

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

COMENTÁRIOS E RECOMENDAÇÕES PEDAGÓGICAS

Subsídios para o Professor de Matemática

3ª série do Ensino Médio

Prova de Matemática

São Paulo 1º Semestre de 2014

6ª Edição

28_AAP_RPM_3 EM_professor.indd 1 12/18/13 5:52 PM

Avaliação da Aprendizagem em Processo

APRESENTAÇÃO

A Avaliação da Aprendizagem em Processo se caracteriza como ação desenvolvida de modo colaborativo entre a Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional e a Coordenadoria de Gestão da Educação Básica, que também contou com a contribuição de Professores do Núcleo Pedagógico de diferentes Diretorias de Ensino.

Aplicada desde 2011, abrangeu inicialmente o 6º ano do Ensino Fundamental e a 1ª série do Ensino Médio. Gradativamente foi expandida para os demais anos/séries (do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e 1ª a 3ª série do Ensino Médio) com aplicação no início de cada semestre do ano letivo.

Essa ação, fundamentada no Currículo do Estado de São Paulo, tem como objetivo fornecer indicadores qualitativos do processo de aprendizagem do educando, a partir de habilidades prescritas no Currículo. Dialoga com as habilidades contidas no SARESP, SAEB, ENEM e tem se mostrado bem avaliada pelos educadores da rede estadual. Propõe o acompanhamento da aprendizagem das turmas e do aluno de forma individualizada, por meio de um instrumento de caráter diagnóstico. Objetiva apoiar e subsidiar os professores de Língua Portuguesa e de Matemática que atuam nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio da Rede Estadual de São Paulo, na elaboração de estratégias para reverter desempenhos insatisfatórios, inclusive em processos de recuperação.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação, na forma de cadernos de provas para os alunos, também foram elaborados documentos específicos de orientação para os professores – Comentários e Recomendações Pedagógicas – contendo o quadro de habilidades, gabaritos, itens, interpretação pedagógica das alternativas, sugestões de atividades subsequentes às análises dos resultados e orientação para aplicação e correção das produções textuais. Espera-se que, agregados aos registros que o professor já possui, sejam instrumentos para a definição de pautas individuais e coletivas que, organizadas em um plano de ação, mobilizem procedimentos, atitudes e conceitos necessários para as atividades de sala de aula, sobretudo, aquelas relacionadas aos processos de recuperação da aprendizagem.

COORDENADORIA DE INFORMAÇÃO, MONITORAMENTO E AVALIAÇÃO EDUCACIONAL COORDENADORIA DE GESTÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Avaliação da Aprendizagem em Processo - Matemática

Nos dois segmentos (Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio) avaliados, as questões foram idealizadas de modo a atender habilidades já desenvolvidas em períodos anteriores, seja no ano, ou no semestre letivo. Particularmente no 6º ano (5ª série) do EF foram utilizadas as expectativas de aprendizagens contidas na grade do 5º ano (4ª série) do EF.

As questões apresentadas retratam uma parte significativa do que foi previsto no conteúdo curricular de Matemática e poderão permitir a verificação de algumas habilidades que foram ou não desenvolvidas no processo de ensino e aprendizagem.

Composição:

- Anos/séries participantes:
 6º ao 9º anos do Ensino Fundamental;
 1ª a 3ª séries do Ensino Médio.
- Composição das provas de Matemática:
 10 questões objetivas e algumas dissertativas.
- 3. Matrizes de referência (habilidades/descritores) para a constituição de itens das provas objetivas:
 - Currículo do Estado de São Paulo.
- 4. Banco de questões:
 - Questões inéditas e adaptadas, formalizadas a partir das habilidades prescritas no Currículo.

EOUIPE DE MATEMÁTICA

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA 3ª SÉRIE - ENSINO MÉDIO

N° do item	Habilidades
1	Compreender os raciocínios combinatórios aditivo e multiplicativo na resolução de situações problema de contagem indireta do número de possibilidades de ocorrência de um evento.
2	Saber resolver equações e inequações trigonométricas simples, compreendendo o significado das soluções obtidas, em diferentes contextos.
3	Saber resolver e discutir sistemas de equações lineares pelo escalonamento de matrizes.
4	Saber construir o gráfico de funções trigonométricas como $f(x)=a$. sen $(bx)+c$, a partir do gráfico de $y=$ sen (x) , compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes a , b e c .
5	Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-os em diferentes contextos.
6	Compreender o significado das matrizes e das operações entre elas na representação de tabelas e de transformações geométricas do plano.
7	Saber calcular probabilidades de eventos em diferentes situações problema, recorrendo a raciocínios combinatórios gerais, sem a necessidade de aplicação de fórmulas especiais.
8	Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como a pirâmide e o cone, utilizando-os em diferentes contextos
9	Conhecer e saber utilizar as propriedades simples do binômio de Newton e do triângulo de Pascal.
10	Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-os em diferentes contextos.
11	Saber construir o gráfico de funções trigonométricas como $f(x) = a$. sen $(bx) + c$, a partir do gráfico de $y = sen(x)$, compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes a, b e c.
12	Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) da esfera e de suas partes utilizando-os em diferentes contextos.

⁴ **Comentários e Recomendações Pedagógicas** / Avaliação de Matemática – 3ª série do Ensino Médio

28_AAP_RPM_3 EM_professor.indd 4 12/18/13 5:52 PM

Compreender os raciocínios combinatórios aditivo e multiplicativo na resolução de situações problema de contagem indireta do número de possibilidades de ocorrência de um evento.

Questão 01 - Teste

O campeonato de futebol do bairro tem 4 times e é realizado em turno único, no qual todos jogam contra todos. Este campeonato terá

- (A) 4 jogos.
- (B) 6 jogos.
- (C) 12 jogos.
- (D) 24 jogos.

Comentários e recomendações pedagógicas

O trabalho com os princípios básicos de contagem, sobretudo o multiplicativo, deve ser iniciado no ensino fundamental, por meio de problemas simples onde esquemas e árvores de possibilidades podem ser utilizados. Os problemas de contagem devem possibilitar que o raciocínio combinatório seja desenvolvido e não devem apenas reforçar procedimentos sem significado. O foco do trabalho deve ser na resolução de problemas e não na aplicação de fórmulas.

O problema proposto está num contexto familiar para a maioria dos alunos e pode ser resolvido com contagem simples, listando todas as possibilidades. O uso de fórmulas pode ser um complicador nesse caso. Para encontrar a solução basta listar os pares dos times A, B, C e D:

observando que, nesse caso, os pares (A, B) e (B, A) representam o mesmo elemento, que é um jogo. O professor pode explorar esta questão aumentando o número de times do campeonato.

Grade de correção

Alternativa	Interpretação	
(A) 4 jogos.	Resposta incorreta. O aluno pode deduzir que com 4 times haverá 4 jogos.	
(B) 6 jogos.	Resposta correta. O aluno consegue resolver problemas simples de contagem.	

(C)12 jogos.	Resposta incorreta. O aluno pode chegar na resposta 12 por ter contado duas vezes cada par de times. Um erro comum é não perceber que nesse contexto o par (A,B) representa o mesmo que (B,A), ou seja, um jogo do campeonato.
(D) 24 jogos.	Resposta incorreta. O aluno pode ter feito a permutação dos 4 times, obtendo 4.3.2.1=24. Isso pode revelar que não compreendeu o problema ou "chutou" a resposta, raciocinando que o campeonato deve ter muitos jogos.

Algumas referências

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado, observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

- Caderno do Professor: Matemática Ensino Médio 2ª série, Volume 3, SEE-SP.
- Cerri, C., Druck, I. F., *Combinatória sem Fórmulas*, Módulo 3, pp 13-23, PEC-Construindo Sempre, CENP/SEE-SP USP, São Paulo, 2002.
- Experiências Matemáticas: 8^a série, SE/CENP, São Paulo, 1996.
- Lima, E., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C., *A Matemática do Ensino Médio* volume 2, 3ª ed., SBM, Rio de Janeiro, 2000.

Habilidade:

Saber resolver equações e inequações trigonométricas simples, compreendendo o significado das soluções obtidas, em diferentes contextos.

Questão 02 – Teste

Uma das soluções da equação $2\cos(x) = 1$ é

(A)
$$-\frac{\pi}{3}$$

(B)
$$-\frac{\pi}{4}$$

(C) 0

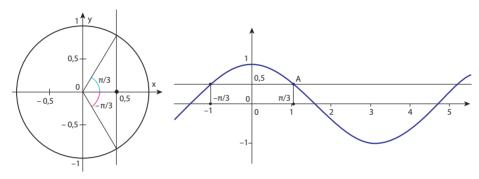
(D)
$$\frac{\pi}{6}$$

Comentários e recomendações pedagógicas

A questão proposta procura averiguar se o aluno consegue determinar uma medida de arco em radiano para o qual o cosseno é igual a 1/2. Questões desse tipo podem também ser trabalhadas em contextos que envolvem modelos de fenômenos periódicos.

Para ampliar o significado de equações e inequações trigonométricas pode-se trabalhar de forma articulada o círculo trigonométrico e os gráficos das funções trigonométricas. Por exemplo, na questão proposta é esperado que o aluno reconheça, dentre os valores das alternativas, aquele cujo cosseno é 1/2. Não encontrando $\pi/3$, deverá observar que $-\pi/3$ também é solução.

Pode-se representar a solução tanto no círculo trigonométrico, como no gráfico da função $f(x) = \cos(x)$, localizando as pré-imagens de 1/2. O fato de existirem infinitas soluções para a equação fica mais evidente quando se utiliza o gráfico da função.



Grade de correção

Alternativa	Interpretação
$(A) - \frac{\pi}{3}$	Resposta Correta. O aluno reconhece que cosseno de $-\pi/3$ é igual ao cosseno de $\pi/3$ e que vale 1/2. É também válido se o aluno trabalha com medidas em graus, geralmente mais familiar.
(B) $-\frac{\pi}{4}$	Resposta incorreta. O aluno não reconhece cosseno e seno de ângulos notáveis. Nesse caso, o professor deve procurar trabalhar situações de aprendizagem onde é necessário manipular senos e cossenos de vários ângulos.
(C) 0	Resposta incorreta. O aluno pode ter apenas considerado o ângulo cujo cosseno é 1, não manipulando corretamente a equação.
(D) $-\frac{\pi}{6}$	Resposta incorreta. Um dos erros mais comuns é o de achar que o ângulo que tem cosseno igual a 1/2 é π /6. O aluno pode ainda não dominar a medida em radiano e ter feito a conversão errada, trocando π /3 por π /6. O professor deve procurar identificar o tipo de erro e trabalhar com várias representações, fazendo uso do círculo principalmente do trigonométrico.

Algumas referências

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado, observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

- Barufi, M. C.B., Lauro M. M., *Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando o microcomputador,* CAEM-IME-USP, São Paulo, 2000.
- Carmo M, Morgado A., Wagner E., *Trigonometria e números complexos*, Coleção do Professor de Matemática SBM, Rio de Janeiro, 1992.
- Caderno do Professor: Matemática Ensino Médio 2ª série, Volume 1, SEE-SP.
- http://ecalculo.if.usp.br

Habilidade:

Saber resolver e discutir sistemas de equações lineares pelo escalonamento de matrizes.

Questão 03 - Teste

Uma papelaria recebeu um lote especial de cadernos, canetas e lapiseiras e fez a seguinte promoção:

Kit	Preço
Kit 1: 1 Caderno + 1 Caneta	R\$ 15,00
Kit 2: 1 Caderno + 1 Lapiseira	R\$ 13,00
Kit 3: 1 Caneta + 1 Lapiseira	R\$ 12,00

Mantendo os mesmos preços da promoção, um novo Kit com 1 caderno, 1 lapiseira e 1 caneta deverá custar

- (A) R\$ 40,00.
- (B) R\$ 28,00.
- (C) R\$ 20,00.
- (D) R\$ 16,00.

Comentários e recomendações pedagógicas

Uma habilidade importante que deve ser desenvolvida nos alunos é a de fazer a transposição para a linguagem algébrica de um problema. Na questão proposta se o aluno escrever os dados do problema em linguagem algébrica

irá perceber que há três incógnitas (valores a descobrir) que representam os preços do caderno, da caneta e da lapiseira. Assim pode surgir um sistema de três equações e três incógnitas.

$$\begin{cases} y+z=15\\ x+z=13\\ x+y=12 \end{cases}$$

O aluno poderá resolvê-lo de diversas formas, obtendo os valores x = 5, y = 7 e z = 8. Contudo, como o que é pedido é a soma x+y+z, que representa o preço do novo Kit, ele poderá encontrar a solução fazendo a soma total:

$$(y+z) + (x+z) + (x+y) = 15 + 13 + 12 = 40$$

donde

$$2(x + y + z) = 40$$

Portanto, x + y + z = 20.

Grade de correção

Alternativa	Interpretação	
(A) R\$ 40,00	Resposta incorreta. O aluno pode ter chegado nessa resposta somando todos os valores dos kits	
(B) R\$ 28,00	Resposta incorreta. O aluno pode ter chegado nessa resposta somando todos os valores dos dois primeiros kits, onde aparece o caderno.	
(C) R\$ 20,00	Resposta correta. O aluno domina. Consegue transpor o problema para linguagem algébrica e resolver corretamente.	
(D) R\$ 18,00	Resposta incorreta. O aluno pode ter chegado nessa res- posta considerando que o valor de um kit com os três obje- tos deve ser maior que o valor de cada um dos kits.	

Algumas referências

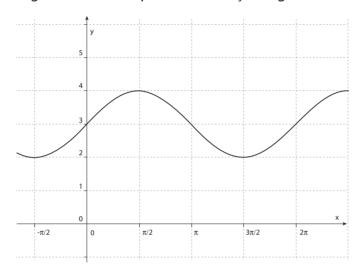
O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado, observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

- Caderno do Professor: Matemática Ensino Médio 2ª série, Volume 2, SEE-SP.
- Lima, E. *Sobre o ensino de sistemas lineares*, Revista do Professor de Matemática nº 23 SBM, Rio de Janeiro, 1993.
- Lima, E., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C., *A Matemática do Ensino Médio* volume 3, 6^a. ed., SBM, Rio de Janeiro, 2006.

Saber construir o gráfico de funções trigonométricas como f(x) = a. sen(bx) + c, a partir do gráfico de y = sen(x), compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes a, b e c.

Questão 04 - Teste

O gráfico abaixo representa a função trigonométrica:



$$(A) f(x) = 3 + sen(x)$$

(B)
$$f(x) = 3 - \text{sen}(x)$$

(C)
$$f(x) = 3 \operatorname{sen}(x)$$

(D)
$$f(x) = 3 sen(x) + 1$$

Comentários e recomendações pedagógicas

É importante que o aluno reconheça as principais características das funções y = sen(x) e $y = \cos(x)$ para poder compreender o significado de transformações sofridas pelos seus gráficos com inclusão de constantes, identificando, assim, gráficos de funções do tipo

$$y = a \operatorname{sen}(bx) + c \operatorname{ou} y = a \operatorname{cos}(bx) + c.$$

O uso de programas (softwares) gráficos facilita muito o trabalho com funções, agregando significado a cada transformação.

A questão trata de enfatizar a determinação da expressão de uma função a partir de seu gráfico. É comum que se dê muita ênfase para a representação gráfica de uma função a partir de sua expressão. Para que o aluno tenha compreensão e apreensão de um conceito é importante que as várias representações do objeto matemático sejam tratadas. Segundo o pesquisador francês Raymond Duval, é somente ao transitar entre os diferentes tipos de representações que se torna

possível apreender um conceito. Conforme Duval, "as representações não só são necessárias para fins de comunicação, mas são igualmente essenciais para a atividade cognitiva do pensamento." Assim ele defende uma abordagem que trabalhe com diversos registros de representação e principalmente que estimule a conversão nos dois sentidos. No caso do conceito de função deve-se trabalhar as representações algébrica, gráfica, em tabela e em linguagem natural, pois cada tipo de representação é mais adequado para um determinado tipo de procedimento ou evidencia características diferentes.

Grade de correção

Alternativa	Interpretação
(A) $f(x) = 3 + \text{sen}(x)$	Resposta correta. O aluno reconhece que houve um deslocamento vertical no gráfico da função seno de 3 unidades e que as características da função seno estão presentes.
(B) $f(x) = 3 - \text{sen}(x)$	Resposta incorreta. O aluno pode ter percebido que na função $f(0) = 3$ e apenas com esta análise ter escolhido este item. Note que este item deve ser descartado, pois $f(\pi/2) = 2$, que não corresponde ao valor da função que está representada no gráfico.
(C) $f(x) = 3.sen(x)$	Resposta incorreta. O aluno pode ter escolhido esta alternativa por ter apenas observado que a função representada corta o eixo y no ponto 3 e então achar que houve a multiplicação por 3. Nesse caso é recomendável que o professor retome o assunto com atividade onde o aluno deve identificar principais elementos de gráficos de funções, como as intersecções nos eixos x e y e alguns pontos especiais.
(D) $f(x) = 1 + 3 \operatorname{sen}(x)$	Resposta incorreta. Como no caso anterior, é reco- mendável que o professor trabalhe os principais elementos de gráficos de funções.

Algumas referências

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado, observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

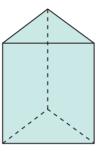
- Barufi, M. C.B., Lauro M. M., Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando o microcomputador, CAEM-IME-USP, São Paulo, 2000.
- Cerri, C, Monteiro, M. S.(2002) *Funções como Instrumento de Modelagem*, Módulo 1, PEC-Construindo Sempre, CENP/SEE-SP USP, São Paulo, 2002.
- Caderno do Professor: Matemática Ensino Médio 2ª série, Volume 1, SEE-SP.
- http://ecalculo.if.usp.br

Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-os em diferentes contextos.

Questão 05 – Aberta

Deseja-se construir uma embalagem no formato de um prisma reto com 10 cm de altura e 120 cm³ de volume. Sua base é um triângulo isósceles de base 6 cm.

Sabendo que a embalagem não terá tampa, mas terá fundo, calcule sua área total, mostrando todos os cálculos efetuados.

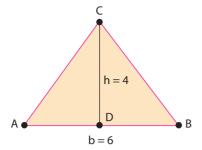


Comentários e recomendações pedagógicas

Para que o trabalho com geometria espacial seja efetivo, os alunos devem ser expostos a uma grande variedade de situações desde o início do ensino fundamental. O contato com as formas geométricas e suas propriedades deve ser iniciado nos primeiros anos de escolaridade e sempre retomado, com diferentes graus de dificuldade. Percebe-se que pela falta de familiaridade com geometria espacial as fórmulas de áreas e volumes de sólidos não são compreendidas e apenas decoradas. O desenvolvimento da geometria espacial métrica fará mais sentido e será mais efetivo após uma retomada das características e propriedades dos sólidos e das figuras planas. Nesse sentido, é interessante propor situações de aprendizagem onde os alunos possam manipular os sólidos e assim fazer conjecturas e descobrir relações. Atualmente, há vários recursos computacionais, como por exemplo, softwares de Geometria Dinâmica, que auxiliam o ensino e a aprendizagem desses temas.

Grade de correção

Para resolver o problema o aluno deve articular vários conhecimentos de geometria. Primeiramente com a altura e o volume se obtém a área da base que é 12. Com esse dado deve-se obter as medidas dos lados do triângulo. Como o triângulo é isósceles e tem base de medida 6, sua área é dada por 6 . h/2 = 12, logo h = 4



É preciso descobrir a medida dos outros dois lados, que são iguais. Usando o Teorema de Pitágoras tem-se que BC = AC = 5. O prisma terá duas faces retangulares de área $5 \cdot 10 = 50$ cada uma, e uma de área 60. Como a caixa é aberta, ela tem uma base triangular de área 12. Portanto a área total do prisma é 172.

O professor deve estar atento à forma de resolução do problema e não apenas a resposta, para tentar identificar qual a dificuldade do aluno. O aluno pode ter identificado o que deve fazer e assim ter procurado calcular a área das faces. Ele pode ter usado que cada lado do triângulo da base mede 6 e assim obtido 3.6.10 = 180 como sendo a soma das áreas das faces retangulares. Isso pode indicar que ele confunde triângulo isósceles com equilátero.

Ao procurar obter a área da face triangular, o aluno terá que usar a informação do volume do prisma. Assim ele poderá chegar à resposta 180 + 12 = 192. Nesse caso o aluno revela que sabe como se obtém o volume de um prima, habilidade que se pretende avaliar. Essa é uma situação muito favorável, onde apenas uma discussão sobre o que caracteriza um triângulo equilátero deve ser feita.

Como foi pedido o cálculo da área total do prisma, o aluno pode ter percebido que precisa encontrar a altura do triângulo, já que a sua área é (base. altura)/2. Contudo pode não aplicar corretamente o Teorema de Pitágoras.

Convém observar que o aluno pode não reconhecer a base como face e obter como área total o valor 160, que deve ser considerado.

Algumas referências

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado, observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

- Caderno do Professor: Matemática Ensino Médio 2ª série, Volume 4, SEE-SP.
- Lima, E., Carvalho, P.C.P., Wagner, E., Morgado, A.C., *A Matemática do Ensino Médio* volume 2, 3ª ed., SBM, Rio de Janeiro, 2000.

Comentários e Recomendações Pedagógicas / Avaliação de Matemática – 3ª série do Ensino Médio

13

Compreender o significado das matrizes e das operações entre elas na representação de tabelas e de transformações geométricas do plano.

Questão 06 - Teste

Uma matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, pode ser interpretada como uma transformação de pontos do plano. Um ponto de coordenadas (x,y) pode ser representado pela matriz $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, e assim o produto $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ representará outro ponto do plano. O produto da matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ pelo par ordenado (2,5) é o par ordenado (3,5) (3,5)

- (A) (-5, -2)
- (B) (-5, 2)
- (C)(-2,5)
- (D)(5, -2)

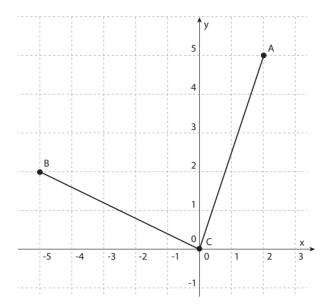
Comentários e recomendações pedagógicas

Apesar da questão envolver apenas produto de matrizes, ela remete a um significado importante e útil para o desenvolvimento desse tema em sala de aula. A utilização de significado geométrico às matrizes 2x2 como transformações no plano possibilitam um melhor aprendizado das operações básicas entre matrizes e suas propriedades.

Explorando diversos exemplos, pode-se discutir propriedades do produto de matrizes de forma mais interessante e significativa. Nas atividades é interes-

sante salientar que a multiplicação de matrizes do tipo $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, bem como: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ está associada

às rotações do plano. O professor pode também mostrar ao aluno que a matriz da questão produz uma rotação de $\pi/2$ no sentido anti-horário.



Grade de correção

Alternativa	Interpretação	
(A) (-2, -5)	Resposta incorreta. O aluno pode ter efetuado o cálculo errado ou pensado em multiplicar -1 por 2 e 1 por 5.	
(B) (- 5, 2)	Resposta correta. O aluno compreendeu o enunciado e efetuou o cálculo corretamente.	
(C)(- 2,5)	Resposta incorreta. O aluno não deve ter compreendido o problema e escolheu o mesmo ponto do enunciado.	
	Resposta incorreta. O aluno pode ter efetuado o cálculo do	
(D) (5,– 2)	produto errado da forma (2,5) . $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, = (5, -2).	

Algumas referências

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado, observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

- Caderno do Professor: Matemática Ensino Médio 2ª série, Volume 2, SEE-SP
- Lima, E., Carvalho, P.C.P., Wagner, E., Morgado, A.C., *A Matemática do Ensino Médio* volume 3, 6ª ed., SBM, Rio de Janeiro, 2006.

Comentários e Recomendações Pedagógicas / Avaliação de Matemática – 3ª série do Ensino Médio

Saber calcular probabilidades de eventos em diferentes situações problema, recorrendo a raciocínios combinatórios gerais, sem a necessidade de aplicação de fórmulas especiais.

Questão 07 - Teste

Uma concessionária de automóveis da marca SC promete dar um carro novo a um cliente se este jogar um dado comum e der 6, e jogar uma moeda três vezes, e nas três vezes der coroa. Supondo o dado e a moeda não viciados, temos que a probabilidade do cliente ganhar o carro é de

- (A) Uma em 12.
- (B) Uma em 36.
- (C) Uma em 48.
- (D) Uma em 96.

Comentários e recomendações pedagógicas

Para obter a probabilidade, o aluno terá que compreender que, como os eventos são independentes, basta obter a probabilidade de cada evento e multiplicar os resultados. Assim, como a probabilidade de se obter 6 num dado é 1/6 e de se obter coroa numa moeda é 1/2, tem-se:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{48}$$

Contudo outra forma de resolver o problema é apenas pensar em quantos resultados existem. Nesse caso pode-se fazer a contagem utilizando o princípio multiplicativo:

$$6.2.2.2 = 48$$

O trabalho com probabilidade é rico e possibilita o uso de vários recursos pedagógicos. Pode-se utilizar jogos e atividades em grupo. Os contextos podem ser bem variados e próximos à realidade do aluno.

É interessante trabalhar em conjunto o cálculo de probabilidade e o combinatório, dando ênfase ao raciocínio e não às fórmulas. Por isso é muito importante que se valorize o registro do raciocínio e não apenas a resposta numérica.

Grade de correção

Alternativa	Interpretação
(A) Uma em 12.	Resposta incorreta. O aluno pode ter entendido corretamente o problema, identificando que para obter 6 no dado há uma possibilidade em 6, para obter coroa em cada moeda há uma possibilidade em 2. Porém pode ter feito 6+2+2+2=12.
(B) Uma em 36.	Reposta incorreta. O aluno pode ter entendido corretamente o problema, identificando que para obter 6 no dado há uma possibilidade em 6, para obter coroa em cada moeda há uma possibilidade em 2. Porém pode ter feito 6.(3.2) = 36.
(C) Uma em 48.	Resposta correta. O aluno entendeu o problema e obteve a probabilidade de 1/48.
(D) Uma em 96.	Resposta incorreta. O aluno pode ter assinalado essa alternativa apenas por achar que deve ser muito difícil ganhar carro, portanto as chances são apenas de 1 em 96.

Algumas referências

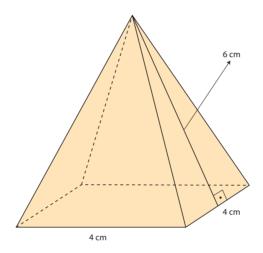
O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado, observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

- Caderno do Professor: Matemática Ensino Médio 2ª série, Volume 3, SEE-SP.
- Cordani L., Estatística para todos, CAEM-IME-USP, São Paulo, 2012.
- Lima, E., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C., *A Matemática do Ensino Médio* volume 2, 3ª ed., SBM, Rio de Janeiro, 2000.

Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como a pirâmide e o cone, utilizando-os em diferentes contextos

Questão 08 - Teste

Deseja-se colar um papel colorido em todas as faces de uma pirâmide de base quadrada, cujas dimensões estão indicadas na figura abaixo.



A área que será coberta pelo papel, em centímetros quadrados, é de

- (A) 96.
- (B) 56.
- (C) 64.
- (D) 48.

Comentários e recomendações pedagógicas

É frequente a falta de familiaridade com sólidos geométricos e suas características, que são importantes para a percepção do mundo ao redor. O trabalho com materiais concretos e recursos computacionais auxiliam o aluno a se apropriar das características das principais figuras geométricas.

O objetivo da questão é avaliar se o aluno reconhece que deve calcular a área da superfície da pirâmide e que, para isso, basta calcular a área de quatro triângulos e um quadrado. É importante que por meio de problemas desse tipo se explore as características e propriedades de poliedros, em particular das pirâmides, e seus elementos (faces, arestas e vértices). Isso remete ao estudo de polígonos e as relações métricas fundamentais. É interessante observar se a dificuldade do aluno está em entender o pro-

blema proposto, em reconhecer as faces da pirâmide ou no cálculo efetivo da área do quadrado e dos triângulos. Uma retomada do conceito de área pode ser feita utilizando materiais concretos e atividades de composição e decomposição de figuras.

Grade de correção

Alternativa	Interpretação
(A) 96.	Reposta incorreta. O aluno pode ter feito $4.4.6 = 96$, manipulando os números do problema.
(B) 56.	Reposta incorreta. O aluno pode ter calculado as áreas dos triângulos corretamente obtendo 4.12 = 48 e soma com 8, que é o perímetro da base.
(C) 64.	Resposta correta. Cada triângulo tem área 12 e a base tem área 16, portanto a área total é 4.12+16 = 64
(D) 48.	Resposta incorreta. O aluno pode ter calculado as áreas das 4 faces triangulares corretamente, mas esqueceu da face quadrada (base), obtendo apenas 4.12=48. Este erro pode evidenciar que o aluno não identifica o quadrado como uma das faces do poliedro. Contudo o aluno tem compreensão do problema, sabe que essa pirâmide tem quatro faces triangulares e obtém corretamente área de triângulos.

Algumas referências

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado, observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

- Caderno do Professor: Matemática Ensino Médio 2ª série, Volume 4, SEE-SP.
- Lima, E., Carvalho, P.C.P., Wagner, E., Morgado, A.C., *A Matemática do Ensino Médio* volume 2, 3ª ed., SBM, Rio de Janeiro, 2000.

Conhecer e saber utilizar as propriedades simples do binômio de Newton e do triângulo de Pascal.

Questão 09 - Teste

Para dois números naturais $n \in p$ com $n \ge p$, o símbolo representa o número de combinações de n elementos tomados p a p, ou seja, No triângulo de Pascal esse valores aparecem da seguinte forma:

Para dois números naturais $n \in p$ com $n \ge p$, o símbolo $\binom{n}{p}$ representa o número de combinações de n elementos tomados p a p, ou seja, $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p! (n-p)!}$. No triângulo de Pascal esses valores aparecem da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{2} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{3} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{3} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{4} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{6} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{4} \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{1} \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{5} \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{10} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{10} \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{5} \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathbf{1}$$

Então
$$\binom{6}{3} + \binom{6}{2}$$
 é igual a

(A)
$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(B)
$$\binom{6}{5}$$

(C)
$$\binom{7}{3}$$

(D)
$$\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Comentários e recomendações pedagógicas

No triângulo de Pascal a soma de dois elementos que são vizinhos em uma mesma linha é igual ao elemento localizado imediatamente abaixo do segundo elemento da soma.

Ex:
$$\binom{6}{3} + \binom{6}{2}$$
 é

Mais geralmente, se
$$k \ge n$$
 temos $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Esta igualdade, que é a base da construção do triângulo de Pascal, é denominada Relação de Stifel e também é conhecida como regra de Pascal. Podemos trabalhar esta relação através do cálculo do binômio de Newton, usando a seguinte igualdade:

$$(1+x)^n = (1+x)^{n-1} (1+x).$$

No primeiro membro da equação podemos observar que o coeficiente que acompanha x^k é $\binom{n}{k}$, enquanto que no segundo membro, o coeficiente que acompanha x^k é $\binom{n-1}{k}$ $\binom{n-1}{k}$

que acompanha
$$x^k$$
 é $\binom{n-1}{k-1}$ + $\binom{n-1}{k}$.

A questão proposta busca averiguar o conhecimento do aluno com respeito ao triângulo de Pascal e suas propriedades. Contudo o aluno pode obter o resultado manipulando a expressão do número binomial dada no enunciado. Assim, a questão possibilita uma discussão sobre os números binomiais e pode ser motivadora para um trabalho em sala de aula sobre o triângulo de Pascal. É importante também fazer atividades que evidenciam a relação dos números binomiais com a probabilidade. E também mostrar que os valores obtidos numa linha do triângulo de Pascal, quando colocados em um gráfico de barras, formam pontos sobre a curva normal de Gauss.

O tema propicia um tratamento contextualizado, com situações que aparecem em outras áreas. É um bom tema para projetos interdisciplinares, como, por exemplo, em biologia.

Grade de correção

Alternativa	Interpretação
(A) $\binom{6}{3}$	Resposta incorreta. O aluno pode ter apenas uma ideia da propriedade e se confundiu.
(B) $\binom{6}{5}$	Resposta incorreta. O aluno pode ter apenas uma ideia da propriedade e acredita que basta somar os p`s obtendo $2 + 3 = 5$.
(C) (7 ₃)	Resposta correta.
(D) $\binom{7}{5}$	Resposta incorreta. O aluno pode ter apenas uma ideia da propriedade e se confundiu somando os p´s obtendo $2 + 3 = 5$

Algumas referências

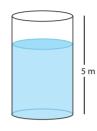
O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado, observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

- Caderno do Professor: Matemática Ensino Médio 2ª série, Volume 3, SEE-SP.
- Cerri, C., Druck, I.F., *Combinatória sem Fórmulas*, Módulo 3, PEC-Construindo Sempre, CENP/SEE-SP USP, São Paulo, 2002.
- Lima, E., Carvalho, P.C.P., Wagner, E., Morgado, A.C., *A Matemática do Ensino Médio* volume 2, 3ª ed., SBM, Rio de Janeiro, 2000.
- http://www.uff.br/cdme

Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-os em diferentes contextos.

Questão 10 - Teste

Um reservatório de água no formato de um cilindro reto está com 60 metros cúbicos, que corresponde a 3/4 de sua capacidade total. Sabendo-se que a altura do reservatório é de 5 m, a área da base do reservatório é, em metros quadrados



23

- (A) 9.
- (B) 12.
- (C) 16.
- (D) 20.

Comentários e recomendações pedagógicas

O objetivo da questão é avaliar se o aluno consegue extrair do enunciado de um problema as informações necessárias para resolvê-lo e sabe como calcular o volume de um cilindro. Espera-se que o aluno consiga obter o volume total do cilindro a partir das informações dadas, manipulando com a fração, significando razão. O aluno deve perceber que o volume total V não é 60 metros cúbicos, mas que 3/4. V = 60. Assim, obtém V = 80. Sabendo que $V = A_b$. $h = A_b$. 5, conclui que $A_b = 16$.

O aluno ao final do ensino médio deve estar apto para calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos básicos. Contudo, identificada as dificuldades com o assunto o professor deve trabalhar com atividades para dar significado às fórmulas, explorando planificações e vistas.

Grade de correção

Alternativa	Interpretação
(A) 9.	Resposta incorreta. O aluno pode ter chegado nessa resposta fazendo 3/4 de 60 e obtendo 45. Considerando esse valor como sendo o volume do reservatório, obtém a área da base igual a 45/5 = 9. Apesar da resposta errada o aluno tem conhecimento da fórmula do volume do cilindro. É importante observar se o problema foi apenas de desatenção na leitura do enunciado ou dificuldade com frações.

(B) 12.	Resposta incorreta. O aluno deve ter entendido que 60 é o volume e que portanto, a área da base é 60/5 = 12. Apesar da resposta errada o aluno tem conhecimento da fórmula do volume do cilindro. Deve-se trabalhar mais com leitura e interpretação de problemas.
(C) 16.	Resposta Correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e mostrou conhecimento da fórmula do volume do cilindro.
(D) 20.	Resposta incorreta. O aluno não deve ter entendido o problema, pois o valor não aparece em cálculos com os números do enunciado.

Algumas referências

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado, observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

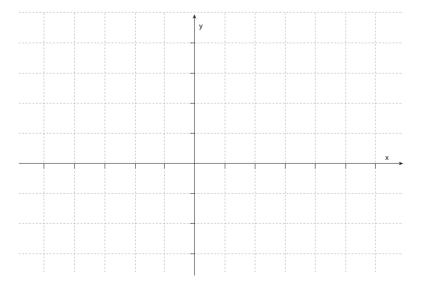
- Caderno do Professor: Matemática Ensino Médio 2ª série, Volume 4, SEE-SP.
- Lima, E., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C., *A Matemática do Ensino Médio* volume 2, 3ª. ed., SBM, Rio de Janeiro, 2000.

Habilidade:

Saber construir o gráfico de funções trigonométricas como f(x) = a.sen(bx)+c a partir do gráfico de y = sen(x), compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes a, b e c.

Questão 11 - Aberta

Esboce, no sistema de coordenadas abaixo, o gráfico da função y = 1 + sen (2x).



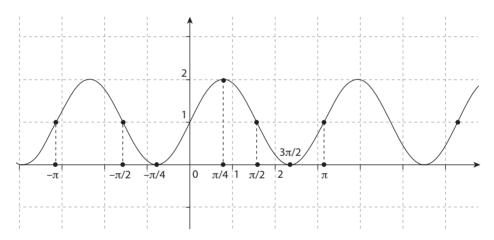
Comentários e recomendações pedagógicas

A construção dos gráficos das funções trigonométricas do tipo $f(x) = a \cdot sen(bx) + c$ torna-se relevante quando associada ao estudo das transformações sofridas pelo gráfico de y = sen(x) a partir da influência dos parâmetros a, b e c.

É recomendável que tal abordagem seja feita também com funções do tipo y = ax + b e principalmente quadráticas $y = ax^2 + bx + c$. Nesse caso pode-se escrever qualquer função quadrática na forma $y = a(x - p)^2 + q$ e assim identificar os movimentos de translação do gráfico de $y = x^2$.

No caso de funções trigonométricas $y = a \operatorname{sen}(bx) + c \operatorname{ou} y = a \operatorname{cos}(bx) + c$ é importante que destaque o efeito da constante b no período da função. O uso de programas (softwares) gráficos facilita bastante o trabalho com tais funções, agregando significado a cada transformação sofrida.

Grade de correção:



O aluno pode acertar parcialmente a questão apenas deslocando para cima de uma unidade o gráfico de y = sen(x). É também possível que o aluno não perceba que o período da função y = sen(2x) é metade do da função y = sen(x) e não o dobro. Porém, se ele fez o gráfico esticando o da função seno, tem pelo menos uma noção parcial do efeito da constante que multiplica a variável x. É importante perceber se o aluno encontra as escalas adequadas para a construção do gráfico, usando a malha quadriculada, é uma boa oportunidade do professor discutir aproximações. Contudo, devem ser considerados corretos os gráficos com escalas diferentes no eixo x e no eixo y, desde que o período e a amplitude estejam corretas.

Algumas referências

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado, observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

Comentários e Recomendações Pedagógicas / Avaliação de Matemática – 3ª série do Ensino Médio

25

- Barufi, M.C, Druck, I.F., Monteiro, M.S., *Tópicos de Trigonometria e medida de ân-qulos*, Módulo 3, PEC-Construindo Sempre, CENP/SEE-SP USP, São Paulo, 2002.
- Barufi, M. C.B., Lauro M. M., *Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando o microcomputador,* CAEM-IME-USP, São Paulo, 2000.
- Caderno do Professor: Matemática Ensino Médio 2ª serie, Volume 1.

Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) da esfera e de suas partes utilizando-os em diferentes contextos.

Questão 12 - Teste

A área da superfície de uma esfera é igual a 16π . Sabendo-se que a área da superfície de uma esfera de raio R é A = 4π R², o volume desta esfera é igual a

(A)
$$\frac{16 \,\pi}{3}$$

$$(B) \frac{32 \pi}{3}$$

- (C) 32π
- (D) 64 π

Comentários e recomendações pedagógicas

O objetivo da questão é identificar se o aluno tem conhecimento de como obter a área da superfície e o volume de uma esfera. O aluno deve perceber que para obter o volume V = 4π R³/3 deve conhecer o raio da esfera. Porém é dada a área da sua superfície, que é A = 4π R². Do enunciado 16π = 4π R², donde R = 2. Portanto, V = $32\pi/3$.

Para que o trabalho com geometria espacial seja efetivo, os alunos devem ser expostos a uma grande variedade de situações desde o inicio do ensino fundamental. O contato com as formas geométricas e suas propriedades deve ser iniciado nos primeiros anos de escolaridade e sempre retomado, com diferentes graus de dificuldade. Percebe-se que pela falta de familiaridade com geometria espacial as fórmulas de áreas e volumes de sólidos não são compreendidas e apenas decoradas. O desenvolvimento da geometria espacial métrica fará mais sentido e será mais efetivo após uma retomada das

características e propriedades dos sólidos e das figuras planas. Nesse sentido, é interessante propor situações de aprendizagem onde os alunos devem manipular os sólidos, fazer conjecturas e descobrir relações. Atualmente, há vários recursos computacionais, como por exemplo, *softwares* de Geometria Dinâmica, que são aliados do processo de ensino e aprendizagem.

Grade de correção

Alternativa	Interpretação
(A) $\frac{16 \pi}{3}$	Resposta incorreta. O aluno pode ter alguma noção do cálculo do volume da esfera e pode achar que é 4π R²/3, ou ainda como não se recorda da fórmula da área da esfera, não obtém o raio.
	Resposta correta.
$(B) \frac{32 \pi}{3}$	
(C) 32π.	Resposta incorreta. Ao escolher esta alternativa o aluno pode ter pensado que o volume é o dobro da área da superfície.
(D) 64π.	Resposta incorreta. O aluno pode ter alguma noção do cálculo de volume. Se a área é $16\pi = 4^2\pi$, ele pode pensar que o raio da esfera é 4. Portanto, o volume seria $4^3\pi$. Isso pode revelar que o aluno faz um paralelo da área do quadrado com o volume de um cubo.

Algumas referências

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado, observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

- Caderno do Professor: Matemática Ensino Médio 2ª série, Volume 4.
- Lima, E., Carvalho, P.C.P., Wagner, E., Morgado, A.C., *A Matemática do Ensino Médio* volume 2, 3a. ed., SBM, Rio de Janeiro, 2000.
- http://www.uff.br/cdme/

Avaliação da Aprendizagem em Processo – Comentários e Recomendações Pedagógicas - Matemática

Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional

Coordenadora: Ione Cristina Ribeiro de Assunção

Departamento de Avaliação Educacional

Diretor: William Massei

Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Aplicação de Avaliações

Diretora: Diana Yatiyo Mizoguchi

Equipe Técnica DAVED participante da AAP

Ademilde Ferreira de Souza, Cyntia Lemes da Silva Gonçalves da Fonseca, Juvenal de

Gouveia, Patricia e Barros Monteiro, Silvio Santos de Almeida

Coordenadoria de Gestão da Educação Básica

Coordenadora: Maria Elizabete da Costa

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão da Educação Básica

Diretor: João Freitas da Silva

Centro do Ensino Fundamental dos Anos Finais, Ensino Médio e Educação Profissional

Diretora: Valéria Tarantello de Georgel

Equipe Curricular CGEB de Matemática

Carlos Tadeu da Graça Barros, Ivan Castilho, João dos Santos, Otavio Yoshio Yamanaka, Rodrigo Soares de Sá, Rosana Jorge Monteiro, Sandra Maira Zen Zacarias, Vanderley Aparecido Cornatione

Elaboração do material de Matemática

Aline dos Reis Matheus, Cristina Cerri, Martha Salerno Monteiro, Raul Antônio Ferraz e Rogério Osvaldo Chaparin

Validação, Leitura e Revisão Crítica

Equipe Curricular CGEB de Matemática

Carlos Tadeu da Graça Barros, Ivan Castilho, João dos Santos, Otavio Yoshio Yamanaka, Rodrigo Soares de Sá, Rosana Jorge Monteiro, Sandra Maira Zen Zacarias, Vanderley Aparecido Cornatione

Professores Coordenadores dos Núcleos Pedagógicos

Agnaldo Garcia, Clarice Pereira, Emerson de Souza Silva, Everaldo José Machado de Lima, Geverson Ribeiro Machi, João Acácio Busquini, Laíde Leni Lacerda N. Moleiro Martins, Luciana Vanessa de Almeida Buranello, Maria Josiléia Silva Bergamo Almeida, Mário José Pagotto, Renata Ercília Mendes Nifoci, Silvia Ignês Peruquetti Bortolatto, Sueli Aparecida Gobbo Araújo e Zilda Meira Aguiar Gomes

Revisão de Texto

Ademilde Ferreira de Souza