GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

Caderno do Professor

3ª Série do Ensino Médio

Matemática

São Paulo

2º Bimestre de 2017

16ª Edição

APRESENTAÇÃO

A Avaliação da Aprendizagem em Processo – AAP - se caracteriza como uma ação desenvolvida de modo colaborativo entre a Coordenadoria de Gestão da Educação Básica e a Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional.

Iniciada em 2011 e voltada a apenas dois anos/séries, foi gradativamente sendo expandida e, desde 2015, abrange todos os alunos dos Ensinos Fundamental e Médio além de, continuamente, aprimorar seus instrumentos.

A AAP, fundamentada no Currículo do Estado de São Paulo, propõe o acompanhamento da aprendizagem das turmas e alunos de forma individualizada, com um caráter diagnóstico. Tem como objetivo apoiar as unidades escolares e os docentes na elaboração de estratégias adequadas a partir da análise de seus resultados, contribuindo efetivamente para melhoria da aprendizagem e desempenho dos alunos, especialmente nas ações de recuperação contínua.

As habilidades selecionadas para a AAP, em Língua Portuguesa e Matemática, têm como referência, a partir de 2016, a Matriz de Avaliação Processual elaborada pela CGEB e já disponibilizada à rede.

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental permanece a articulação com as expectativas de aprendizagem de Língua Portuguesa e Matemática e com os materiais do Programa Ler e Escrever e da Educação Matemática nos Anos Iniciais – EMAI.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação, na forma de cadernos de provas para os alunos, também foram elaborados os respectivos exemplares do Professor, com orientações específicas para os docentes, instruções para a aplicação (Anos Iniciais), quadro de habilidades de cada prova, gabaritos, orientações e grades para correção e recomendações pedagógicas gerais.

Estes subsídios, agregados aos registros que o professor já possui e informações sistematizadas no Sistema de Acompanhamento dos Resultados de Avaliações - SARA, incorporando os dados resultantes da AAP, devem auxiliar no planejamento, replanejamento e acompanhamento das ações pedagógicas, mobilizando procedimentos, atitudes e conceitos necessários para as atividades de sala de aula, sobretudo aquelas relacionadas aos processos de recuperação das aprendizagens.

COORDENADORIA DE GESTÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA - CGEB

COORDENADORIA DE INFORMAÇÃO, MONITORAMENTO E AVALIAÇÃO EDUCACIONAL - CIMA

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

Questão	Código da Habilidade	Descrição
01	MP05	Identificar os coeficientes e raízes de uma equação algébrica e as relações entre eles.
02		
03	MP06	Resolver equações algébricas de terceiro grau, por meio da relação entre seus coeficientes e raízes.
04		
05	MP07	Resolver problemas que envolvam a soma, subtração e multiplicação de polinômios.
06		
07	MP08	Resolver problemas que envolvam a divisão entre um polinômio e um binômio (x – k).
08		
09	MP09	Calcular a divisão de polinômios por meio da utilização de algoritmos.
10		
11	MP11	Resolver operações com números complexos associados à transformação no plano.
12		

Gabarito

	A	B	C	D	E
01		B			
02				D	
03			C		
04			C		
05				D	
06		B			
07			C		
08					E
09	A				
10	A				
11	A				
12				D	

COMENTÁRIOS E RECOMENDAÇÕES PEDAGÓGICAS

A premissa básica, a respeito de um processo avaliativo deve ser considerada como instrumento que subsidiará tanto o aluno no seu desenvolvimento cognitivo, quanto ao professor no redimensionamento de sua prática pedagógica.

Desta forma, a avaliação da aprendizagem passa a ser um instrumento que auxiliará o educador a atingir os objetivos propostos em sua prática educativa, neste caso a avaliação sob essa ótica deve ser tomada na perspectiva diagnóstica, servindo como instrumento para detectar as dificuldades e possibilidades de desenvolvimento do educando.

Neste sentido, as questões que constam deste caderno, procuram verificar o nível de desenvolvimento das habilidades descritas na Matriz de Avaliação Processual de Matemática, notadamente as do 2º bimestre letivo.

Nas linhas a seguir, apresentamos uma breve caracterização das habilidades e o seu respectivo conteúdo.

- *(MP05) – Identificar os coeficientes e raízes de uma equação algébrica e as relações entre eles.*

Em estudos anteriores, sobretudo nos Anos Finais do Ensino Fundamental, foram apresentados aos alunos diversos problemas, em diferentes contextos, cuja solução conduz a equações do primeiro e do segundo graus.

Desta forma, pressupõe-se que eles já estão acostumados a resolver equações de primeiro e do segundo graus, já no Ensino Médio, aprofunda-se este tratamento para situações mais complexas, que conduzem a equações de 3º grau ($ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$), de 4º grau ($ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, com $a \neq 0$) e assim por diante.

O caminho mais conveniente, nesses casos é uma análise qualitativa da pergunta que cada equação representa, extraindo da própria pergunta informações relevantes sobre as raízes.

Desta forma, sabemos que uma equação sempre representa uma pergunta envolvendo algum elemento desconhecido, uma incógnita. Resolver a equação é descobrir tal incógnita.

Finalmente o objetivo principal do diagnóstico desta habilidade é o entendimento da relação existente entre os coeficientes e as raízes de um polinômio qualquer.

- *(MP06) – Resolver equações algébricas de terceiro grau, por meio da relação entre seus coeficientes e raízes.*

Um dos objetivos principais do estudo das equações algébricas é o abandono da utilização de fórmulas que indicam as raízes de uma equação algébrica e potencializar a observação dos coeficientes de uma equação em busca de informações sobre suas raízes.

- *(MP07) – Resolver problemas que envolvam a soma, subtração e multiplicação de polinômios.*

O objetivo principal quando se destaca o diagnóstico de uma habilidade procedimental é a de verificar se o aluno já tem estruturado as competências relacionadas às operações com polinômios, conhecidas desde os Anos Finais do Ensino Fundamental.

Para somar, subtrair e multiplicar polinômios, basta operar com as expressões algébricas que compõe suas parcelas ou seus fatores, de acordo com a operação a ser utilizada.

- *(MP08) – Resolver problemas que envolvam a divisão entre um polinômio e um binômio (x – k).*

A divisão de um polinômio por outro, exige uma atenção redobrada, pois exige a redução do grau de um polinômio inicial por um binômio do tipo (x – k), onde **k** é a raiz conhecida.

- *(MP09) – Calcular a divisão de polinômios por utilização de algoritmos.*

Para realizar a divisão de polinômios, torna-se necessário a utilização do conceito de identidade de polinômios, que conduzem a uma maneira de efetuar os cálculos, resumida em algoritmos, conhecida como Algoritmo de Briot-Ruffini.

- *(MP11) – Resolver operações com números complexos associados a transformações no plano.*

  Assim como na reta incluem-se todos os números reais, e com a inclusão de números que possam ser raízes quadradas de negativos, será necessário (e suficiente) todo o plano cartesiano, que servirá de inspiração para a construção do plano complexo, suporte para a representação de todos os números complexos. A unidade imaginária i, que representa o novo número cujo quadrado é −1, servirá de padrão para a representação no eixo vertical de números como 2i, 6i, 7i, −4i etc.

Neste sentido, as operações com complexos correspondem à realização de certos movimentos no plano. Por exemplo, se a um complexo z for somado o número real 4, sua representação no plano será deslocada na direção do eixo x de 4 unidades.

Finalmente, a avaliação, entendida aqui como processual, haverá que ser percebida como um processo de mapeamento e da diagnose do processo de aprendizagem, ou seja, a obtenção de indicadores qualitativos do processo de ensino-aprendizagem no trabalho docente.

Seguindo esta concepção, o PCN destaca que:

> [...] cabe à avaliação fornecer aos professores as informações sobre como está ocorrendo a aprendizagem: os conhecimentos adquiridos, os raciocínios desenvolvidos, as crenças, hábitos e valores incorporados, o domínio de certas estratégias, para que ele possa propor revisões e reelaborações de conceitos e procedimentos parcialmente consolidados. (BRASIL, 2000, p. 54)

É importante salientar que as observações que constam nas grades de correção deste caderno são apenas pressupostos de resolução, cabendo ao professor analisar os registros dos alunos e não considerar as observações indicadas como norma padrão e que o objetivo maior, é a proposição de uma grade de correção pelo próprio professor e assim realizar uma análise de acordo com a realidade do processo de ensino-aprendizagem desenvolvido em sala de aula.

Equipe Curricular de Matemática – CEFAF/CGEB

Habilidade MP05	Identificar os coeficientes e raízes de uma equação algébrica e as relações entre eles.

Questão 1

Sendo dada a equação $x^2 + Bx + C = 0$ e sabendo que 4 e –5 são as raízes dessa equação, então temos que:

(A) B = 1 e C = −9.

(B) B = 1 e C = −20.

(C) B = 9 e C = 20.

(D) B = 20 e C = −20.

(E) B = 20 e C = −1.

Correção Comentada

O objetivo da questão é verificar o conhecimento do estudante sobre as relações entre coeficientes e raízes de uma equação algébrica e suas estratégias de resolução.

Da equação algébrica: $x^2 + a \cdot x + b = 0$, tem-se que as raízes são: $x_1 = 4$ e $x_2 = -5$.

Os coeficientes dos termos da equação são: a = 1, b = B e c = C.

Utilizando as relações entre a soma e produto de raízes com os coeficientes da equação temos:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow 4 + (-5) = -\frac{B}{1} \Rightarrow -1 = -B \Rightarrow B = 1$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 4 \cdot (-5) = \frac{C}{1} \Rightarrow \frac{C}{1} = -20 \Rightarrow C = -20$$

Outra forma de se resolver:

Temos duas raízes (x_1 e x_2) e duas incógnitas (os coeficientes B e C).

A partir destes dados, obtém se o sistema de equações lineares:
$$\begin{cases} (x_1)^2 + x_1 \cdot B + C = 0 \\ (x_1)^2 + x_2 \cdot B + C = 0 \end{cases}$$

Substituindo os valores das raízes, temos que:

$$\begin{cases} (4)^2 + 4 \cdot B + C = 0 \\ (-5)^2 + (-5) \cdot B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 + 4 \cdot B + C = 0 \\ 25 - 5 \cdot B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4B + C = -16 \\ -5B + C = -25 \end{cases}$$

Na primeira linha temos que: $C = -16 - 4 \cdot B$ (I).

Substituindo este resultado na equação da 2ª linha temos que:

$$-5B - 16 - 4B = -25 \Rightarrow -9B = -25 + 16 \Rightarrow -9B = -9 \Rightarrow \mathbf{B = 1}$$

e $C = -16 - 4 \cdot 1 \Rightarrow \mathbf{C = -20}$

GRADE DE CORREÇÃO

(A)		
B= 1 e C = −9.	**Resposta incorreta.**	Ao optar por esta resposta, possivelmente o aluno efetuou adições equivocadamente com as raízes informadas no enunciado.

(B)		
B = 1 e C = –20.	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(C)		
B = 9 e C = 20.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente, para escolher esta resposta o aluno equivocadamente somou e multiplicou as raízes da equação dada no problema desconsiderando inclusive os sinais dos números.

(D)		
B = 20 e C = −20.	**Resposta incorreta.**	Para a escolha desta resposta, possivelmente o aluno efetuou o produto das raízes, considerando os sinais respectivos à sequência em que aparecem no problema.

(E)		
B = 20 e C = −1.	**Resposta incorreta.**	Para a escolha desta resposta, possivelmente o aluno se equivoca, com os sinais respectivos às raízes do problema.

Habilidade	Expressar algebricamente uma matriz.
MP05	

Questão 2

A forma fatorada da equação $x^2 - 10x + 24 = 0$ é

(A) $(x + 4) \cdot (x - 6) = 0$

(B) $(x - 4) \cdot (x + 6) = 0$

(C) $(x + 4) \cdot (x + 6) = 0$

(D) $\mathbf{(x - 4) \cdot (x - 6) = 0}$

(E) $(x - 4) + (x + 6) = 0$

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo da questão é verificar o conhecimento do aluno sobre as relações entre os coeficientes e raízes de uma equação algébrica e suas estratégias de cálculo.

Uma equação do 2º grau com uma raiz igual a p e outra igual a m pode ser escrita como (x – p) . (x – m) = 0. Escrita dessa maneira, dizemos que está em sua forma fatorada. De acordo com o enunciado, deve-se encontrar as raízes da equação e utilizá-las para escrever na forma fatorada.

Dada a equação: $x^2 - 10x + 24 = 0$ determinando suas raízes pelo método de Bháskara, temos que:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 6 \\ x_2 = 4 \end{matrix}$$

Então a equação na forma fatorada fica como: $\mathbf{(x - 4) \cdot (x - 6) = 0}$

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

(x + 4) · (x – 6) = 0	**Resposta incorreta.**	É possível que o aluno tenha invertido algum sinal na resolução.

(B)

(x – 4) · (x + 6) = 0	**Resposta incorreta.**	É possível que o aluno tenha invertido algum sinal na resolução.

(C)

(x + 4) · (x + 6) = 0	**Resposta incorreta.**	É possível que o aluno tenha invertido o sinal do coeficiente b na resolução.

(D)

(x – 4) · (x – 6) = 0	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(E)

(x – 4) + (x + 6) = 0	**Resposta incorreta.**	É possível que o aluno não tenha compreendido a equação na forma fatorada.

Habilidade MP06	Resolver equações algébricas de terceiro grau, por meio da relação entre seus coeficientes.

Questão 3

Uma equação de 3º grau, pode ser escrita: $ax^3 + bx^2 + cx + d$, (com $a \neq 0$). A equação polinomial cujas raízes são –1, 1 e 2 deve ser escrita como

(A) $x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$.

(B) $2x^2 + x + 2 = 0$.

(C) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$.

(D) $2x^2 - x - 2 = 0$.

(E) $-x^3 + x^2 + x + 2 = 0$.

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo da questão é verificar a compreensão do aluno quanto a importância dos coeficientes das equações e suas possíveis raízes, na articulação da técnica e dos significados na resolução de uma equação algébrica.

Conhecendo as raízes $r_1 = -1$, $r_2=1$ e $r_3=2$ e conhecendo-se a forma fatorada de uma equação de 3º grau, $(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) = 0$, temos que:

$$\left(x - (-1)\right) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) = 0$$

$$\left(x^2 + 1\right) \cdot (x - 2) = 0$$

$$x^3 - x + 2 = 0$$

Portanto a equação polinomial obtida corresponde à alternativa **C.**

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

$x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$.	**Resposta incorreta.**	A opção por esta resposta mostra que o aluno pode ter compreendido a relação entre coeficientes e raízes de uma equação, contudo comete imprecisão ao operar algebricamente esses termos.

(B)

$2x^2 + x + 2 = 0$.	**Resposta incorreta.**	A opção por esta resposta mostra que o aluno pode ter compreendido a relação entre coeficientes e raízes de uma equação, contudo comete imprecisão ao operar algebricamente esses termos.

(C)

$\mathbf{x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0}$.	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(D)

$2x^2 - x - 2 = 0$.	**Resposta incorreta.**	A opção por esta resposta mostra que o aluno pode ter compreendido a relação entre coeficientes e raízes de uma equação, contudo comete imprecisão ao operar algebricamente esses termos.

(E)

$-x^3 + x^2 + x + 2 = 0$.	**Resposta incorreta.**	A opção por esta resposta mostra que o aluno pode ter relacionado os coeficientes e sinais das raízes da equação, equivocadamente.

Habilidade	Resolver equações algébricas de terceiro grau, por meio da relação entre seus coeficientes e raízes.
MP06	

Questão 4

A soma das raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$ é

(A) 5.

(B) 6.

(C) 7.

(D) 12.

(E) 19.

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo da questão é verificar a compreensão do aluno sobre as relações entre os coeficientes e as possíveis raízes de uma equação, articulando a técnica e significado ao resolver uma equação algébrica.

Uma equação de terceiro grau pode ser escrita na forma: $x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0$, de tal forma que $S_1 = r_1 + r_2 + r_3$.

Na equação polinomial dada, $x^3 - 7x^2 + 12x = 0$, o coeficiente da variável de grau 2 é 7, desta forma, temos que a soma das raízes da equação polinomial é 7, o que atende a alternativa **C** da questão.

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

5.	**Resposta incorreta.**	Ao escolher esta alternativa como resposta, o aluno equivocadamente pode ter considerado a soma algébrica dos coeficientes de x^2 e x, ou seja, realizou a operação (–7 + 12 = 5).

(B)

6.	**Resposta incorreta.**	O aluno nesta resposta equivocada pode ter efetuado a adição dos coeficientes da equação polinomial, ou seja, realizou a operação (1 – 7 + 12 = 6)

(C)

7.	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(D)

12.	**Resposta incorreta.**	Para escolha desta resposta, o aluno considera equivocadamente, a soma das raízes da equação como sendo o coeficiente S_3, no caso igual a doze.

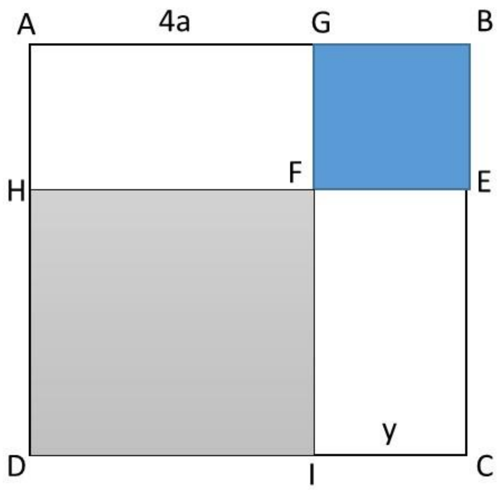
(E)

19.	**Resposta incorreta.**	Para escolha desta resposta, o aluno considera equivocadamente, a soma dos coeficientes de x^2 e x, da equação como sendo o coeficiente S_3, igual a dezenove.

Habilidade	Resolver problemas que envolvam a soma, subtração e multiplicação de polinômios.
MP07	

Questão 5

Na figura a seguir o quadrado ABCD foi dividido em dois quadrados e dois retângulos:



O polinômio que representa a área do quadrado ABCD, é

(A) $A_{ABCD} = 16 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot y$.

(B) $A_{ABCD} = 4 \cdot a \cdot y + y^2$.

(C) $A_{ABCD} = 16 \cdot a + 4 \cdot y$.

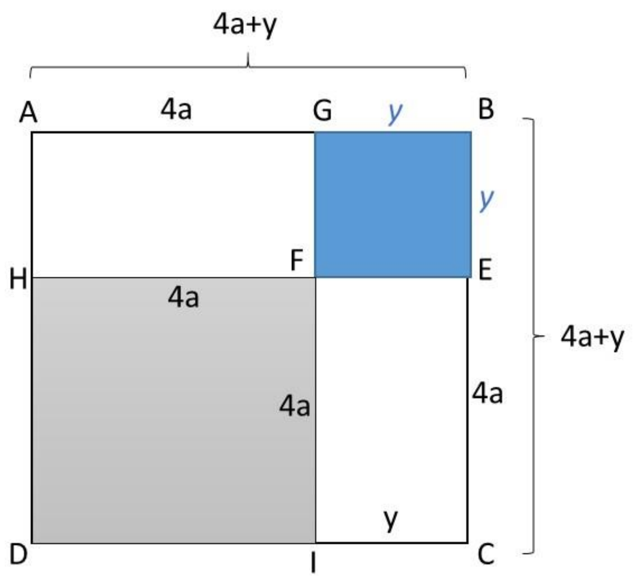
(D) $A_{ABCD} = 16 \cdot a^2 + 8ay + y^2$.

(E) $A_{ABCD} = 4 \cdot a^2 + 4 \cdot a + y$.

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo da questão é verificar a compreensão do aluno quanto as relações entre o conhecimento relativo às grandezas e medidas, notadamente no conhecimento da área do quadrado e retângulo, para uma representação algébrica, visando especificamente as operações, entre monômios e binômios.

Desta forma, a resolução da questão consiste basicamente em estabelecer as medidas não informadas na figura e estabelecer a área do quadrado ABCD, conforme segue:



Então a área do quadrado ABCD será dada por:

$$(4a+y)\cdot(4a+y)=\left((4a+y)\right)^2=16\cdot a^2+8\cdot a\cdot y+y^2$$

*O resultado acima atende a alternativa **D** da questão.*

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

$A_{ABCD} = 16 \cdot a^2 + 4 \cdot a \cdot y$.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno determinou corretamente as medidas dos lados do quadrado maior, porém indicou como resposta a área do retângulo HECD, e também não verificou que o polinômio indicado na alternativa não é um trinômio.

(B)

$A_{ABCD} = 4 \cdot a \cdot y + y^2$.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno determinou corretamente as medidas dos lados do quadrado maior, porém indicou como resposta a área dos retângulos ABEH ou GBCI, e também não verificou que o polinômio indicado na alternativa não é um trinômio.

(C)

$A_{ABCD} = 16 \cdot a + 4 \cdot y$.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno determinou corretamente as medidas dos lados do quadrado maior, porém indicou como resposta o perímetro do quadrado maior, e também não verificou que o polinômio indicado na alternativa não é um trinômio.

(D)

$\mathbf{A_{ABCD} = 16 \cdot a^2 + 8ay + y^2}$.	**Resposta incorreta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

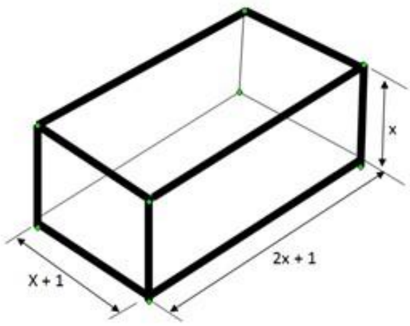
(E)

$A_{ABCD} = 4 \cdot a^2 + 4 \cdot a + y$.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno utilizou as medidas dos lados do quadrado maior (4a) e do retângulo (y), e considerou equivocadamente suas respectivas áreas que no trinômio.

Habilidade	Resolver problemas que envolvam a soma, subtração e multiplicação de polinômios.
MP07	

Questão 6

Um engenheiro foi contratado para construir um tanque de concreto para mistura de argila e água em uma indústria de cerâmica. Para isso, ele definiu as medidas internas do tanque como x, (x + 1) e (2x +1), conforme a figura. Dessa forma poderia atender diversas demandas de volume e de espaço físico para construção.



Nessas condições, a equação que fornece o valor de x para um volume de 30 m^3 é

(A) $2x^2 + x + 2x + 1 = 30$

(B) $2x^3 + 3x^2 + x - 30 = 0$

(C) $3x^3 + 4x + 2 = 0$

(D) $x^3 + x^2 + x = 30$

(E) $x^3 + 2x^2 + x - 30 = 0$

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo da questão é avaliar a habilidade do aluno quanto as operações com polinômios.

Solução:

$$(x + 1) \cdot (2x + 1) \cdot x = 30$$

$$(2x^2 + x + 2x + 1) \cdot x = 30$$

$$2x^3 + x^2 + 2x^2 + x - 30 = 0$$

$$\mathbf{2x^3 + 3x^2 + x - 30 = 0}$$

Portanto, a resposta correta, é a alternativa ***B.***

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

$2x^2 + x + 2x + 1 = 30$	**Resposta incorreta.**	Para a escolha desta resposta o aluno equivocadamente multiplicou apenas os binômios (x + 1)· (2x + 1).

(B)

$\mathbf{2x^3 + 3x^2 + x - 30 = 0}$	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(C)

$3x^3 + 4x + 2 = 0$	**Resposta incorreta.**	Ao optar por esta resposta, provavelmente o aluno considerou as somas dos termos referentes à x no desenvolvimento do polinômio.

(D)

$x^3 + x^2 + x = 30$	**Resposta incorreta.**	A escolha desta resposta, provavelmente tenha sido aleatória, visto que, não considera os coeficientes dos termos no polinômio.

(E)

$x^3 + 2x^2 + x - 30 = 0$	**Resposta incorreta.**	*Ao optar por esta resposta, provavelmente o aluno não adicionou o termo referente à x^2 no desenvolvimento do polinômio.* $2x^3 + x^2 + 2x^2 + x - 30 = 0$

Habilidade MP08	Resolver problemas que envolvam a divisão entre um polinômio e um binômio (x – k).

Questão 7

O resto da divisão do polinômio $(x^5 - 3x^2 + 2x + 6)$ pelo binômio $(x + 1)$ é

(A) 2.

(B) 6.

(C) 0.

(D) –1.

(E) –2.

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo da questão é verificar a habilidade de divisão entre polinômios. Aqui sugerimos o cálculo utilizando técnicas alternativas, a partir da abordagem qualitativa das equações algébricas.

Solução:

Dado o polinômio: $x^5 - 3x^2 + 2x + 6$

Para não efetuar a divisão, vamos utilizar o teorema do resto.

Como, $x = -1$ *é a raiz do binômio* $(x + 1)$*, temos o valor numérico:*

$$P(-1) = (-1)^5 - 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 6$$

$$P(-1) = -1 - 3 - 2 + 6$$

$$P(-1) = -6 + 6$$

$$P(-1) = 0$$

Logo, o resto da divisão é 0 (zero), alternativa ***C***.

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

2.	**Resposta incorreta.**	Um possível equívoco do aluno no cálculo de: $P(-1) = (-1)^5 -3(-1)^2 +2(1) + 6 = –5 + 3 – 2 + 6 = 2$

(B)

6.	**Resposta incorreta.**	Para escolher esta resposta, o aluno provavelmente calculou: $P(1) = 1^5 – 3·1^2 + 6 = 6$

(C)

0.	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão. Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(D)

–1.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente, o aluno equivocadamente considera a raiz, −1, do binômio (x + 1) como resposta.

(E)

–2.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente, o aluno escolhe aleatoriamente, −2, como resposta à questão.

Habilidade	Resolver problemas que envolvam a divisão entre um polinômio e um binômio $(x - k)$.
MP08	

Questão 8

A divisão do polinômio $p(x) = x^5 - 2x^4 - x + m$ por $q(x) = x - 1$ é exata. O valor de m é

(A) –2.

(B) –1.

(C) 0.

(D) 1.

(E) 2.

O objetivo da questão é verificar a habilidade de cálculo utilizando a divisão entre polinômios. Como sugestão apresentamos o Teorema do Resto, ou Teorema de D'Alembert, cujo enunciado é:

"Um polinômio P(x) é divisível por (x − a) se e somente se P(a) = 0"

Resolução:

De acordo com os dados da questão, temos que p(x) é divisível por q(x), pois a divisão é exata, então de acordo com o teorema do resto, temos que:

$$\begin{cases} P(1) = (1)^5 - 2\cdot(1)^2 - 1 + m \\ P(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 - 2 - 1 + m = 0 \Rightarrow m = 2$$

GRADE DE CORREÇÃO

(A)		
–2.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno aplicou corretamente o teorema do resto, porém não completou a resolução da equação que determina o valor de m.
(B)		
–1.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não compreendeu o enunciado do problema, ou não soube associar o solicitado com algum conhecimento matemático para resolvê-la e indicou esta resposta aleatoriamente.
(C)		
0.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno apenas associou o fato de que se os polinômios p(x) e q(x) são divisíveis, então o resto da divisão é zero.
(D)		
1.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não compreendeu o enunciado do problema, ou não soube associar o solicitado com algum conhecimento matemático para resolvê-la e indicou esta resposta aleatoriamente.
(E)		
2.	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

Habilidade MP09	Calcular a divisão de polinômios por meio da utilização de algoritmos.

Questão 9

O quociente e o resto da divisão do polinômio $P(x) = x^3 + 2x + 1$ por $(x+2)$ são, respectivamente

(A) $x^2 - 2x + 6$ e -11

(B) $-2x + 6$ e -11

(C) $x^2 - 2x$ e -13

(D) $x^2 - 2x + 6$ e 11

(E) $x^3 + 3x$ e 3

O resto será o valor de P(−2), ou seja:

$R = (-2)^3 + 2 \cdot (-2) + 1 = -8 - 4 + 1 = -11$

O cálculo quociente da divisão pode ser encontrado por meio do algoritmo de Briot–Ruffini:

	Coeficientes de P(x)			
	1	0	2	1
Raiz −2		−2 . 1	−2 . (−2)	−2 . 6
	1	−2	6	-11
	Coeficientes de Q(x)			**Resto**

Portanto o quociente da divisão de P(x) por (x+2) será: $x^2 - 2x + 6$

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

$x^2 - 2x + 6$ e -11	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão. Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(B)

$-2x + 6$ e -11	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno aplicou corretamente os conceitos necessários para a resolução do problema, porém cometeu alguns erros quando da operacionalização numérica na questão.

(C)

$x^2 - 2x$ e -13	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno aplicou corretamente os conceitos necessários para a resolução do problema, porém cometeu alguns erros quando da operacionalização numérica na questão.

(D)

$x^2 - 2x + 6$ e 11	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno aplicou corretamente os conceitos necessários para a resolução do problema, porém cometeu alguns erros quando da operacionalização numérica na questão.

(E)

$x^3 + 3x$ e 3	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno considerou como resposta a soma dos coeficientes de x e dos termos independentes dos binômios.

Habilidade MP09	Calcular a divisão de polinômios por meio da utilização de algoritmos.

Questão 10

Utilizando o dispositivo prático de Briot-Ruffini, a divisão do polinômio $P(x) = 2x^4 + 4x^3 - 7x^2 + 12$ por $D(x) = (x - 1)$ tem quociente igual a

(A) $Q(x) = 2x^3 + 6x^2 - x - 1$

(B) $Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

(C) $Q(x) = 2x^2 + 6x^3 - x - 1$

(D) $Q(x) = -2x^2 + 6x^3 - x - 1$

(E) $Q(x) = -2x^3 + 6x^3 - x + 11$

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo da questão é verificar se o aluno compreendeu a utilização do dispositivo prático de Briot-Ruffini.

Ao aplica-lo o aluno deverá chegar ao seguinte resultado:

Resolução:

1	2	4	–7	0	12
	2	6	–1	–1	11

Assim temos:

$Q(x) = 2x^3 + 6x^2 - x - 1$ e $R(x) = 11$

Grade de Correção

(A)

$Q(x) = 2x^3 + 6x^2 - x - 1$	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão. Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(B)

$Q(x) = x^3 + x^2 - x - 1$	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno conseguiu identificar os procedimentos para a utilização do dispositivo prático, porém não realizou corretamente as operações indicadas.

(C)

$Q(x) = 2x^2 + 6x^3 - x - 1$	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno conseguiu identificar os procedimentos para a utilização do dispositivo prático, porém não realizou corretamente as operações indicadas.

(D)

$Q(x) = -2x^2 + 6x^3 - x - 1$	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno conseguiu identificar os procedimentos para a utilização do dispositivo prático, porém não realizou corretamente as operações indicadas.

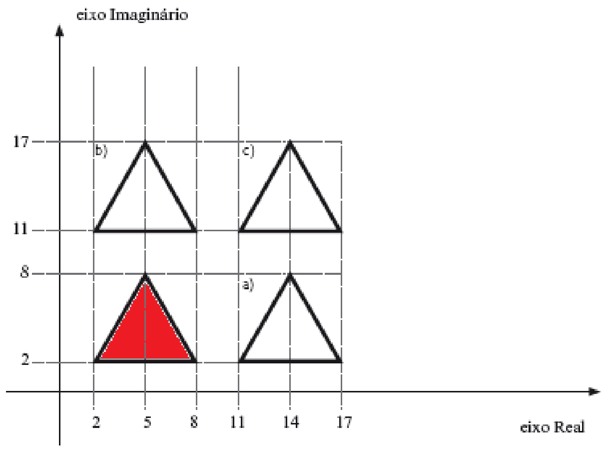
(E)

$Q(x) = -2x^3 + 6x^3 - x + 1$	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não conseguiu identificar os procedimentos para a utilização do dispositivo prático, e realizou incorretamente as operações indicadas.

Habilidade MP11	Resolver operações com números complexos associados a transformações no plano.

Questão 11

Considere a região do plano complexo indicado a seguir. Cada ponto da região é a imagem de um complexo e foi objeto de uma transformação da figura pintada em vermelho nas figuras a, b e c.



Pode-se afirmar que a representação c) é o resultado

(A) da soma com o número complexo 9 + 9i.

(B) do produto pelo número imaginário 2i.

(C) da soma ao número complexo 9i.

(D) do produto pelo número real 2.

(E) da subtração das coordenadas.

Correção Comentada

O objetivo desta questão é verificar se o aluno desenvolveu a habilidade de realizar transformações no plano, referentes a operações com números complexos.

Na questão, a região triangular hachurada para atingir a posição indicada em C será deslocada para a direita de 9 unidades, em seguida, para cima, de 9 unidades, e depois para a direita de 9 unidades, que corresponde ao complexo: 9 + 9i.

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

da soma com o número complexo 9 + 9i.	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão. Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(B)

do produto pelo número imaginário 2i.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não compreendeu as noções de translações no plano, pois neste caso a região triangular haveria que ser ampliada duas vezes e também rotacionada de 90º.

(C)

da soma ao número complexo 9i.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno tenha se confundido na realização das translações, pois neste caso essa transformação refere-se à figura b).

(D)

do produto pelo número real 2.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não compreendeu as noções de translações no plano, pois neste caso a região triangular haveria que ser ampliada por 2, e nas figuras apresentadas não existem regiões triangulares ampliadas.

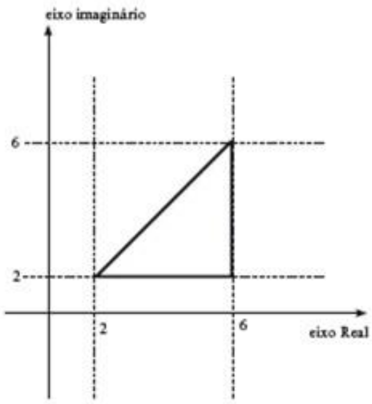
(E)

da subtração das coordenadas.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não compreendeu as noções de translações no plano da região triangular e escolheu aleatoriamente a resposta.

Habilidade MP11	Resolver operações com números complexos associados a transformações no plano.

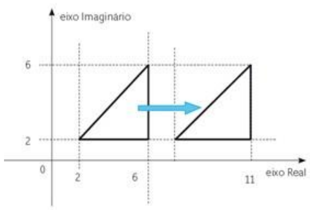
Questão 12

Considere a região do plano complexo indicada na figura a seguir

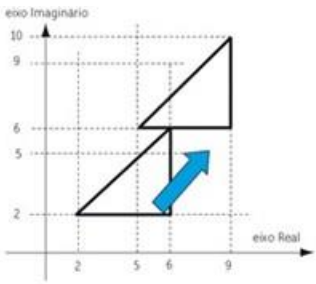


Cada ponto da região é a imagem de um complexo e será objeto de uma transformação somado a 3i, que será representado graficamente por:

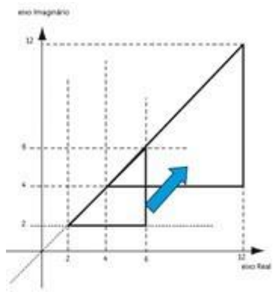
(A)



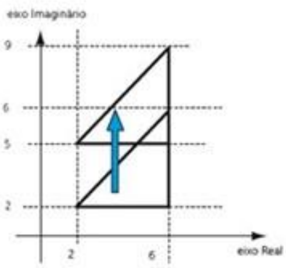
(B)



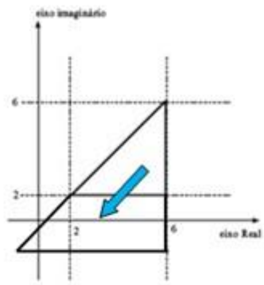
(C)



(D)



(E)



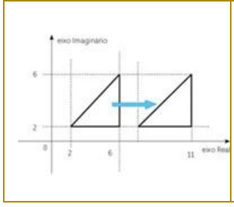
CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo desta questão é verificar se o aluno desenvolveu a habilidade de realizar transformações no plano, referentes a operações com números complexos.

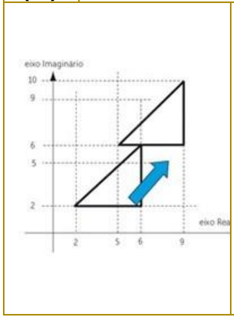
Na questão, cada ponto da região será deslocado na direção do eixo imaginário de 3 unidades, a região transformada será um triângulo de vértices nas imagens dos complexos: 2 + 5i, 6 + 5i e 6 + 9i, portanto, a alternativa D expressa tal translação.

Grade de Correção

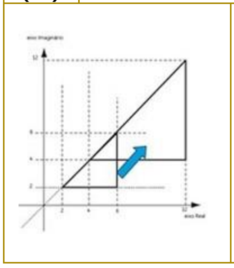
(A)

	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno tenha se confundido na realização das translações, pois neste caso, cada ponto da região será deslocado na direção do eixo real de 5 unidades, a região transformada será um triângulo de vértices nas imagens dos complexos 7 + 2i, 11 + 2i e 11 + 6i.

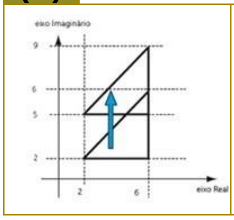
(B)

	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno tenha se confundido na realização das translações, pois neste caso cada ponto da região será deslocado na direção do eixo real de 3 unidades, seguido de outro na direção do eixo imaginário de 4 unidades (ou vice-versa). Cada ponto terá um deslocamento total de valor igual ao módulo do complexo 3 + 4i, que é 5. Os vértices da região transformada serão os seguintes: 5 + 6i, 9 + 6i e 9 + 10i.

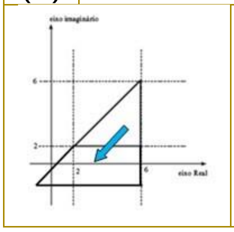
(C)

	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno tenha se confundido na realização das translações, pois neste caso cada ponto da região terá seu módulo multiplicado por 2; logo, a região será ampliada, tendo cada segmento multiplicado por 2, e sua área multiplicada por 4. Como as distâncias de cada ponto até a origem serão multiplicados por 2, haverá uma translação (afastamento da origem) com a ampliação.

(D)

	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(E)

	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não tenha compreendido translações, no plano de Argand-Gauss e neste caso, escolhe aleatoriamente a resposta.

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional
Coordenadora: Cyntia Lemes da Silva Gonçalves da Fonseca

Departamento de Avaliação Educacional
Diretora: Patricia de Barros Monteiro
Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Planejamento e Análise de Avaliações
Diretor: Juvenal de Gouveia

Ademilde Ferreira de Souza, Cristiane Dias Mirisola, Soraia Calderoni Statonato

Centro de Aplicação de Avaliações
Diretora: Isabelle Regina de Amorim Mesquita

Denis Delgado dos Santos, José Guilherme Brauner Filho, Kamila Lopes Candido, Lilian Sakai, Manoel de Castro Pereira, Nilson Luiz da Costa Paes, Teresa Miyoko Souza Vilela

Coordenadoria de Gestão da Educação Básica
Coordenadora: Valéria de Souza

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão da Educação Básica
Diretora: Regina Aparecida Resek Santiago

Centro do Ensino Fundamental dos Anos Finais, do Ensino Médio e da Educação Profissional - CEFAF
Diretor: Herbert Gomes da Silva

Equipe Curricular CGEB de Matemática
Autoria, Leitura crítica e validação do material
Adriana Santos Morgado, João dos Santos Vitalino, Otávio Yoshio Yamanaka e Vanderley Aparecido Cornatione.

Professores Coordenadores dos Núcleos Pedagógicos das Diretorias de Ensino
Leitura crítica e validação do material de Matemática
Cristina Aparecida da Silva, Leandro Geronazzo, Lúcio Mauro Carnaúba, Marcelo Balduino Silva, Márcia Cristine Ayaco Yassuhara Kagaochi, Maria Denes Tavares Sa Silva, Mario José Pagotto, Nilton Celso Mourão, Rebeca Meirelles das Chagas, Rosana Jorge Monteiro Magni, Rosemeire Lepinski e Sheila Cristina Aparecida Lima Camargo.