de uma parcela deste empréstimo, para que seu valor futuro seja reduzido pela metade?

Utilize os seguintes valores para logx:

$log\ 2 = 0{,}3$	$log\ 1{,}014 = 0{,}006$	$log\ 2{,}4 = 0{,}38$

(A) 320

(B) 80

(C) 60

(D) 50

(E) 12

Correção Comentada

Nesta questão, o que se quer determinar é o período de antecipação de uma parcela para que seu valor futuro seja reduzido pela metade no ato do pagamento, isto é, o valor de n que transforma um valor futuro de R$ 640,00 em um valor presente de R$ 320,00 a uma taxa de juros de 1,4%.

Vamos, então, substituir os valores V = 640,00, P = 320,00 e i = 1,4 : 100 = 0,014 na expressão dada:

$$V = P \cdot (1+i)^n.$$

$$640 = 320 \cdot (1+i)^n$$

$$\frac{640}{320} = 1{,}014^n$$

$$2 = 1{,}014^n$$

$$log 2 = log 1{,}014^n$$

$$log\ 2 = n \cdot log\ 1{,}014$$

$$0{,}3 = n \cdot 0{,}006$$

$$n = \frac{0{,}3}{0{,}006} = 50$$

Concluímos assim, que o número de meses necessários para antecipar o pagamento de uma parcela para que seu valor seja reduzido pela metade é 50 meses.

Professor, veja como seus alunos resolveram a questão e analise com eles os diferentes registros que fizeram.

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

320	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não interpretou corretamente o enunciado da questão, calculando apenas a metade do valor futuro, não se atentando à pergunta do problema.

(B)

80	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno compreendeu o problema e desenvolveu corretamente a fórmula apresentada e a idéia de logarítmo. Porém não calculou o valor da taxa i, empregando a forma porcentual 1,4 e aproximando inadequadamente o valor obtido 0,8 para o valor 80 apresentado no distrator.

(C)

60	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno compreendeu o enunciado da questão e identificou a pergunta do problema. Porém não utilizou a fórmula apresentada, por supor que o valor de uma parcela se reduziria à metade se o tempo de antecipação fosse também a metade do tempo total do empréstimo.

(D)

50	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou e calculou corretamente o tempo de antecipação da parcela, utilizando a expressão $V = P.(1+i)^n$ e aplicando a idéia de logarítmo de forma adequada.**

(E)

12	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não fez a transformação da taxa e não resolveu corretamente a equação. Aplicando a divisão como a operação inversa da potenciação de forma incorreta e aproximando inadequadamente o valor encontrado 1,2 para o valor 12 apresentado no distrator.

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

COORDENADORIAS

Coordenadoria Pedagógica - COPED
Coordenador: Caetano Pansani Siqueira

Coordenadoria de Informação, Tecnologia, Evidência e Matrícula - CMITE
Coordenador: Thiago Guimarães Cardoso

DEPARTAMENTOS

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão Pedagógica - DECEGEP
Diretor: Valéria Arcari Muhi

Centro dos Anos Finais do Ensino Fundamental - CEFAF
Diretora: Carolina dos Santos Batista Murauskas

Centro de Ensino Médio - CEM
Diretora: Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

Equipe Curricular CoPED de Matemática – Leitura crítica e validação do material
Ilana Brawerman, João dos Santos Vitalino, Marcos José Traldi, Otávio Yoshio Yamanaka e Vanderley Aparecido Cornatione

Autoria do material
Benedito de Melo Longuini, Edson dos Santos Pereira, Erika Aparecida Navarro Rodrigues, Fernanda Machado Pinheiro, Ines Chiarelli Dias, Leandro Geronazzo, Lilian Ferolla de Abreu, Lilian Silva de Carvalho, Luciene Ramos Americo, Malcon Pulvirenti, Marques, Marcelo Balduino Silva, Maria Denes Tavares da Silva, Rodrigo Soares de Sá, Rosilaine Sanches Martins, Simoni Renata e Silva Perez, Sueli Aparecida Gobbo Araujo, Willian Casari de Souza.

Departamento de Avaliação Educacional - DAVED
Diretora: Patricia de Barros Monteiro
Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Planejamento e Análise de Avaliações - CEPAV
Diretor: Juvenal de Gouveia

Ademilde Ferreira de Souza, Cristiane Dias Mirisola, Ilton Campos Cavalcanti, Márcia Soares de Araújo Feitosa, Soraia Calderoni Statonato, Sylvia Russiano Toledo Casari

Centro de Aplicação de Avaliações - CEAPA
Diretora: Isabelle Regina de Amorim Mesquita

Amanda Morais Cardoso, Denis Delgado dos Santos, José Guilherme Brauner Filho, Kamila Lopes Candido, Nilson Luiz da Costa Paes, Teresa Miyoko Souza Vilela

Departamento de Tecnologia de Sistemas
Diretor: Marcos Aparecido Barros de Lima

Centro de Planejamento e Integração de Sistemas
Diretora: Camila da Silva Alcazar
Viviana Fernandes dos Santos – Analista de Sistemas

Representantes do CAPE
Leitura crítica, validação e adaptação do material para os deficientes visuais
Tânia Regina Martins Resende