GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

Caderno do Professor

3ª série do Ensino Médio
Matemática

São Paulo
2º Bimestre de 2016
12ª Edição

APRESENTAÇÃO

A Avaliação da Aprendizagem em Processo – AAP - se caracteriza como ação desenvolvida de modo colaborativo entre a Coordenadoria de Gestão da Educação Básica e a Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional.

Iniciada em 2011, em apenas dois anos/séries, foi gradativamente sendo expandida e desde 2015 está abrangendo todos os alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio além de, continuamente, aprimorar seus instrumentos.

A AAP, fundamentada no Currículo do Estado de São Paulo, propõe o acompanhamento da aprendizagem das turmas e alunos, de forma individualizada, tendo caráter diagnóstico. Tem como objetivo apoiar as unidades e os docentes na elaboração de estratégias adequadas, a partir da análise de seus resultados, que contribuam efetivamente para melhoria da aprendizagem e desempenho dos alunos, especialmente nas ações de recuperação contínua.

As habilidades selecionadas para a AAP, em Língua Portuguesa e Matemática, terão como referência, a partir de 2016, a Matriz de Avaliação Processual elaborada pela CGEB e já disponibilizada à rede no início deste ano. Além dessas, outras habilidades, compondo cerca de 20% das provas, foram escolhidas na plataforma Foco Aprendizagem e serão repetidas nos diferentes bimestres, articulando, dessa forma, a AAP com os aspectos mais significativos apontados pelo SARESP para o desenvolvimento das competências leitora, escritora e conhecimentos matemáticos.

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental permanece a articulação com as expectativas de aprendizagem de Língua Portuguesa e Matemática e com os materiais do Programa Ler e Escrever e Educação Matemática nos Anos Iniciais – EMAI.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação, na forma de cadernos de provas para os alunos, também foram elaborados os respectivos Cadernos do Professor, com orientações específicas para os docentes, contendo instruções para a aplicação da prova (Anos Iniciais), quadro de habilidades de cada prova, exemplar da prova, gabarito, orientações para correção (Anos Iniciais), grade de correção e recomendações pedagógicas gerais.

Estes subsídios, agregados aos registros que o professor já possui, além das informações sistematizadas no SARA – Sistema de Acompanhamento dos Resultados de Avaliações – e agora também incorporadas à Plataforma Foco Aprendizagem, devem auxiliar no planejamento, replanejamento e acompanhamento das ações pedagógicas, mobilizando procedimentos, atitudes e conceitos necessários para as atividades de sala de aula, sobretudo aquelas relacionadas aos processos de recuperação das aprendizagens.

COORDENADORIA DE GESTÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA – CGEB

COORDENADORIA DE INFORMAÇÃO, MONITORAMENTO E AVALIAÇÃO EDUCACIONAL-CIMA

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

3ª Série do Ensino Médio

Habilidades da Matriz de Avaliação Processual - Matemática 2º Bimestre

Questão	Gabarito	Habilidade	
		Código	Descrição
01	B	MP05	Identificar os coeficientes e raízes de uma equação algébrica e as relações entre eles.
02	D		
03	C	MP06	Resolver equações algébricas de terceiro grau, por meio da relação entre seus coeficientes e raízes.
04	C		
05	D	MP07	Resolver problemas que envolvam a soma, subtração e multiplicação de polinômios.
06	B		
07 ***ANULADA***	C	MP08	Resolver problemas que envolvam a divisão entre um polinômio e um binômio (x – k).
08	D		
09	A	MP09	Calcular a divisão de polinômios por meio da utilização de algoritmos.
10	A		
11	A	MP11	Resolver operações com números complexos associados a transformações no plano.
12	D		

Habilidades das Matrizes de Referência para a Avaliação - SARESP Foco Aprendizagem

Questão	Gabarito	Cód. Hab. Ano	Descrição da Habilidade
13	B	**H04** **3ª Série**	*Representar por meio de funções, relações de proporcionalidade direta, inversa, e direta com o quadrado.*
14	B	**H08** **3ª Série**	*Resolver problemas envolvendo equações do 2º grau.*
15	C	**H17** **3ª Série**	*Identificar a localização de números reais na reta numérica.*

Comentários e recomendações pedagógicas

A premissa básica, a respeito de um processo avaliativo deve ser considerada como instrumento que subsidiará tanto o aluno no seu desenvolvimento cognitivo, quanto ao professor no redimensionamento de sua prática pedagógica.

Desta forma, a avaliação da aprendizagem passa a ser um instrumento que auxiliará o educador a atingir os objetivos propostos em sua prática educativa, neste caso a avaliação sob essa ótica deve ser tomada na perspectiva diagnóstica, servindo como instrumento para detectar as dificuldades e possibilidades de desenvolvimento do educando.

Neste sentido, as 12 primeiras questões que constam deste caderno, procuram verificar o nível de desenvolvimento das habilidades descritas na Matriz de Avaliação Processual de Matemática, notadamente as do 2º Bimestre Letivo, e também de algumas habilidades que o aluno desenvolveu em sua trajetória estudantil e que são estruturantes para a continuidade nos estudos. Tais habilidades se referem às Matrizes de referência para a Avaliação – SARESP.

Nas linhas a seguir, apresentamos uma breve caracterização das habilidades e o seu respectivo conteúdo.

1. ***(MP05) Identificar os coeficientes e raízes de uma equação algébrica e as relações entre eles.***

Em estudos anteriores, sobretudo nos Anos Finais do Ensino Fundamental, foram apresentados aos alunos diversos problemas, em diferentes contextos, cuja solução conduz a equações do primeiro e do segundo graus.

Desta forma, pressupõe-se que eles já estão acostumados a resolver equações de primeiro e do segundo graus, já no Ensino Médio, aprofunda-se este tratamento para situações mais complexas, que conduzem a equações de 3º grau ($ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$), de 4º grau ($ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, com $a \neq 0$) e assim por diante.

O caminho mais conveniente, nesses casos é uma análise qualitativa da pergunta que cada equação representa, extraindo da própria pergunta informações relevantes sobre as raízes.

Desta forma, sabemos que uma equação sempre representa uma pergunta envolvendo algum elemento desconhecido, uma incógnita. Resolver a equação é descobrir tal incógnita.

Finalmente o objetivo principal do diagnóstico desta habilidade é o entendimento da relação existente entre os coeficientes e as raízes de um polinômio qualquer.

2. ***(MP06) Resolver equações algébricas de terceiro grau, por meio da relação entre seus coeficientes e raízes.***

Um dos objetivos principais do estudo das equações algébricas é o abandono da utilização de fórmulas que indicam as raízes de uma equação algébrica e potencializar a observação dos coeficientes de uma equação em busca de informações sobre suas raízes.

3. ***(MP07) Resolver problemas que envolvam a soma, subtração e multiplicação de polinômios.***

O objetivo principal quando se destaca o diagnóstico de uma habilidade procedimental é a de verificar se o aluno já tem estruturado as competências relacionadas às operações com polinômios, conhecidas desde os Anos Finais do Ensino Fundamental.

Para somar, subtrair e multiplicar polinômios, basta operar com as expressões algébricas que compõe suas parcelas ou seus fatores, de acordo com a operação a ser utilizada.

4. ***(MP08) Resolver problemas que envolvam a divisão entre um polinômio e um binômio (x−k).***

A divisão de um polinômio por outro, exige uma atenção redobrada, pois exige a redução do grau de um polinômio inicial por um binômio do tipo $(x – k)$, onde **k** é a raiz conhecida.

5. ***(MP09) Calcular a divisão de polinômios por utilização de algoritmos.***

Para realizar a divisão de polinômios, torna-se necessário a utilização do conceito de identidade de polinômios, que conduzem a uma maneira de efetuar os cálculos, resumida em algoritmos, conhecida como Algoritmo de Briot-Ruffini.

6. ***(MP11) Resolver operações com números complexos associados a transformações no plano.***

Assim como na reta incluem-se todos os números reais, e com a inclusão de números que possam ser raízes quadradas de negativos, será necessário (e suficiente) todo o plano cartesiano, que servirá de inspiração para a construção do plano complexo, suporte para a representação de todos os números complexos. A unidade imaginária i, que representa o novo número cujo quadrado é −1, servirá de padrão para a representação no eixo vertical de números como 2i, 6i, 7i, −4i etc.

Neste sentido, as operações com complexos correspondem à realização de certos movimentos no plano. Por exemplo, se a um complexo z for somado o número real 4, sua representação no plano será deslocada na direção do eixo x de 4 unidades.

Adicionalmente são propostas, três habilidades notadamente fundamentais as quais conferem as condições necessárias para a construção dos conceitos nas diferentes áreas do pensamento.[1]

As habilidades do SARESP destacadas para esta avaliação são:

- ***H04 (3ª Série – EM) – Representar por meio de funções, relações de proporcionalidade direta, inversa, e direta com o quadrado.***

A 3ª série do Ensino Médio aprofunda os conceitos associados às funções, como, por exemplo, as relações de interdependência. Uma das formas de abordagem dessa interdependência são as relações de proporcionalidade nessas diversas formas.

- ***H08 (3ª Série - EM) – Resolver problemas envolvendo equações de 2º grau.***

[1] Fonte: http://focoaprendizagem.educacao.sp.gov.br – acesso: 27/11/2015

Um aprofundamento dos conceitos de equações como, por exemplo, a associação entre as raízes e seus coeficientes é realizado na 3ª série do Ensino Médio. Nesse sentido, é importante rever essas relações nas equações do 2º grau.

- ***H17 (3ª Série - EM) – Identificar a localização de números reais na reta numérica.***

A construção de gráficos, em qualquer momento do estudo de Matemática, em que as funções estejam sendo estudadas no conjunto "R", exige identificar a localização de números reais na reta numérica.

Finalmente, a avaliação, entendida aqui como processual, haverá que ser percebida como um processo de mapeamento e da diagnose do processo de aprendizagem, ou seja, a obtenção de indicadores qualitativos do processo de ensino-aprendizagem no trabalho docente.

Seguindo esta concepção, o PCN destaca que:

> [...] cabe à avaliação fornecer aos professores as informações sobre como está ocorrendo a aprendizagem: os conhecimentos adquiridos, os raciocínios desenvolvidos, as crenças, hábitos e valores incorporados, o domínio de certas estratégias, para que ele possa propor revisões e reelaborações de conceitos e procedimentos parcialmente consolidados.
>
> (BRASIL, 2000, p. 54)

É importante salientar que as observações que constam nas grades de correção deste caderno são apenas pressupostos de resolução, cabendo ao professor analisar os registros dos alunos e não considerar as observações indicadas como norma padrão e que o objetivo maior, é a proposição de uma grade de correção pelo próprio professor e assim realizar uma análise de acordo com a realidade do processo de ensino-aprendizagem desenvolvido em sala de aula.

Equipe Curricular de Matemática – CEFAF/CGEB

1. Questões referentes às habilidades da Matriz de Avaliação Processual - CGEB

Habilidade	
MP05	**Identificar os coeficientes e raízes de uma equação algébrica e as relações entre eles.**

Questão 01

Médio

Sendo dada a equação $x^2 + Bx + C = 0$ e sabendo que 4 e −5 são as raízes dessa equação, então, temos que:

(A) B = 1 e C = −9.

(B) B = 1 e C = −20.

(C) B = 9 e C = 20.

(D) B = 20 e C = −20.

Resolução comentada

O objetivo da questão é verificar o conhecimento do estudante sobre as relações entre coeficientes e raízes de uma equação algébrica e suas estratégias de resolução.

Da equação algébrica: $x^2 + a \cdot x + b = 0$ *, tem-se que as raízes são:* $x_1 = 4$ e $x_2 = -5$.

Os coeficientes dos termos da equação são: a = 1, b = B e c = C.

Utilizando as relações entre a soma e produto de raízes com os coeficientes da equação temos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow 4 + (-5) = -\frac{B}{1} \Rightarrow -1 = -B \Rightarrow B = 1$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 4 \cdot (-5) = \frac{C}{1} \Rightarrow \frac{C}{1} = -20 \Rightarrow C = -20$$

Outra forma de se resolver:

Temos duas raízes (x_1 e x_2) *e duas incógnitas (os coeficientes B e C).*

A partir destes dados, obtém se o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} (x_1)^2 + x_1 \cdot B + C = 0 \\ (x_2)^2 + x_2 \cdot B + C = 0 \end{cases}$$

substituindo os valores das raízes, temos que:

$$\begin{cases} (4)^2 + 4 \cdot B + C = 0 \\ (-5)^2 + (-5) \cdot B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 + 4 \cdot B + C = 0 \\ 25 -5 \cdot B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4B + C = -16 \\ -5B + C = -25 \end{cases}$$

Na primeira linha temos que: C= −16 – 4·B (I).

Substituindo este resultado na equação da 2ª linha temos que:

$$-5B - 16 - 4B = -25 \Rightarrow -9B = -25 + 16 \Rightarrow -9B = -9 \Rightarrow \mathbf{B=1}$$

e $C = -16 - 4 \cdot 1 \Rightarrow \mathbf{C = -20}$

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	*B= 1 e C = −9.*	***Resposta incorreta.*** *Ao optar por esta resposta, possivelmente o aluno efetuou adições equivocadamente com as raízes informadas no enunciado.*
(B)	***B = 1 e C = -20.***	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(C)	*B = 9 e C = 20.*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente, para escolher esta resposta o aluno equivocadamente somou e multiplicou as raízes da equação dada no problema desconsiderando inclusive os sinais dos números.*
(D)	*B = 20 e C = −20.*	***Resposta incorreta.*** *Para a escolha desta resposta, possivelmente o aluno efetuou o produto das raízes, considerando os sinais respectivos à sequência em que aparecem no problema.*

Habilidade
MP05 **Identificar os coeficientes e raízes de uma equação algébrica e as relações entre eles.**

Questão 02

Fácil

A forma fatorada da equação $x^2 - 10x + 24 = 0$ é

(A) $(x + 4) \cdot (x - 6) = 0$

(B) $(x - 4) \cdot (x + 6) = 0$

(C) $(x + 4) \cdot (x + 6) = 0$

(D) $\mathbf{(x - 4) \cdot (x - 6) = 0}$

Resolução comentada

O objetivo da questão é verificar o conhecimento do aluno sobre as relações entre os coeficientes e raízes de uma equação algébrica e suas estratégias de cálculo.

Uma equação do 2º grau com uma raiz igual a ***p*** *e outra igual a* ***m*** *pode ser escrita como (x − p) . (x − m) = 0. Escrita dessa maneira, dizemos que está em sua forma fatorada. De acordo com o enunciado, deve-se encontrar as raízes da equação e utilizá-las para escrever na forma fatorada.*

Dada a equação: $x^2 - 10x + 24 = 0$ *determinando suas raízes pelo método de Bháskara, temos que:*

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 6 \\ x_2 = 4 \end{matrix}$$

Então a equação na forma fatorada fica como:

$(x - 4) \cdot (x - 6) = 0$

O aluno também poderá testar cada item realizando a operação distributiva e obter a resposta. Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	$(x + 4) \cdot (x - 6) = 0$	***Resposta incorreta.*** *É possível que o aluno tenha invertido algum sinal na resolução.*
(B)	$(x - 4) \cdot (x + 6) = 0$	***Resposta incorreta.*** *É possível que o aluno tenha invertido algum sinal na resolução.*
(C)	$(x + 4) \cdot (x + 6) = 0$	***Resposta incorreta.*** *É possível que o aluno tenha invertido o sinal do coeficiente b na resolução.*
(D)	$\mathbf{(x - 4) \cdot (x - 6) = 0}$	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***

Habilidade

MP06 **Resolver equações algébricas de terceiro grau, por meio da relação entre seus coeficientes e raízes.**

Questão 03

Médio

Uma equação de 3º grau pode ser escrita: $ax^3+bx^2+cx+d=0$, (com $a\neq0$).

A equação polinomial cujas raízes são −1, 1 e 2 deve ser escrita como:

(A) $x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$

(B) $2x^2 + x + 2 = 0$

(C) $\mathbf{x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0}$

(D) $2x^2 - x - 2 = 0$

Resolução comentada

O objetivo da questão é verificar a compreensão do aluno quanto a importância dos coeficientes das equações e suas possíveis raízes, na articulação da técnica e dos significados na resolução de uma equação algébrica.

Conhecendo as raízes $r_1 = -1$, $r_2 = 1$ e $r_3 = 2$ *e conhecendo-se a forma fatorada de uma equação de 3º grau,* $(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) = 0$, *temos que:*

$$\left(x - (-1)\right) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) = 0 \Rightarrow (x + 1) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2 - 1\right) \cdot (x - 2) = 0 \Rightarrow \mathbf{x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0}$$

Portanto a equação polinomial obtida corresponde à alternativa C.

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	$x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$.	***Resposta incorreta.*** *A opção por esta resposta mostra que o aluno pode ter compreendido a relação entre coeficientes e raízes de uma equação, contudo comete imprecisão ao operar algebricamente esses termos.*
(B)	$2x^2 + x + 2 = 0$.	***Resposta incorreta.*** *A opção por esta resposta mostra que o aluno pode ter compreendido a relação entre coeficientes e raízes de uma equação, contudo comete imprecisão ao operar algebricamente esses termos.*
(C)	$\mathbf{x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0}$.	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(D)	$2x^2 - x - 2 = 0$.	***Resposta incorreta.*** *A opção por esta resposta mostra que o aluno pode ter compreendido a relação entre coeficientes e raízes de uma equação, contudo comete imprecisão ao operar algebricamente esses termos.*

Habilidade	
MP06	Resolver equações algébricas de terceiro grau, por meio da relação entre seus coeficientes e raízes.

Questão 04

Fácil

A soma das raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$ é:

(A) 5.

(B) 6.

(C) 7.

(D) 12.

Resolução comentada

O objetivo da questão é verificar a compreensão do aluno sobre as relações entre os coeficientes e as possíveis raízes de uma equação, articulando a técnica e significado ao resolver uma equação algébrica.

Uma equação de terceiro grau pode ser escrita na forma: $x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$, *de tal forma que* $S_1 = r_1 + r_2 + r_3$.

Na equação polinomial dada, $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$, *o coeficiente da variável de grau 2 é 7, desta forma, temos que a soma das raízes da equação polinomial é 7, o que atende a alternativa C da questão.*

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	*5.*	***Resposta incorreta.*** *Ao escolher esta alternativa como resposta, o aluno equivocadamente pode ter considerado a soma algébrica dos coeficientes de* $x^2 e\ x$, *ou seja, realizou a operação* (-7 + 12 = 5)
(B)	*6.*	***Resposta incorreta.*** *O aluno nesta resposta equivocada pode ter efetuado a adição dos coeficientes da equação polinomial, ou seja realizou a operação* (1 - 7 + 12 = 6)
(C)	***7.***	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(D)	*12.*	***Resposta incorreta.*** *Para escolha desta resposta, o aluno considera equivocadamente, a soma das raízes da equação como sendo o coeficiente* S_3, *no caso igual a doze.*

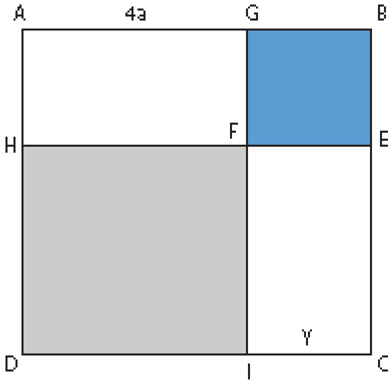
Habilidade

MP07 **Resolver problemas que envolvam a soma, subtração e multiplicação de polinômios.**

Questão 05

Fácil

Na figura a seguir o quadrado ABCD foi dividido em dois quadrados e dois retângulos.



O polinômio que representa a área do quadrado ABCD é:

(A) $A_{ABCD} = 16 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot y$

(B) $A_{ABCD} = 4 \cdot a \cdot y + y^2$

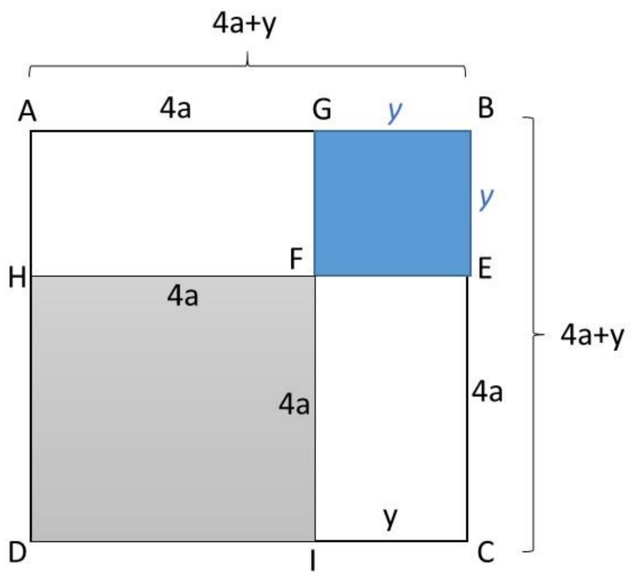
(C) $A_{ABCD} = 16 \cdot a + 4 \cdot y$

(D) $\mathbf{A_{ABCD} = 16 \cdot a^2 + 8ay + y^2}$

Resolução comentada

O objetivo da questão é verificar a compreensão do aluno quanto as relações entre o conhecimento relativo às grandezas e medidas, notadamente no conhecimento da área do quadrado e retângulo, para uma representação algébrica, visando especificamente as operações, entre monômios e binômios.

Desta forma, a resolução da questão consiste basicamente em estabelecer as medidas não informadas na figura e estabelecer a área do quadrado ABCD, conforme segue:



Então a área do quadrado ABCD será dada por:

$$(4a + y) \cdot (4a + y) = \left((4a + y)\right)^2 = \mathbf{16 \cdot a^2 + 8 \cdot a \cdot y + y^2}$$

O resultado acima atende a alternativa D da questão.

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	$A_{ABCD} = 16 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot y$	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno determinou corretamente as medidas dos lados do quadrado maior, porém indicou como resposta a área do retângulo HECD, e também não verificou que o polinômio indicado na alternativa não é um trinômio.*
(B)	$A_{ABCD} = 4 \cdot a \cdot y + y^2$	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno determinou corretamente as medidas dos lados do quadrado maior, porém indicou como resposta a área dos retângulos ABEH ou GBCI, e também não verificou que o polinômio indicado na alternativa não é um trinômio.*
(C)	$A_{ABCD}=16 \cdot a + 4 \cdot y$	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno determinou corretamente as medidas dos lados do quadrado maior, porém indicou como resposta o perímetro do quadrado maior, e também não verificou que o polinômio indicado na alternativa não é um trinômio.*
(D)	$\mathbf{A_{ABCD} = 16 \cdot a^2 + 8ay + y^2}$	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***

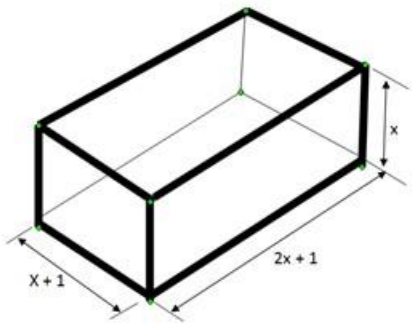
Habilidade

MP07 **Resolver problemas que envolvam a soma, subtração e multiplicação de polinômios.**

Questão 06

Médio

Um engenheiro foi contratado para construir um tanque de concreto para mistura de argila e água em uma indústria de cerâmica. Para isso, ele definiu as medidas internas do tanque como x, (x + 1) e (2x +1), conforme a figura. Dessa forma poderia atender diversas demandas de volume e de espaço físico para construção.



Nessas condições, a equação que fornece o valor de x para um volume de 30 m^3 é:

(A) $2x^2 + x + 2x + 1 = 30$

(B) $2x^3 + 3x^2 + x - 30 = 0$

(C) $x^3 + 2x^2 + x - 30 = 0$

(D) $x^3 + x^2 + x = 30$

Resolução comentada

O objetivo da questão é avaliar a habilidade do aluno quanto as operações com polinômios.

Solução:

$$(x + 1) \cdot (2x + 1) \cdot x = 30$$

$$(2x^2 + x + 2x + 1) \cdot x = 30$$

$$2x^3 + x^2 + 2x^2 + x - 30 = 0$$

$$\mathbf{2x^3 + 3x^2 + x - 30 = 0}$$

Portanto, a resposta correta, é a alternativa B.

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	$2x^2 + x + 2x + 1 = 30$	***Resposta incorreta.*** *Para a escolha desta resposta o aluno equivocadamente multiplicou apenas os binômios (x + 1)· (2x + 1).*
(B)	$\mathbf{2x^3 + 3x^2 + x - 30 = 0}$	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(C)	$x^3 + 2x^2 + x - 30=0$	***Resposta incorreta.*** *Ao optar por esta resposta, provavelmente o aluno não adicionou o termo referente à x^2 no desenvolvimento do polinômio.* $2x^3 + x^2 + 2x^2 + x - 30=0$
(D)	$x^3 + x^2 + x = 30$	***Resposta incorreta.*** *A escolha desta resposta, provavelmente tenha sido aleatória, visto que, não considera os coeficientes dos termos no polinômio.*

Habilidade

MP08 **Resolver problemas que envolvam a divisão entre um polinômio e um binômio (x – k).**

Questão 07

ANULADA

Difícil

O resto da divisão do polinômio $(x^5 - 3x^2 + 2x + 6)$ pelo binômio $(x+1)$ é:

(A) 2.

(B) 6.

(C) 0

(D) −1.

Resolução comentada

O objetivo da questão é verificar a habilidade de divisão entre polinômios. Aqui sugerimos o cálculo utilizando técnicas alternativas, a partir da abordagem qualitativa das equações algébricas.

Solução:

Dado o polinômio: $x^5 - 3x^2 + 2x + 6$

Para não efetuar a divisão, vamos utilizar o teorema do resto.

Como, x = −1 é a raiz do binômio (x + 1), temos o valor numérico:

$$P(-1) = (-1)^5 - 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 6$$

$$P(-1) = -1 - 3 - 2 + 6$$

$$P(-1) = -6 + 6$$

$$P(-1) = 0$$

Logo, o resto da divisão é 0 (zero), alternativa C.

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	*2.*	***Resposta incorreta.*** *Um possível equívoco do aluno no cálculo de:* $P(-1) = (-1)^5 - 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (1) + 6 = -5 + 3 - 2 + 6 = 2$
(B)	*6.*	***Resposta incorreta.*** *Para escolher esta resposta, o aluno provavelmente calculou:* $P(1) = 1^5 - 3 \cdot 1^2 + 6 = 6$
(C)	***0.***	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(D)	*−1.*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente, o aluno equivocadamente considera a raiz, −1, do binômio (x + 1) como resposta.*

Habilidade	
MP08	**Resolver problemas que envolvam a divisão entre um polinômio e um binômio (x – k).**

Questão 08

Difícil

A divisão do polinômio $p(x)= x^5 - 2x^4 - x + m$ por $q(x) = x - 1$ é exata. O valor de m é

(A) −2.

(B) −1.

(C) 0.

(D) 2.

Resolução comentada

O objetivo da questão é verificar a habilidade de cálculo utilizando a divisão entre polinômios. Como sugestão apresentamos o Teorema do Resto, ou Teorema de D'Alembert, cujo enunciado é:

"Um polinômio P(x) é divisível por (x−a) se e somente se P(a) = 0"

Resolução:

De acordo com os dados da questão, temos que p(x) é divisível por q(x), pois a divisão é exata, então de acordo com o teorema do resto, temos que:

$$\begin{cases} P(1) = (1)^5 - 2 \cdot (1)^2 - 1 + m \\ P(1)=0 \end{cases} \Rightarrow 1 - 2 - 1 + m = 0 \Rightarrow m = 2$$

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	*−2.*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno aplicou corretamente o teorema do resto, porém não completou a resolução da equação que determina o valor de m.*
(B)	*−1.*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno não compreendeu o enunciado do problema, ou não soube associar o solicitado com algum conhecimento matemático para resolvê-la e indicou esta resposta aleatoriamente.*
(C)	*0.*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno apenas associou o fato de que se os polinômios p(x) e q(x) são divisíveis, então o resto da divisão é zero.*
(D)	***2.***	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***

Habilidade	
MP09	**Calcular a divisão de polinômios por meio da utilização de algoritmos.**

Questão 09

Difícil

O quociente e o resto da divisão do polinômio $P(x)= x^3 + 2x + 1$ por $(x + 2)$ são, respectivamente,

(A) $x^2 - 2x + 6$ e -11

(B) $-2x + 6$ e -11

(C) $x^2 - 2x$ e -13

(D) $x^2 - 2x + 6$ e 11

Resolução comentada

O resto será o valor de P(−2), ou seja:

$R = (-2)^3 + 2 \cdot (-2) + 1 = -8 - 4 + 1 = -11$

O cálculo quociente da divisão pode ser encontrado por meio do algoritmo de Briot – Ruffini:

	Coeficientes de P(x)			
	1	0	2	1
Raiz -2		-2.1	-2.(-2)	-2.6
	1	-2	6	-11
	Coeficientes de Q(x)			Resto

Portanto o quociente da divisão de P(x) por (x+2) será: $\mathbf{x^2 - 2x + 6}$

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	***x^2 - 2x + 6 e -11***	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(B)	*-2x + 6 e -11*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno aplicou corretamente os conceitos necessários para a resolução do problema, porém cometeu alguns erros quando da operacionalização numérica na questão.*
(C)	*x^2 - 2x e -13*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno aplicou corretamente os conceitos necessários para a resolução do problema, porém cometeu alguns erros quando da operacionalização numérica na questão.*
(D)	*x^2 - 2x + 6 e 11*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno aplicou corretamente os conceitos necessários para a resolução do problema, porém cometeu alguns erros quando da operacionalização numérica na questão.*

Habilidade	
MP09	**Calcular a divisão de polinômios por meio da utilização de algoritmos.**

Questão 10

Médio

Utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, a divisão do polinômio $P(x)\ 2x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 12$ por $D(x) = (x-1)$ tem quociente igual a:

(A) $Q(x) = 2x^3 + 6x^2 - x - 1$

(B) $Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

(C) $Q(x) = 2x^2 + 6x^3 - x - 1$

(D) $Q(x) = -2x^2 + 6x^3 - x - 1$

Resolução comentada

O objetivo da questão é verificar se o aluno compreendeu a utilização do dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Ao aplica-lo o aluno deverá chegar ao seguinte resultado.

Resolução

1	2	4	–7	0	12
	2	6	–1	–1	11

Assim temos:

$Q(x) = 2x^3 + 6x^2 - x - 1$ e $R(x) = 11$

Grade de correção

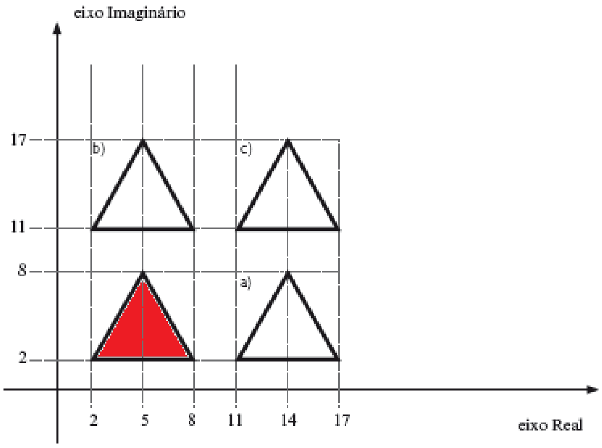
Alternativa		Observação
(A)	$\mathbf{Q(x) = 2x^3 + 6x^2 - x - 1}$	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(B)	$Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno conseguiu identificar os procedimentos para a utilização do dispositivo prático, porém não realizou corretamente as operações indicadas.*
(C)	$Q(x) = 2x^2 + 6x^3 - x - 1$	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno conseguiu identificar os procedimentos para a utilização do dispositivo prático, porém não realizou corretamente as operações indicadas.*
(D)	$Q(x) = -2x^2 + 6x^3 - x - 1$	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno conseguiu identificar os procedimentos para a utilização do dispositivo prático, porém não realizou corretamente as operações indicadas.*

Habilidade
MP11 **Resolver operações com números complexos associados a transformações no plano.**

Questão 11

Fácil

Considere a região do plano complexo indicado a seguir. Cada ponto da região é a imagem de um complexo e foi objeto de uma transformação da figura pintada em vermelho nas figuras a, b e c



Pode-se afirmar que a representação **c)** é o resultado

(A) da soma com o número complexo 9 + 9i.

(B) do produto pelo número imaginário 2i.

(C) da soma ao número complexo 9i.

(D) do produto pelo número real 2.

Resolução comentada

O objetivo desta questão é verificar se o aluno desenvolveu a habilidade de realizar transformações no plano, referentes a operações com números complexos.

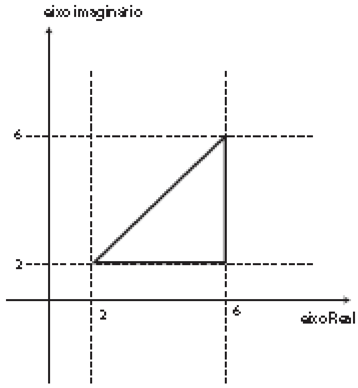
Na questão, a região triangular hachurada para atingir a posição indicada em C será deslocada para a direita de 9 unidades, em seguida, para cima, de 9 unidades, e depois para a direita de 9 unidades, que corresponde ao complexo: 9 + 9i.

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	***da soma com o número complexo 9 + 9i.***	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(B)	*do produto pelo número imaginário 2i.*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno não compreendeu as noções de translações no plano, pois neste caso a região triangular haveria que ser ampliada duas vezes e também rotacionada de 90º.*
(C)	*da soma ao número complexo 9i.*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno tenha se confundido na realização das translações, pois neste caso essa transformação refere-se à figura b).*
(D)	*do produto pelo número real 2.*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno não compreendeu as noções de translações no plano, pois neste caso a região triangular haveria que ser ampliada por 2, e nas figuras apresentadas não existem regiões triangulares ampliadas.*

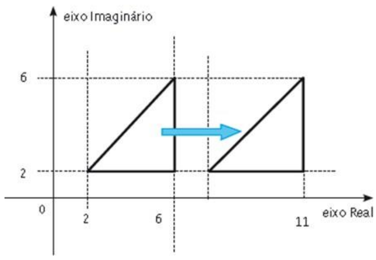
Questão 12

Médio. Considere a região do plano complexo indicada na figura a seguir.

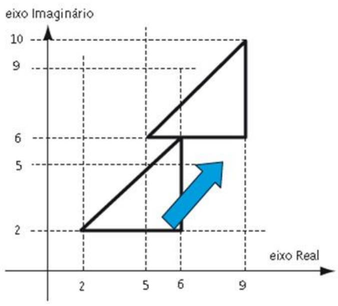


Cada ponto da região é a imagem de um complexo e será objeto de uma transformação somado a 3i, que será representado graficamente por:

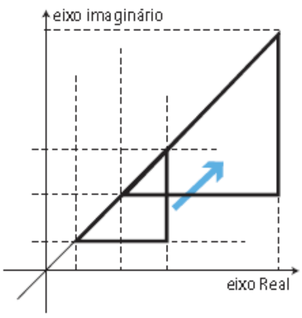
(A)



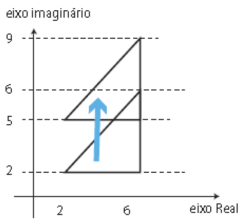
(B)



(C)



(D)

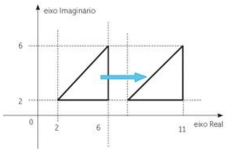
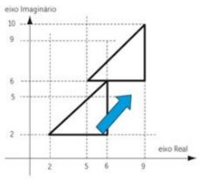
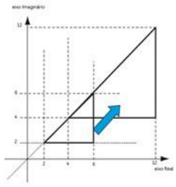
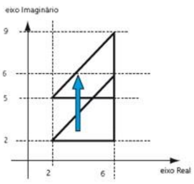


Resolução comentada

O objetivo desta questão é verificar se o aluno desenvolveu a habilidade de realizar transformações no plano, referentes a operações com números complexos.

Na questão, cada ponto da região será deslocado na direção do eixo imaginário de 3 unidades, a região transformada será um triângulo de vértices nas imagens dos complexos: 2 + 5i, 6 + 5i e 6 + 9i, portanto, a alternativa D expressa tal translação.

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)		***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno tenha se confundido na realização das translações, pois neste caso, cada ponto da região será deslocado na direção do eixo real de 5 unidades, a região transformada será um triângulo de vértices nas imagens dos complexos 7 + 2i, 11 + 2i e 11 + 6i.*
(B)		***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno tenha se confundido na realização das translações, pois neste caso cada ponto da região será deslocado na direção do eixo real de 3 unidades, seguido de outro na direção do eixo imaginário de 4 unidades (ou vice-versa). Cada ponto terá um deslocamento total de valor igual ao módulo do complexo 3 + 4i, que é 5. Os vértices da região transformada serão os seguintes: 5 + 6i, 9 + 6i e 9 + 10i.*
(C)		***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno tenha se confundido na realização das translações, pois neste caso cada ponto da região terá seu módulo multiplicado por 2; logo, a região será ampliada, tendo cada segmento multiplicado por 2, e sua área multiplicada por 4. Como as distâncias de cada ponto até a origem serão multiplicados por 2, haverá uma translação (afastamento da origem) com a ampliação.*
(D)		***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***

2. Questões referentes às habilidades da Matriz de Referência para a Avaliação - SARESP

H04 **3ª Série – E.M.**	**Representar por meio de funções, relações de proporcionalidade direta, inversa, e direta com o quadrado.**

Questão 13

Média

(SARESP 2010)

A relação entre a pressão e a temperatura de um gás quando este é mantido em um recipiente de volume constante é uma função linear definida pela relação $\frac{P}{T}=a$, ou seja, a razão entre a pressão e a temperatura é constante. A tabela seguinte mostra, para um determinado gás, a evolução da pressão em relação à temperatura.

Temperatura (T)	300	400	700
Pressão (P)	60	80	

O valor que está faltando na tabela é

(A) 100.

(B) 140.

(C) 150.

(D) 170.

(E) 180.

Comentários

O aluno deve identificar uma relação de proporcionalidade direta entre as variáveis do problema, Temperatura e Pressão e o coeficiente de proporcionalidade a que pode ser obtido da tabela, observando que:

$$\frac{60}{300} = \frac{80}{400} = \frac{x}{700} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{700}{5} \Rightarrow x = 140$$

Grade de correção

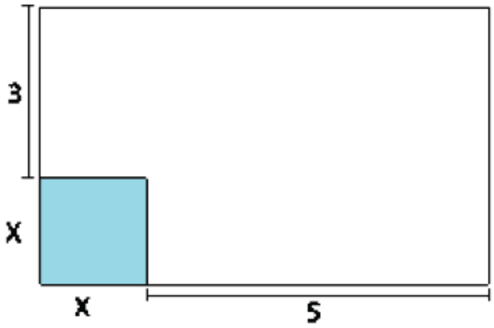
Alternativa		Observação
(A)	*100.*	***Resposta incorreta**. O aluno pode ter escolhido esse valor por ser a diferença entre 400 e 300, ou percorreu a 2ª linha verificando o aumento de 20 unidades.*
(B)	***140.***	***Resposta correta**. O aluno possivelmente observou a relação de proporcionalidade entre T e P.*
(C)	*150.*	***Resposta incorreta**. O aluno possivelmente não identificou a relação de proporcionalidade entre T e P e atribui um valor qualquer à posição vazia.*
(D)	*170.*	***Resposta incorreta**. O aluno possivelmente não identificou a relação de proporcionalidade entre T e P e atribui um valor qualquer à posição vazia.*
(E)	*180.*	***Resposta incorreta**. O aluno possivelmente não identificou a relação de proporcionalidade entre T e P e atribui um valor qualquer à posição vazia.*

H04 3ª Série – E.M.	Resolver problemas envolvendo equações do 2º grau.

Questão 14

Médio (SARESP 2012)

O retângulo representado na figura tem 35 m^2 de área.



A **área do quadrado sombreado** é, em m^2, igual a

(A) 3.

(B) 4.

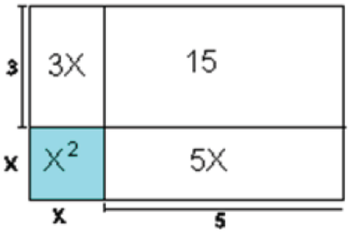
(C) 9.

(D) 16.

(E) 18.

Comentários

O item é um problema geométrico resolvido pelo viés algébrico. O aluno poderia resolver o problema fazendo uso de produtos notáveis particionando a figura adequadamente.



Então, sabendo que a área de todo o retângulo é 35 m2, a soma das áreas particionadas deverá resultar no
mesmo valor, ou seja

$$\mathbf{x^2 + 3x + 5x + 15 = 35}$$

que pode ser ajustada para a seguinte equação do 2º grau

$$\mathbf{x^2 + 8x - 20 = 0}$$

resolvendo a equação, obtém-se x=-10 ou x=2. Como o valor de x se refere a uma medida, apenas a segunda solução (x=2) é cabível. Logo, $x^2 = 4$.
Também seria possível equacionar o problema com auxílio da linguagem algébrica. Como a área é igual a 35 m^2 e a figura corresponde a um retângulo, sua área é dada pelo produto dos seus lados que medem (x+3) e (x+5). Portanto,
$(x+3) \cdot (x+5) = 35$ que resulta na mesma equação descrita no outro método.

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	*3.*	***Resposta incorreta**. O aluno possivelmente transcreveu a medida de 3 metros informada na figura, demonstrando não ter compreendido a questão.*
(B)	***4.***	***Resposta correta**. O aluno possivelmente utilizou alguma técnica algébrica e geométrica para encontrar a solução.*
(C)	*9.*	***Resposta incorreta**. O aluno pode ter apenas feito o quadrado da medida de 3 metros informada na figura, demonstrando não ter compreendido a questão.*
(D)	*16.*	***Resposta incorreta**. O aluno pode ter escolhido esse valor por uma suposição na ordem de tamanho das regiões, demonstrando não ter compreendido a questão.*
(E)	*18.*	***Resposta incorreta**. O aluno pode ter escolhido esse valor por uma suposição na ordem de tamanho das regiões, demonstrando não ter compreendido a questão.*

H17 3ª Série – E.M	Identificar a localização de números reais na reta numérica.

Questão 15

Médio

Considere a dízima periódica 0,99999....

Representado na reta numérica, este número estará

(A) à direita do número 1.

(B) à esquerda do número 1.

(C) sobre o número 1.

(D) sobre o número 0.

(E) sobre o número 9.

Comentários

Para o aluno transformar a dízima periódica numa fração irredutível, usando as regras, deverá fazer $\frac{9}{9}$*, obtendo assim o número 1.*

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	*à direita do número 1.*	***Resposta incorreta***. *O aluno possivelmente não reconhece a transformação de uma dízima periódica num número racional, não identificando assim sua posição na reta real.*
(B)	*à esquerda do número 1.*	***Resposta incorreta***. *O aluno possivelmente não reconhece a transformação de uma dízima periódica num número racional, não identificando assim sua posição na reta real. Supostamente o aluno acredita, pela representação observada, que este número é menor que 1.*
(C)	***sobre o número 1.***	***Resposta correta. O aluno possivelmente reconhece a transformação de uma dízima periódica num número racional, identificando assim sua posição na reta real.***
(D)	*sobre o número 0.*	***Resposta incorreta***. *O aluno possivelmente não reconhece a transformação de uma dízima periódica num número racional, não identificando assim sua posição na reta real.*
(E)	*sobre o número 9.*	***Resposta incorreta***. *O aluno possivelmente não reconhece a transformação de uma dízima periódica num número racional, não identificando assim sua posição na reta real e ainda associa a sua posição ao número 9 pelos algarismos que lê nessa representação.*

H27 3ª Série – E.M.	Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente).

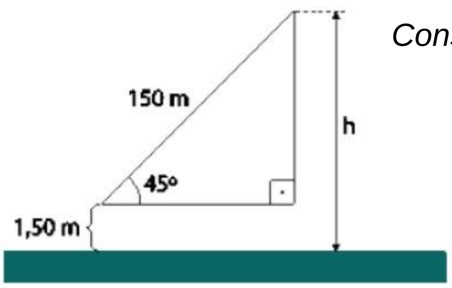
DESCONSIDERAR

Questão 15

Médio

(SARESP 2012)

Um jovem avista o topo de uma torre segundo um ângulo de 45º, conforme a ilustração.



Considere

Sabe-se que a distância dos seus olhos ao topo da torre é 150 m e, ainda, que a distância dos seus olhos ao solo é 1,50 m. A altura aproximada h da torre é

(A) 77 m.

(B) 100 m.

(C) 107 m.

(D) 150 m.

Comentários

Esse problema aborta a aplicação da relação trigonométrica seno. Nesse caso, além de aplicar a devida relação trigonométrica, é necessário acrescentar a medida 1,50 m ao resultado.

Assim,

$$\mathbf{sen45° = \frac{h - 1,50}{150}}$$

$$\mathbf{\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h - 1,50}{150}}$$

$$\mathbf{\frac{1,4}{2} = \frac{h - 1,50}{150}}$$

$$\mathbf{h = 106,5}$$

$$\mathbf{h \cong 107\ m}$$

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	*77 m.*	***Resposta incorreta**. Possivelmente o aluno não fez os cálculos e considerou por aproximação visual.*
(B)	*100 m.*	***Resposta incorreta**. Possivelmente o aluno pode ter dividido o comprimento 150 m pelo valor 1,5 m.*
(C)	***107 m.***	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(D)	*150 m.*	***Resposta incorreta**. Possivelmente o aluno pode ter tomado apenas o comprimento 150 m.*

Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional
Coordenador: Olavo Nogueira Batista Filho

Departamento de Avaliação Educacional
Diretora: Cyntia Lemes da Silva Gonçalves da Fonseca
Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Planejamento e Análise de Avaliações
Diretor: Juvenal de Gouveia
Ademilde Ferreira de Souza, Cristiane Dias Mirisola, Isabelle Regina de Amorim Mesquita, Patricia de Barros Monteiro, Soraia Calderoni Statonato

Centro de Aplicação de Avaliações
Denis Delgado dos Santos, José Guilherme Brauner Filho, Kamila Lopes Candido, Lilian Sakai, Manoel de Castro Pereira, Nilson Luiz da Costa Paes, Teresa Miyoko Souza Vilela

Coordenadoria de Gestão da Educação Básica
Coordenadora: Ghisleine Trigo Silveira

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão da Educação Básica
Diretora: Regina Aparecida Resek Santiago

Centro do Ensino Fundamental dos Anos Finais, Ensino Médio e Educação Profissional
Diretora: Valeria Tarantello de Georgel

Equipe Curricular CGEB de Matemática – Autoria, Leitura crítica e validação do material
Djalma de Oliveira Bispo Filho, João dos Santos Vitalino, Otávio Yoshio Yamanaka, e Vanderley Aparecido Cornatione

Professores Coordenadores dos Núcleos Pedagógicos das Diretorias de Ensino - Leitura crítica e validação do material de Matemática

Adriana Santos Morgado, Antonia Zulmira da Silva, Cristina Aparecida da Silva, Edna Marchi Alvarenga, Edson Basilio Amorim Filho, Leandro Geronazzo, Lúcio Mauro Carnaúba, Marcelo Balduino Silva, Maria Denes Tavares Sa Silva, Mario José Pagotto, Nilton Celso Mourão, Rebeca Meirelles das Chagas, Rosana Jorge Monteiro Magni, Rosemeire Lepinski, Sheila Cristina Aparecida Lima Camargo