GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

Caderno do Professor

9º Ano do Ensino Fundamental

Matemática

São Paulo

3º Bimestre de 2017

17ª Edição

APRESENTAÇÃO

A Avaliação da Aprendizagem em Processo – AAP - se caracteriza como uma ação desenvolvida de modo colaborativo entre a Coordenadoria de Gestão da Educação Básica e a Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional.

Iniciada em 2011 e voltada a apenas dois anos/séries, foi gradativamente sendo expandida e, desde 2015, abrange todos os alunos dos Ensinos Fundamental e Médio além de, continuamente, aprimorar seus instrumentos.

A AAP, fundamentada no Currículo do Estado de São Paulo, propõe o acompanhamento da aprendizagem das turmas e alunos de forma individualizada, com um caráter diagnóstico. Tem como objetivo apoiar as unidades escolares e os docentes na elaboração de estratégias adequadas a partir da análise de seus resultados, contribuindo efetivamente para melhoria da aprendizagem e desempenho dos alunos, especialmente nas ações de recuperação contínua.

As habilidades selecionadas para a AAP, em Língua Portuguesa e Matemática, têm como referência, a partir de 2016, a Matriz de Avaliação Processual elaborada pela CGEB e já disponibilizada à rede.

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental permanece a articulação com as expectativas de aprendizagem de Língua Portuguesa e Matemática e com os materiais do Programa Ler e Escrever e da Educação Matemática nos Anos Iniciais – EMAI.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação, na forma de cadernos de provas para os alunos, também foram elaborados os respectivos exemplares do Professor, com orientações específicas para os docentes, instruções para a aplicação (Anos Iniciais), quadro de habilidades de cada prova, gabaritos, orientações e grades para correção e recomendações pedagógicas gerais.

Estes subsídios, agregados aos registros que o professor já possui e informações sistematizadas no Sistema de Acompanhamento dos Resultados de Avaliações - SARA, incorporando os dados resultantes da AAP, devem auxiliar no planejamento, replanejamento e acompanhamento das ações pedagógicas, mobilizando procedimentos, atitudes e conceitos necessários para as atividades de sala de aula, sobretudo aquelas relacionadas aos processos de recuperação das aprendizagens.

COORDENADORIA DE GESTÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA - CGEB

COORDENADORIA DE INFORMAÇÃO, MONITORAMENTO E AVALIAÇÃO EDUCACIONAL - CIMA

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA - 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Questão	Código da Habilidade	Descrição
01	MP12	Identificar a existência ou não de semelhança entre duas figuras planas.
02		
03	MP13	Identificar a razão de semelhança entre duas figuras planas.
04		
05	MP14	Identificar a correspondência entre ângulos congruentes de dois triângulos semelhantes.
06		
07	MP15	Resolver problemas envolvendo semelhança de triângulos.
08		
09	MP16	Resolver problemas aplicando as relações métricas do triângulo retângulo.
10		
11	MP17	Resolver problemas aplicando as relações trigonométricas do triângulo retângulo.
12		

GABARITO

	A	B	C	D
01	X			
02			X	
03				X
04				X
05				X
06			X	
07	X			
08				X
09	X			
10			X	
11	X			
12			X	

COMENTÁRIOS E RECOMENDAÇÕES PEDAGÓGICAS

A premissa básica, a respeito de um processo avaliativo deve ser considerada como instrumento que subsidiará tanto o aluno no seu desenvolvimento cognitivo, quanto ao professor no redimensionamento de sua prática pedagógica.

Desta forma, a avaliação da aprendizagem passa a ser um instrumento que auxiliará o educador a atingir os objetivos propostos em sua prática educativa, neste caso a avaliação sob essa ótica deve ser tomada na perspectiva diagnóstica, servindo como instrumento para detectar as dificuldades e possibilidades de desenvolvimento do educando.

Neste sentido, as 12 questões que constam deste caderno, procuram verificar o nível de desenvolvimento das habilidades descritas na Matriz de Avaliação Processual de Matemática, notadamente as do 3º bimestre letivo.

Nas linhas a seguir, apresentamos uma breve caracterização das habilidades e o seu respectivo conteúdo.

- *(MP12) – Identificar a existência ou não de semelhança entre duas figuras planas.*

Ao identificarmos se duas figuras são semelhantes, poderemos estabelecer, as relações de proporcionalidade que demandam a realização de operações algébricas e a mobilização de estratégias de raciocínio não exigidas anteriormente

- *(MP13) – Identificar a razão de semelhança entre duas figuras planas.*

Ao identificarmos se duas figuras são semelhantes, poderemos estabelecer, as relações de proporcionalidade que demandam a realização de operações algébricas e a mobilização de estratégias de raciocínio não exigidas anteriormente.

- *(MP14) – Identificar a correspondência entre ângulos congruentes de dois triângulos semelhantes.*

Além da proposição de problemas, o desenvolvimento desta habilidade tem como objetivo a identificação de correspondência entre as medidas dos lados de triângulos semelhantes a partir da identificação dos ângulos congruentes, lembrando que o não cumprimento dessa etapa, conduz normalmente, à escrita de falsas proporcionalidades.

- *(MP15) – Resolver problemas envolvendo semelhança de triângulos.*

Neste caso a apresentação de situações envolvendo a semelhança de triângulos, segue a condição: “O triângulo é o único tipo de polígono para qual a semelhança é definida apenas a partir de uma condição: ângulos correspondentemente congruentes. A proporcionalidade entre as medidas dos lados passa a ser, nesse caso, consequência, e não exigência, como ocorre para os demais polígonos.

- *(MP16) – Resolver problemas aplicando as relações métricas do triângulo retângulo.*

Neste caso a apresentação de situações envolvendo a semelhança de triângulos, segue a condição: “O triângulo é o único tipo de polígono para qual a semelhança é definida apenas a partir de uma condição: ângulos correspondentemente congruentes. A proporcionalidade entre as medidas dos lados passa a ser, nesse caso, consequência, e não exigência, como ocorre para os demais polígonos.

- *(MP17) – Resolver problemas aplicando as relações trigonométricas do triângulo retângulo.*

Para finalizar o diagnóstico do desenvolvimento das habilidades relativo ao 3º bimestre, inserimos o tratamento das razões trigonométricas que parte da fixação da medida do ângulo agudo do triângulo retângulo e da obtenção dos valores de suas razões (seno, cosseno e tangente). Trata-se, portanto, destacando o fato de que as razões trigonométricas são, prioritariamente, associadas ao ângulo, e não às medidas dos lados do triângulo retângulo.

Finalmente, a avaliação, entendida aqui como processual, haverá que ser percebida como um processo de mapeamento e da diagnose do processo de aprendizagem, ou seja, a obtenção de indicadores qualitativos do processo de ensino-aprendizagem no trabalho docente.

Seguindo esta concepção, o PCN destaca que:

> [...] cabe à avaliação fornecer aos professores as informações sobre como está ocorrendo a aprendizagem: os conhecimentos adquiridos, os raciocínios desenvolvidos, as crenças, hábitos e valores incorporados, o domínio de certas estratégias, para que ele possa propor revisões e reelaborações de conceitos e procedimentos parcialmente consolidados. (BRASIL, 2000, p. 54)

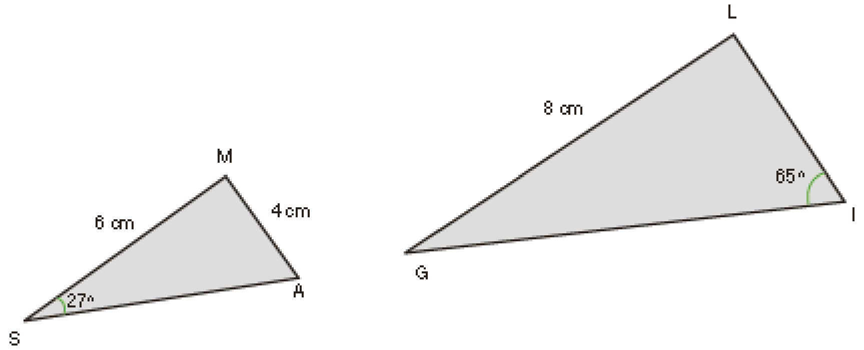
É importante salientar que as observações que constam nas grades de correção deste caderno são apenas pressupostos de resolução, cabendo ao professor analisar os registros dos alunos e não considerar as observações indicadas como norma padrão e que o objetivo maior, é a proposição de uma grade de correção pelo próprio professor e assim realizar uma análise de acordo com a realidade do processo de ensino-aprendizagem desenvolvido em sala de aula.

Equipe Curricular de Matemática – CEFAF/CGEB

Habilidade MP12	Identificar a existência ou não de semelhança entre duas figuras planas.

Questão 1

Observe os triângulos a seguir.



O triângulo GIL será uma ampliação do triângulo SAM, se existir congruência entre os ângulos correspondentes e, também

(A) que exista a proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes.

(B) que não exista a proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes.

(C) que a medida do lado LI é o triplo de MA.

(D) que o ângulo $L\hat{G}I$ é de 88°.

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo da questão consiste na identificação da existência de semelhança entre dois triângulos, utilizando-se da congruência dos ângulos dos triângulos SAM e GIL.

Desta forma, é importante que se considere a definição: "duas figuras planas são consideradas semelhantes quando uma delas pode ser obtida a partir de uma ampliação ou uma redução da outra".

Então, pode-se concluir que:

Se o triângulo GIL é uma ampliação do triângulo SAM, os ângulos são congruentes e os lados correspondentes mantêm uma proporcionalidade.

*Portanto, alternativa correta, (**A**).*

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

que exista a proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes.	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(B)

que não exista a proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes.	**Resposta incorreta.**	O aluno possivelmente não identificou que quando existe congruência entre os ângulos, também existe a proporcionalidade entre as medidas dos lados correspondentes, para que haja semelhança de triângulos.

(C)

que a medida do lado LI é o triplo de MA.	**Resposta incorreta.**	O aluno possivelmente não identificou que o lado GL é o lado SM aumentado em 2 unidades.

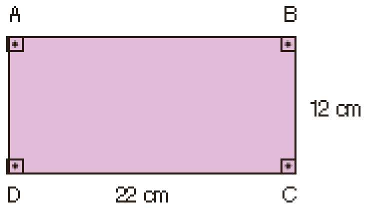
(D)

que o ângulo $L\hat{G}I$ é de 88°.	**Resposta incorreta.**	O aluno possivelmente considerou que o ângulo $L\hat{G}I$ é igual a 88°, desconsiderando a congruência entre ângulos, isto é, que a medida dos ângulos dos triângulos se mantém após a ampliação. Cabe ao professor retomar o conceito de ângulos internos de um triângulo qualquer, e também de congruência entre ângulos.

Habilidade MP12	Identificar a existência ou não de semelhança entre duas figuras planas.

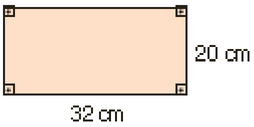
Questão 2

Observe o retângulo a seguir.

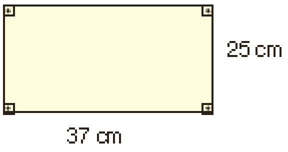


Das figuras abaixo, a que é semelhante ao retângulo ABCD é

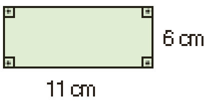
(A)



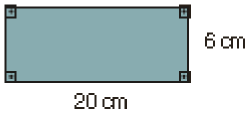
(B)



(C)



(D)



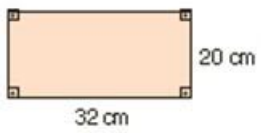
CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo desta questão é que o aluno identifique a existência de semelhança entre duas figuras planas através de uma constante de proporcionalidade, justificando a ampliação ou redução destas figuras.

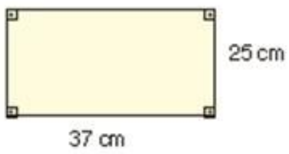
Das alternativas propostas, a figura que mantém esta proporcionalidade é a C, pois trata-se de uma redução do retângulo ABCD, com razão $^{1}/_{2}$ *mantendo-se a proporcionalidade.*

Portanto, alternativa ***C.***

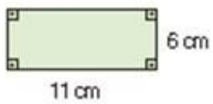
(A)

	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não identificou as propriedades que garantem a semelhança entre duas figuras planas, pois a ampliação não manteve uma proporcionalidade, sendo que o lado BC aumentou em 8 cm e o lado DC, 10 cm. Cabendo ao professor retomar o conceito semelhança entre figuras planas.

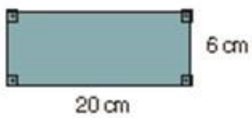
(B)

	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não identificou as propriedades que garantem a semelhança entre duas figuras planas, pois a ampliação não manteve uma proporcionalidade, sendo que o lado BC aumentou em 13 cm e o lado DC, 15 cm. Cabendo ao professor retomar o conceito semelhança entre figuras planas.

(C)

	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

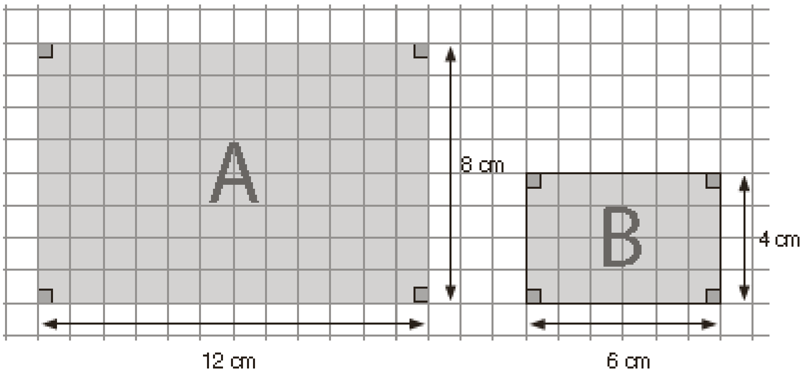
(D)

	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não identificou as propriedades que garantem a semelhança entre duas figuras planas, pois a ampliação não manteve uma proporcionalidade, sendo que o lado BC reduziu em 6 cm e o lado DC, 2 cm.

Habilidade MP13	Identificar a razão de semelhança entre duas figuras planas.

Questão 3

Observe a seguir, os retângulos **A** e **B.**



Sabendo que os retângulos **A e B** são semelhantes, a constante de proporcionalidade **k** que gerou o retângulo **B** é

(A) k = 8

(B) k = 4

(C) k = 2

(D) $k = \frac{1}{2}$

Correção Comentada

O objetivo desta questão é que o aluno identifique a razão de semelhança entre duas figuras planas, a partir da comparação das medidas dos lados dos retângulos ***A*** *e* ***B.***

Desta forma, a medida dos lados do retângulo ***B*** *é a metade da medida dos lados do retângulo* ***A.***

Portanto, a constante de proporcionalidade dos retângulos ***A*** *e* ***B****, é dada pela razão,* $k=\frac{1}{2}$ *satisfazendo a alternativa* ***D****, da questão.*

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

k = 8	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno considerou a medida do lado menor do retângulo A como constante de proporcionalidade.

(B)

k = 4	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno subtraiu os dois lados menores de cada retângulo (8cm e 4 cm) e considerou como constante de proporcionalidade.

(C)

k = 2	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno considerou a razão entre o retângulo maior A pelo menor B como a constante de proporcionalidade.

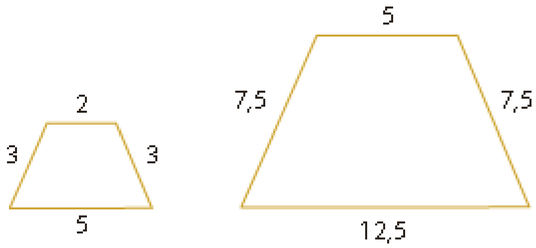
(D)

$\mathbf{k = \frac{1}{2}}$	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

Habilidade MP13	Identificar a razão de semelhança entre duas figuras planas.

Questão 4

Observe os dois trapézios semelhantes, da figura.



A razão de semelhança entre eles é

(A) k = 7,5

(B) k = 4,5

(C) k = 3,0

(D) k = 2,5

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo desta questão é que o aluno identifique a razão de semelhança entre duas figuras planas, a partir da comparação entre as medidas dos lados dos trapézios.

Desta forma, as medidas dos lados dos trapézios estão a razão k = 2,5, que é a constante de proporcionalidade.

Sendo os trapézios semelhantes, constata-se que

- *os ângulos correspondentes são iguais;*
- *os comprimentos correspondentes são proporcionais;*
- *os lados correspondentes possuem a mesma razão de semelhança.*

Satisfazendo, portanto a alternativa ***D.***

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

k = 7,5	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não identificou a razão de semelhança entre os dois trapézios e apenas calculou a diferença entre as medidas correspondentes às duas bases maiores dos trapézios da figura: (12,5 – 5= 7,5).

(B)

k = 4,5	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não identificou a razão de semelhança entre os dois trapézios e apenas calculou a diferença entre as medidas de dois lados correspondentes dos trapézios da figura: (7,5 – 3 = 4,5)

(C)

k = 3,0	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não identificou razão de semelhança entre os dois trapézios e apenas calculou a diferença entre as medidas correspondentes às duas bases menores dos trapézios da figura: (5 – 2 = 3).

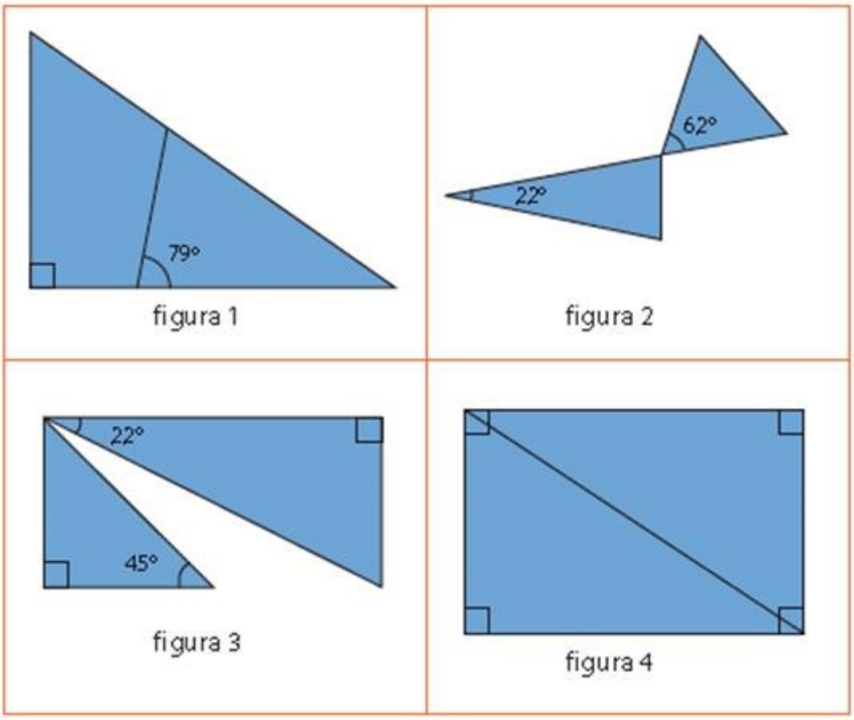
(D)

k = 2,5	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

Habilidade MP14	Identificar a correspondência entre ângulos congruentes de dois triângulos semelhantes.

Questão 5

Observe as figuras 1, 2, 3 e 4 do quadro a seguir:



Das figuras apresentadas acima, a que possui dois triângulos semelhantes, pela correspondência de ângulos congruentes é a

(A) Figura 1.

(B) Figura 2.

(C) Figura 3.

(D) Figura 4.

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo desta questão é que o aluno identifique a semelhança de dois triângulos, pela congruência entre os seus ângulos.

Os triângulos semelhantes apresentam:

- *ângulos correspondentes, congruentes;*
- *comprimentos correspondentes, proporcionais;*
- *mesma razão de semelhança, entre os lados correspondentes.*

Desta forma, das figuras apresentadas, a ***figura 4,*** *um retângulo cortado por uma diagonal, é a que apresenta dois triângulos com ângulos congruentes.*

Satisfazendo, portanto a alternativa ***D.***

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

Figura 1.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno identificou que existe “um” ângulo congruente nos triângulos apresentados.

(B)

Figura 2.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno desconhece as propriedades necessárias para a existência de semelhança de triângulos, principalmente pela correspondência de ângulos congruentes.

(C)

Figura 3.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno desconhece as propriedades necessárias para a existência de semelhança de triângulos, principalmente pela correspondência de ângulos congruentes.

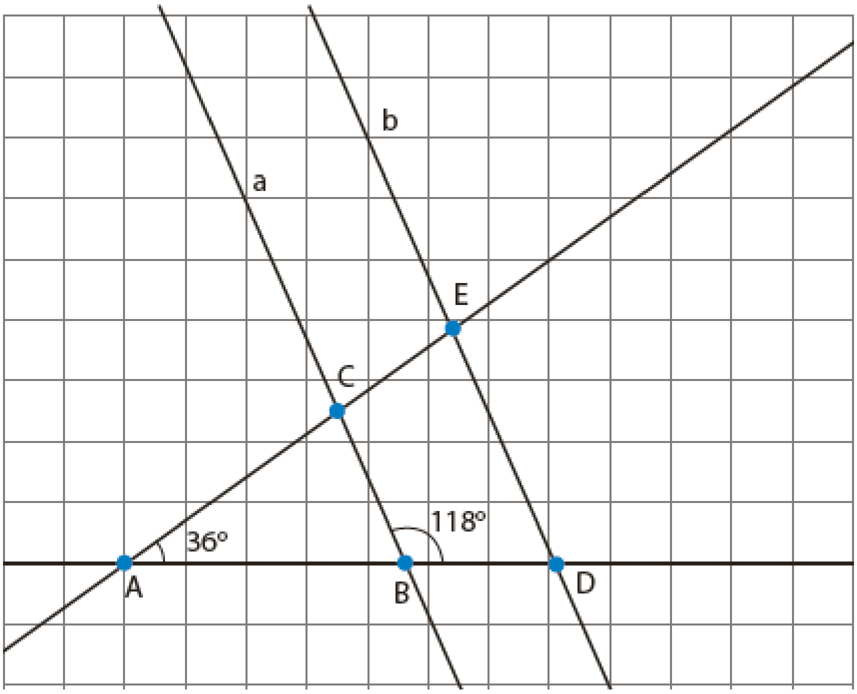
(D)

Figura 4.	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

Habilidade MP14	Identificar a correspondência entre ângulos congruentes de dois triângulos semelhantes.

Questão 6

Na figura a seguir, as retas **a** e **b** são paralelas.



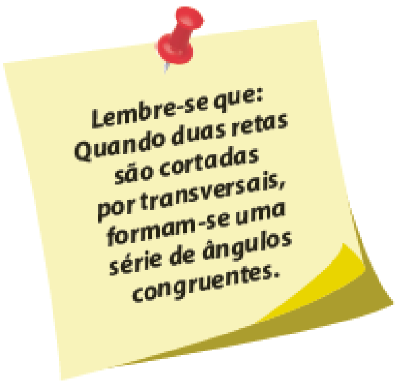
As medidas de AB̂C e AÊD são respectivamente

(A) 82° e 62°.

(B) 62° e 62°.

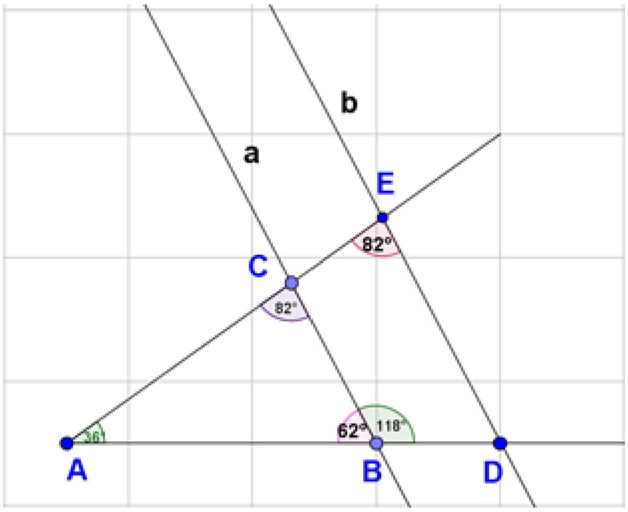
(C) 62° e 82°.

(D) 36° e 108°.



Esta questão tem como objetivo, verificar se o aluno desenvolve os conceitos fundamentais em relação a semelhança de triângulos, com foco na identificação da congruência entre ângulos correspondentes.

Portanto, a resolução da situação proposta, pode ser apresentada da seguinte maneira:



Nota-se que o ângulo $C\hat{B}D$ é suplementar a $C\hat{B}A$, então:

$$C\hat{B}A = 180° - 118° = \mathbf{62°}$$

Com a medida do ângulo $C\hat{B}A$, podemos estabelecer que a medida do ângulo $A\hat{C}B$ será:

$$180° - (62° + 36°) = 180° - 98° = \mathbf{82°}$$

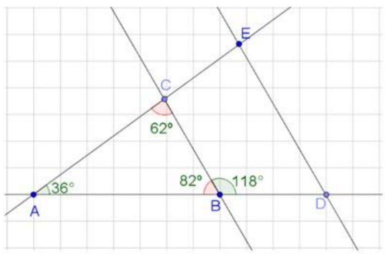
*Se a reta **a** é paralela a reta **b** e são cortadas por transversais, conclui-se que:*

$$A\hat{C}B \equiv A\hat{E}D, \text{ então } A\hat{E}D = 82°$$

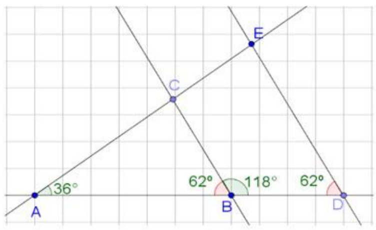
*Portanto, alternativa **C.***

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

82° e 62°.	**Resposta incorreta.**	O aluno possivelmente considerou que a soma dos ângulos internos do triângulo resulta em 180°, porém não se atentou para o ângulo suplementar de 118° que é 62°.	

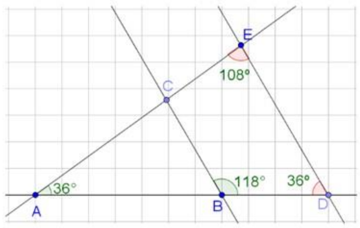
(B)

62° e 62°.	**Resposta incorreta.**	O aluno possivelmente considerou que o ângulo suplementar de 118° é 62, porém não se atentou que a medida do ângulo solicitado refere-se ao ângulo E.	

(C)

62° e 82°.	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

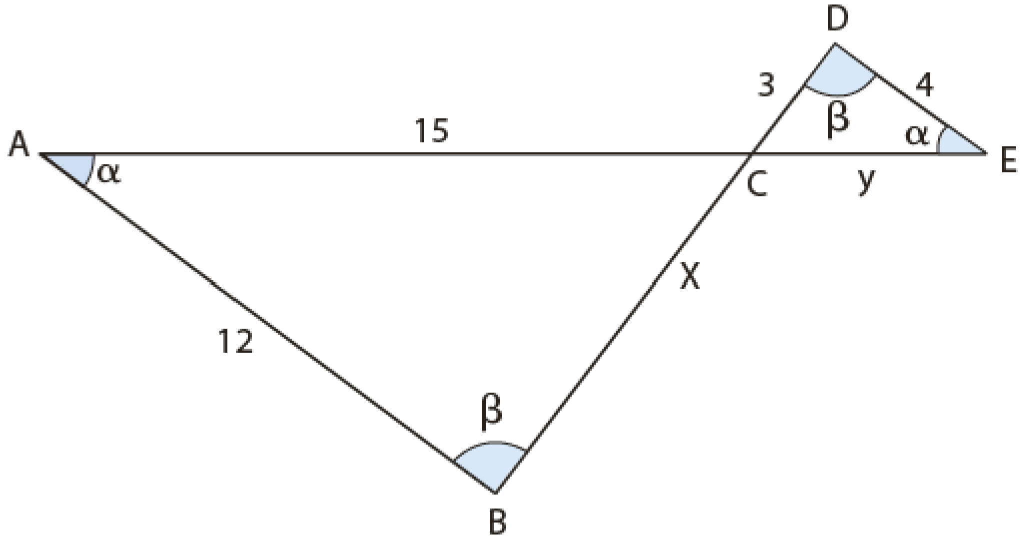
(D)

36° e 108°.	**Resposta incorreta.**	O aluno possivelmente considerou o triângulo ADE, replicou a medida do ângulo A no ângulo D (36°), e para o ângulo E calculou a medida de 108°, (108° + 36° + 36° = 180°).	

Habilidade MP15	Resolver problemas envolvendo semelhança de triângulos.

Questão 7

Observe os triângulos a seguir.



Os valores numéricos das medidas x e y são, respectivamente,

(A) 9 e 5.

(B) 5 e 3.

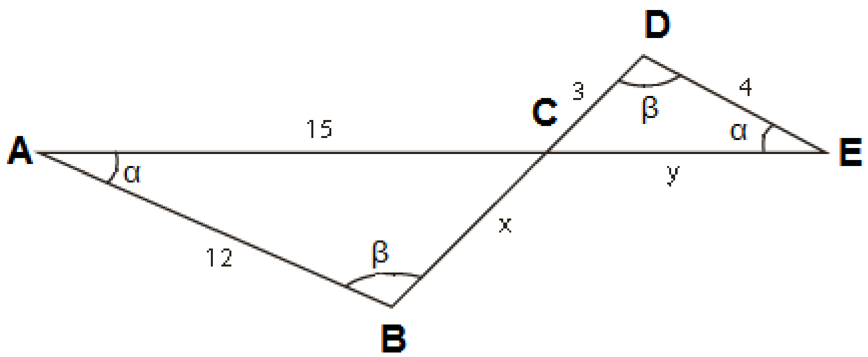
(C) 3 e 1.

(D) 12 e 4.

Esta questão explora um aspecto mais procedimental da semelhança de triângulos, que pode ser usada para determinar comprimentos desconhecidos, por meio da proporcionalidade entre as medidas, para isso, no entanto, é necessário, antes:

- *reconhecer que os ângulos dos dois triângulos são congruentes, por meio das marcas gráficas usuais e pela propriedade dos ângulos opostos pelo vértice;*
- *reconhecer a semelhança, observando a congruência entre os ângulos;*
- *estabelecer corretamente a correspondência entre os lados.*

Assim, uma possível solução para a questão é



Temos que: $C\hat{A}B\ (\alpha) \equiv C\hat{E}D\ (\alpha)$, $E\hat{D}C\ (\beta) \equiv A\hat{B}C\ (\beta)$ *e* $A\hat{C}B \equiv E\hat{C}D$ *(opostos pelo vértice), desta forma, pode-se concluir que os triângulos ABC e EDC são congruentes, e podemos estabelecer que existe uma razão de semelhança entre as medidas dos segmentos destes triângulos, de tal forma que:*

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{\overline{ED}}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{\overline{CD}}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{\overline{CE}}} \Rightarrow \frac{12}{4} = \frac{x}{3} = \frac{15}{y}$$

De acordo com a expressão obtida, conclui-se que:

$$\begin{cases} \dfrac{12}{4} = \dfrac{x}{3} \Rightarrow 36 = 4x \Rightarrow x = \dfrac{36}{4} = 9 \\ \dfrac{12}{4} = \dfrac{15}{y} \Rightarrow 12y = 60 \Rightarrow y = \dfrac{60}{12} = 5 \end{cases}$$

Desta forma, os valores 9 e 5 atendem a alternativa A da questão.

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

9 e 5.	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(B)

5 e 3.	**Resposta incorreta.**	O aluno possivelmente dividiu aleatoriamente as medidas dos segmentos AC/CD = 15/3 = 5 (x) e AB/DE = 12/4 = 3 (y).

(C)

3 e 1.	**Resposta incorreta.**	O aluno possivelmente subtraiu aleatoriamente AC – AB = 3(x) e DE – DC = 1(y).

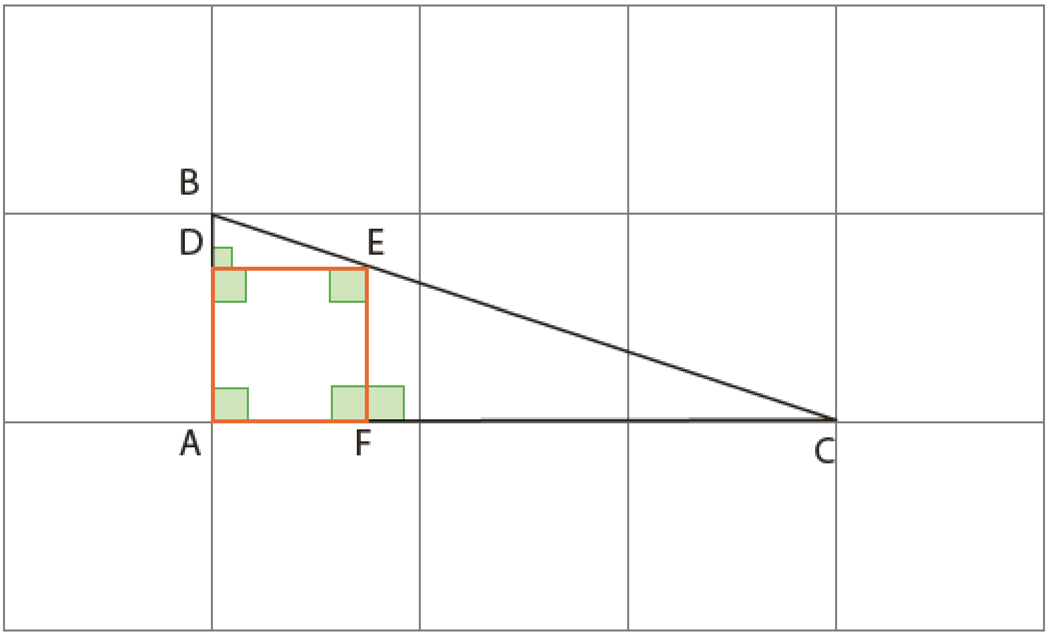
(D)

12 e 4.	**Resposta incorreta.**	O aluno possivelmente considerou as medidas que são apresentadas no problema, ou seja, comparou as medidas AB e DE (12 e 4).

Habilidade MP15	Identificar situações que envolvem proporcionalidade direta, inversa e não proporcionalidade.

Questão 8

Observe a seguir, o triângulo ABC e o quadrado ADEF.



Sabendo que $\overline{AB} = 1$ e $\overline{AC} = 3$, a medida do lado do quadrado é

(A) 2,25.

(B) 1,50.

(C) 1,00

(D) 0,75.

CORREÇÃO COMENTADA

Em continuidade ao processo de averiguação da habilidade descrita, este problema traz uma variância de aplicação, referente a operacionalização da semelhança de triângulos.

Desta forma, este problema poderá ser resolvido da seguinte maneira:

I. *ADEF é um quadrado, então* $\overline{DE} \parallel \overline{AF}$ *e* $\overline{DA} \parallel \overline{EF}$*, então,* $D\hat{B}E \equiv F\hat{E}C$ *e* $B\hat{D}E \equiv B\hat{A}C$*, então, concluímos que* $\Delta BDE \sim \Delta BAC$*.*

II. $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} \Rightarrow \overline{DB} = 1 - \overline{AB}$ *e* $\overline{DE} = \overline{AF} = \overline{AD}$*.*

III. $\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \frac{1 - \overline{AD}}{1} = \frac{\overline{AD}}{3} \Rightarrow \overline{AD} = 3 - 3\overline{AD} = \overline{AD} = \frac{3}{4} = 0,75$

.

Portanto, alternativa ***D****.*

(A)

2,25.	**Resposta incorreta.**	Para estabelecer este valor numérico, o aluno possivelmente, baseou-se nos seguintes cálculos: $\overline{DB} = 3-\overline{AD}$ $\frac{\overline{BD}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{3 - \overline{AD}}{1} = \frac{\overline{AD}}{3} \Rightarrow 9 - 3\overline{AD} = \overline{AD} \Rightarrow 9 = 4\overline{AD} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{9}{4} = 2{,}25$

(B)

1,50.	**Resposta incorreta.**	Para estabelecer este valor numérico, o aluno, primeiro estabelece a razão de proporcionalidade e em seguida operacionaliza com a medida do segmento EF, conforme segue: $\frac{\overline{BA}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{\overline{BA}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AC}} = \frac{1}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EF}}{3} \Rightarrow 3 = 2\overline{EF} \Rightarrow \overline{EF} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

(C)

1,00	**Resposta incorreta.**	Para estabelecer este valor numérico, o aluno possivelmente, baseou-se nos seguintes cálculos: $\overline{BA} = \overline{BD} + \overline{DA} \Rightarrow 1 = \overline{EF} + \overline{DA} \Rightarrow \overline{EF} = 1-\overline{DA}$ $\frac{\overline{EF}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{1-\overline{DA}}{1} = \frac{1-\overline{DA}}{3} \Rightarrow 3-3\overline{DA} = 1 - \overline{DA} \Rightarrow 2 = 2\overline{DA} \Rightarrow \overline{DA} = \frac{2}{2} = 1$

(D)

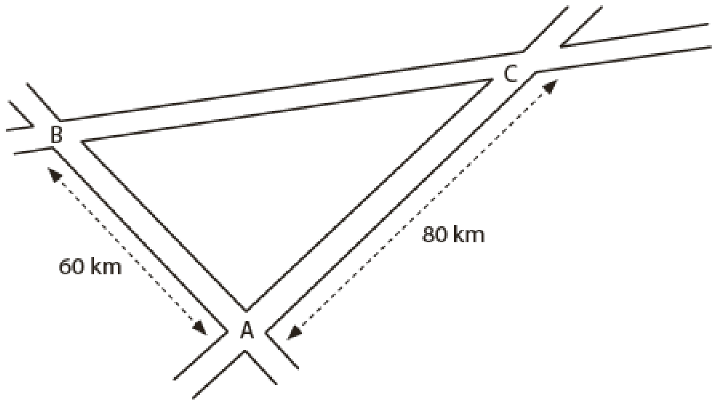
0,75.	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão. Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

Habilidade MP16	Resolver problemas aplicando as relações métricas do triângulo retângulo.

Questão 9

Duas rodovias retilíneas cruzam-se perpendicularmente na cidade A.

Em uma das rodovias, a 60 km de distância de A, encontra-se uma cidade B; na outra, a 80 km de A, encontra-se outra cidade, C. Outra rodovia, também retilínea, ligada as cidades B e C.



A menor distância entre a cidade A e a rodovia que liga BC é de

(A) 48 km.

(B) 60 km.

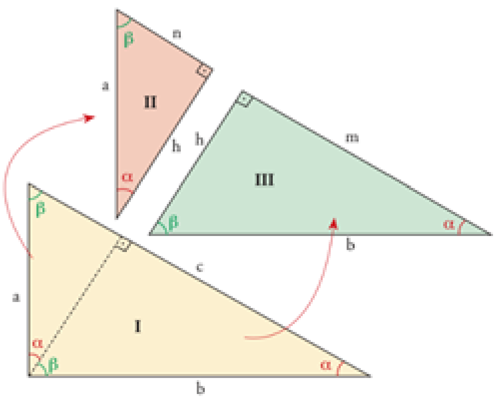
(C) 75 km.

(D) 100 km.

CORREÇÃO COMENTADA

Esta questão explora a resolução de problemas envolvendo relações métricas no triângulo retângulo.

Sendo



$h^2 = m \cdot n$

$b^2 = c \cdot m$

$a^2 = c \cdot n$

$a.b = c.h$

Desta forma, encaminha-se uma possível resolução para o problema:

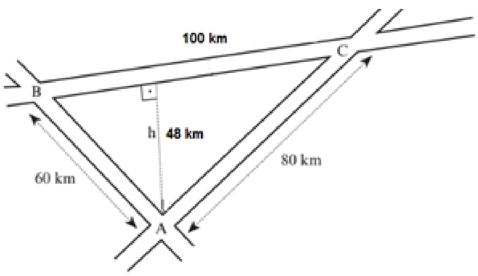
Cálculo da hipotenusa

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow BC = 100\ km$$

Cálculo da altura (menor distância)

$$\frac{AB}{AH} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{HC}$$

$$\frac{60}{AH} = \frac{100}{80} \Rightarrow AH = 48\ km$$



*Portanto, a figura acima apresenta a solução do problema (alternativa **A**).*

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

48 km.	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(B)

60 km.	**Resposta incorreta.**	O aluno possivelmente não compreendeu o objetivo da questão, considerando a menor distância entre a cidade A até a rodovia que liga BC, sendo a medida do segmento AB = 60 km.

(C)

75 km.	**Resposta incorreta.**	O aluno possivelmente calculou a medida da hipotenusa corretamente (100 km), porém inverteu as medidas dos segmentos, no momento de calcular a menor distância (AB/Ah = AC/BC => 60/Ah = 80/100 => 75 km).

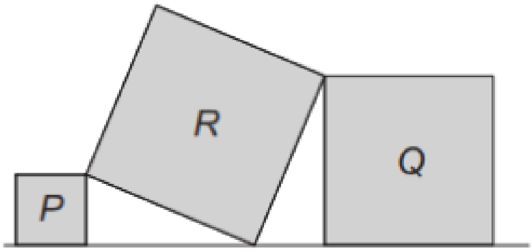
(D)

100 km.	**Resposta incorreta.**	O aluno calculou somente a medida da hipotenusa, possivelmente não se atentou ao que o problema solicita, isto é, a menor distância entre a cidade A até a rodovia que liga BC (altura).

Habilidade MP10	Resolver problemas envolvendo proporcionalidade direta.

Questão 10 – Adaptada - OBMEP

Na figura, a área do quadrado ***P*** é igual a 25 cm² e a área do quadrado ***R*** *é* 169 cm².

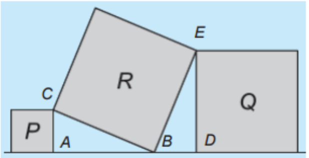


Então, a área do quadrado ***Q*** é igual a:

(A) 64 cm^2.
(B) 97 cm^2.
(C) 144 cm^2.
(D) 194 cm^2.

Correção Comentada

Esta questão tem como objetivo verificar se o aluno realiza a transposição da linguagem para uma representação figural e a partir daí, utiliza as relações entre as medidas do triângulo retângulo, e posteriormente o cálculo de área do quadrado para resolver o problema apresentado.



Primeiro observe que os triângulos ABC e DEB são congruentes e, portanto, o segmento AB tem a mesma medida do lado DE do quadrado Q.

Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo ABC, temos que:

De $R = 169\ cm^2 \Rightarrow \overline{BE} = \overline{CD} = 13\ cm$

De $P = 25\ cm^2 \Rightarrow \overline{AC} = \overline{BD} = 5\ cm.$

Como $Q = (\overline{DE})^2$

$13^2 = 5^2 + (\overline{DE})^2 \Rightarrow (\overline{DE})^2 = 169 - 25 = 144$

Outra maneira:

A área de R = área de P + área de Q.

Logo, a área de Q é $169 - 25 = 144\ cm^2$.

Portanto, (C) é a alternativa correta

(A)

64 cm^2.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno observou que a medida do lado do quadrado *P* é 5 cm e do quadrado *R* é 13 cm, calculou a diferença entre eles (13 – 5 = 8) e com o resultado calculou a área de *Q* (8 x 8 = 64)

(B)

97 cm^2.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno calculou a média dos números apresentados na questão: $$\frac{25 + 169}{2} = \frac{194}{2} = 97$$

(C)

144 cm^2.	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

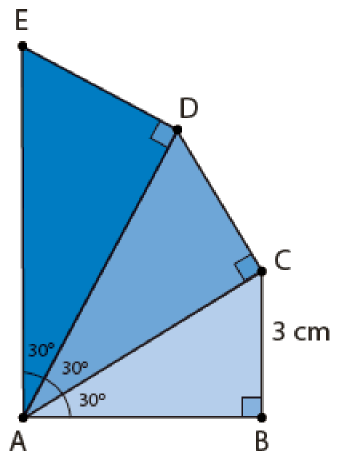
(D)

194 cm^2.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno adicionou os números dados no enunciado da questão: 169 + 25 = 194 Isso mostra que ainda não compreendeu as relações entre as medidas do triângulo retângulo.

Habilidade MP17	Resolver problemas aplicando as relações trigonométricas do triângulo retângulo.

Questão 11

A figura abaixo é formada por três triângulos retângulos com ângulos agudos de 30° e o segmento BC mede 3 cm.



Considerar:

$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Então a medida do segmento ED em centímetros será

(A) 4

(B) 6

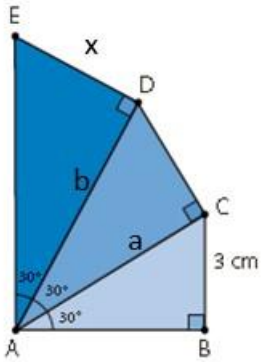
(C) $3\sqrt{3}$.

(D) 12.

CORREÇÃO COMENTADA

O estudo das razões trigonométricas tem um grande sentido didático quando tal investigação tem início na fixação da medida do ângulo agudo do triângulo retângulo e da obtenção dos valores de suas razões (seno, cosseno e tangente). Portanto, o foco central é a medida do ângulo em questão, destacando-se que as razões trigonométricas são, prioritariamente, associadas ao ângulo e não às medidas dos lados do triângulo retângulo.

Para resolver essa questão, o aluno precisa saber que para obter as medidas dos catetos a e x e da hipotenusa b, utilize a razão trigonométrica ideal para cada triângulo apresentado, desta forma, uma das possibilidades de resolução, será:



No Δ ABC, temos:

$$sen\ 30° = \frac{3}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{a} \Rightarrow a = 6$$

No Δ ACD, temos:

$$\cos 30° = \frac{6}{b} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{6}{b} \Rightarrow b\sqrt{3} = 12 \Rightarrow b = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{3} = 4 \cdot \sqrt{3}$$

No Δ ADE, temos:

$$tg30° = \frac{x}{4 \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{4 \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot 3 = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \Rightarrow x \cdot 3 = 4 \cdot 3 \Rightarrow x \cdot 3 = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{3} = 4$$

*Portanto, alternativa **A.***

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

4	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão. Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(B)

6	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno realizou apenas a primeira etapa do cálculo, indicando a medida do segmento AC.

(C)

$3\sqrt{3}$	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno realizou apenas a primeira etapa do cálculo, indicando a medida do segmento AC. $\cos 30° = \frac{b}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{6} \Rightarrow 2 \cdot b = 6 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow b = \frac{6 \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

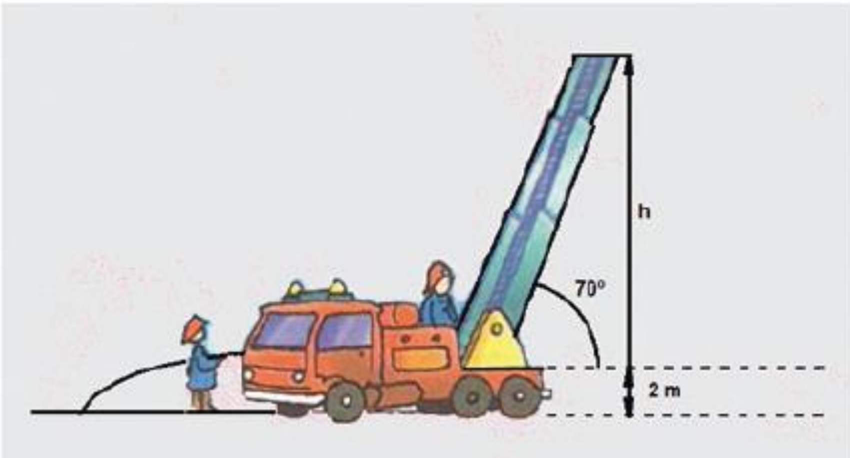
(D)

12.	**Resposta incorreta.**	Realiza os cálculos até a terceira etapa, porém, para determinar a medida do segmento ED, utiliza a relação métrica correta, porém inverte as medidas do cateto adjacente com a do cateto oposto; $tg30° = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{x} = \sqrt{3} \cdot x = 12 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow$ $x = \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12$

Habilidade MP17	Resolver problemas aplicando as relações trigonométricas do triângulo retângulo.

Questão 12

Uma escada de um carro de bombeiros pode se estender até um comprimento máximo de 30 m, quando é levantada até formar um ângulo máximo de 70°.
A base da escada está colocada sobre um caminhão, a uma altura de 2 m do solo, conforme indica a figura a seguir.



Qual é a altura aproximada, em relação ao solo, que essa escada poderá alcançar?

Dados: sen 70° = 0,94; cos 70° = 0,34; tg 70° = 2,75

(A) 12 m.

(B) 28 m.

(C) 30 m.

(D) 32 m.

Correção Comentada

Para resolver essa questão, o aluno precisa saber que para obter a altura (h), é necessário que utilize a razão trigonométrica adequada aos dados apresentados na questão. São fornecidos: o comprimento máximo da escada (30 m), o ângulo de inclinação da escada com a base do caminhão (70º) e a distância do solo até a base da escada que é de 2 m.

A partir destes dados é possível estabelecer hipoteticamente um triângulo retângulo, representado na figura do enunciado. Como a altura (h) está no lado oposto ao ângulo de 70°, a função seno será a mais adequada ao cálculo da altura (h).

Utilizando a função seno, o cálculo da altura fica da seguinte maneira:

$$\text{sen } 70^\circ = \frac{h}{30} \Rightarrow 0{,}94 = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 30 \cdot 0{,}94 \Rightarrow h \cong 28 \text{ m}$$

Adicionando-se os dois metros, referente à distância do chão até a base da escada no caminhão, tem-se a altura total aproximada de 30 metros, que a escada poderá alcançar.

Portanto, (C) é a alternativa correta.

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

12 m.	**Resposta incorreta.**	O aluno possivelmente utiliza a razão seno corretamente, porém adota o valor do cosseno de 70° (0,34). $\text{sen } 70° = \frac{h}{30} \Rightarrow 0,34 = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 30 \cdot 0,34 \cong 10 \text{ m}$ Somando os 2 metros que é a distância do chão até a base da escada no caminhão, temos que a altura total é de aproximadamente 12 metros.

(B)

28 m.	**Resposta incorreta.**	O aluno aplica corretamente a razão trigonométrica relativa ao cálculo do seno de 70°, porém não adiciona a distância do chão à base do caminhão.

(C)

30 m.	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(D)

32 m.	**Resposta incorreta.**	O aluno possivelmente não compreende o enunciado do problema e estabelece que a altura total corresponde à soma do comprimento da escada (30 m) com a distância do chão até a base da escada no caminhão (2 m).

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional
Coordenadora: Cyntia Lemes da Silva Gonçalves da Fonseca

Departamento de Avaliação Educacional
Diretora: Patricia de Barros Monteiro
Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Planejamento e Análise de Avaliações
Diretor: Juvenal de Gouveia
Ademilde Ferreira de Souza, Cristiane Dias Mirisola, Soraia Calderoni Statonato

Centro de Aplicação de Avaliações
Diretora: Isabelle Regina de Amorim Mesquita
Denis Delgado dos Santos, José Guilherme Brauner Filho, Kamila Lopes Candido, Lilian Sakai, Nilson Luiz da Costa Paes, Teresa Miyoko Souza Vilela

Coordenadoria de Gestão da Educação Básica
Coordenadora: Valéria de Souza

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão da Educação Básica
Diretora: Regina Aparecida Resek Santiago

Centro do Ensino Fundamental dos Anos Finais, do Ensino Médio e da Educação Profissional - CEFAF
Diretor: Herbert Gomes da Silva

Equipe Curricular CGEB de Matemática
Autoria, Leitura crítica e validação do material
João dos Santos Vitalino, Maria Adriana Pagan, Otávio Yoshio Yamanaka e Vanderley Aparecido Cornatione

Professores Coordenadores dos Núcleos Pedagógicos das Diretorias de Ensino
Leitura crítica e validação do material de Matemática
Ademar Gomes Vieira, Arlete Ap. Oliveira de Almeida, Carlos Alberto Simas de Almeida, Cristina Aparecida da Silva, Eliana Rodrigues Lotte, Fátima Rosangela Gebin, Maria Helena Silveira, Raphael J. Mamede, Reis Magno Leal Pereira, Rosana Jorge Monteiro Magni, Rosemeire Lepinski, Sandra Shisue Yamaguchi.

Representantes do CAPE
Leitura crítica, validação e adaptação do material para os deficientes visuais
Tânia Regina Martins Resende