GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

Caderno do Professor

2ª série do Ensino Médio
Matemática

São Paulo
2º Bimestre de 2016
12ª Edição

APRESENTAÇÃO

A Avaliação da Aprendizagem em Processo – AAP - se caracteriza como ação desenvolvida de modo colaborativo entre a Coordenadoria de Gestão da Educação Básica e a Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional.

Iniciada em 2011, em apenas dois anos/séries, foi gradativamente sendo expandida e desde 2015 está abrangendo todos os alunos do Ensino Fundamental e Ensino Médio além de, continuamente, aprimorar seus instrumentos.

A AAP, fundamentada no Currículo do Estado de São Paulo, propõe o acompanhamento da aprendizagem das turmas e alunos, de forma individualizada, tendo caráter diagnóstico. Tem como objetivo apoiar as unidades e os docentes na elaboração de estratégias adequadas, a partir da análise de seus resultados, que contribuam efetivamente para melhoria da aprendizagem e desempenho dos alunos, especialmente nas ações de recuperação contínua.

As habilidades selecionadas para a AAP, em Língua Portuguesa e Matemática, terão como referência, a partir de 2016, a Matriz de Avaliação Processual elaborada pela CGEB e já disponibilizada à rede no início deste ano. Além dessas, outras habilidades, compondo cerca de 20% das provas, foram escolhidas na plataforma Foco Aprendizagem e serão repetidas nos diferentes bimestres, articulando, dessa forma, a AAP com os aspectos mais significativos apontados pelo SARESP para o desenvolvimento das competências leitora, escritora e conhecimentos matemáticos.

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental permanece a articulação com as expectativas de aprendizagem de Língua Portuguesa e Matemática e com os materiais do Programa Ler e Escrever e Educação Matemática nos Anos Iniciais – EMAI.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação, na forma de cadernos de provas para os alunos, também foram elaborados os respectivos Cadernos do Professor, com orientações específicas para os docentes, contendo instruções para a aplicação da prova (Anos Iniciais), quadro de habilidades de cada prova, exemplar da prova, gabarito, orientações para correção (Anos Iniciais), grade de correção e recomendações pedagógicas gerais.

Estes subsídios, agregados aos registros que o professor já possui, além das informações sistematizadas no SARA – Sistema de Acompanhamento dos Resultados de Avaliações – e agora também incorporadas à Plataforma Foco Aprendizagem, devem auxiliar no planejamento, replanejamento e acompanhamento das ações pedagógicas, mobilizando procedimentos, atitudes e conceitos necessários para as atividades de sala de aula, sobretudo aquelas relacionadas aos processos de recuperação das aprendizagens.

COORDENADORIA DE GESTÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA – CGEB

COORDENADORIA DE INFORMAÇÃO, MONITORAMENTO E AVALIAÇÃO EDUCACIONAL-CIMA

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

2ª Série do Ensino Médio

Habilidades da Matriz de Avaliação Processual - Matemática
2º Bimestre

Questão	Gabarito	Nível	Habilidade	
			Código	Descrição
01	D	Médio	MP05	Expressar algebricamente uma matriz.
02	C	Difícil		
03	A	Médio	MP06	Identificar a matriz que representa uma situação-problema.
04	B	Médio		
05	C	Fácil	MP07	Relacionar um sistema de equações lineares à matriz correspondente.
~~*06*~~	~~D~~	~~Fácil~~		
07	A	Fácil	MP08	Calcular determinantes de 3ª ordem.
08	D	Médio		
09	A	Médio	MP09	Resolver sistemas de equações lineares.
10	A	Difícil		
11	B	Médio	MP10	Resolver problemas envolvendo sistemas de equações lineares.
12	C	Difícil		

Habilidades das Matrizes de Referência para a Avaliação - SARESP
Foco Aprendizagem

Questão	Gabarito	Nível	Cód. Hab. Ano	Descrição da Habilidade
13	C	Médio	**H37** **9º Ano**	*Resolver problemas em diferentes contextos, a partir da aplicação das razões trigonométricas dos ângulos agudos.*
14	C	Médio	**H17** **3ª Série - EM**	*Identificar a localização de números reais na reta numérica.*
15	C	Médio	**H27** **3ª Série - EM**	*Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente).*

Comentários e recomendações pedagógicas

A premissa básica, a respeito de um processo avaliativo deve ser considerada como instrumento que subsidiará tanto o aluno no seu desenvolvimento cognitivo, quanto ao professor no redimensionamento de sua prática pedagógica.

Desta forma, a avaliação da aprendizagem passa a ser um instrumento que auxiliará o educador a atingir os objetivos propostos em sua prática educativa, neste caso a avaliação sob essa ótica deve ser tomada na perspectiva diagnóstica, servindo como instrumento para detectar as dificuldades e possibilidades de desenvolvimento do educando.

Neste sentido, as 12 primeiras questões que constam deste caderno, procuram verificar o nível de desenvolvimento das habilidades descritas na Matriz de Avaliação Processual de Matemática, notadamente as do 2º Bimestre Letivo, e também de algumas habilidades que o aluno desenvolveu em sua trajetória estudantil e que são estruturantes para a continuidade nos estudos. Tais habilidades se referem às Matrizes de referência para a Avaliação – SARESP.

Nas linhas a seguir, apresentamos uma breve caracterização das habilidades e o seu respectivo conteúdo.

1. ***(MP05). Expressar algebricamente uma matriz.***

A ideia principal, que se associa ao estudo das matrizes é o de uma tabela de dupla entrada contendo dados numéricos, desta forma, torna-se importante a correta interpretação destes dados, registrados em matrizes a partir de uma condição matemática, relacionando a posição de cada um de seus termos, associados a contextos significativos.

2. ***(MP06). Identificar a matriz que representa uma situação-problema.***

Um dos objetivos principais do estudo das matrizes é representação através de matrizes, situações problemas, em que tal ferramenta pode auxiliar a resolução. Para exemplificar, podemos citar a utilização das matrizes na codificação de sequências de ligações entre pontos do plano com o objetivo de formar determinada imagem

3. ***(MP07). Relacionar um sistema de equações lineares à matriz correspondente.***

A transformação da linguagem cotidiana para a linguagem matemática é realizada na maioria das vezes, por intermédio de uma equação. Uma situação problema que pode ser resolvida com cálculo mental não exige que equações sejam escritas, e não se trata, de forma alguma, de priorizar o cálculo mental em detrimento do cálculo algébrico. No entanto, são inúmeras as situações problema em que se evidencia a necessidade de escrever e resolver sistemas lineares. Neste sentido a utilização de matrizes para representar um sistema de equações pode auxiliar na busca da solução desejada.

4. ***(MP08). Calcular determinantes de 3ª ordem.***

Neste caso a habilidade propõe a utilização dos diversos métodos para a obtenção do determinante de uma matriz de 3ª ordem. Sabendo-se que o determinante de uma matriz é um número que é obtido pela operação dos elementos que compõe uma matriz.

5. ***(MP09). Resolver sistemas de equações lineares.***

Para a resolução dos sistemas obtidos a partir de situações problemas, é importante a revisão dos métodos utilizados nos Anos Finais do Ensino Fundamental, isto é, os métodos de adição, substituição ou comparação. Salientamos a importância de o professor priorizar que a resolução dos sistemas seja feita com base nesses métodos, ou por escalonamento, em detrimento do método de Crammer com o uso de determinantes.

6. ***(MP10). Resolver problemas envolvendo sistemas de equações lineares.***

Para finalizar o diagnóstico do desenvolvimento das habilidades relativo ao 2º bimestre, pretendemos verificar quais os métodos que os alunos utilizam, quando resolvem um sistema linear.

Todavia, ressaltamos que a aplicação de regras de cálculo, que exigem dos alunos apenas a mobilização da habilidade de memorização, e estas não podem ser priorizadas em detrimento de outras condutas e outros procedimentos que permitem aos alunos exercitarem de estratégias de raciocínio. Nesse sentido, chamamos a atenção do professor para que a resolução e a discussão de sistemas

lineares por intermédio do escalonamento seja, se não o único procedimento apresentado, aquele que priorize a apresentação conceitual.

Adicionalmente são propostas, três habilidades notadamente fundamentais as quais conferem as condições necessárias para a construção dos conceitos nas diferentes áreas do pensamento.[1]

As habilidades do SARESP destacadas para esta avaliação são:

- ***H37 (9º Ano) – Resolver problemas em diferentes contextos, a partir da aplicação das razões trigonométricas dos ângulos agudos.***

No terceiro bimestre do 9º ano, os alunos terão contato com as razões trigonométricas do triângulo retângulo e revisitaram esse assunto no primeiro bimestre da 2ª série do E.M, demonstrando que a consolidação das razões trigonométricas se faz necessária.

- ***H17 (3ª Série - EM) – Identificar a localização de números reais na reta numérica.***

Para a construção de gráficos das funções trigonométricas, o aluno necessita identificar e localizar números reais na reta numérica, principalmente o número irracional pi.

- ***H27 (3ª Série - EM) – Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no retângulo (seno, cosseno e tangente).***

O estudo de trigonometria na 2ª série do EM, que foca a trigonometria no ciclo trigonométrico, requer que os alunos saibam resolver problemas que envolvam relações métricas fundamentais.

Finalmente, a avaliação, entendida aqui como processual, haverá que ser percebida como um processo de mapeamento e da diagnose do processo de aprendizagem, ou seja, a obtenção de indicadores qualitativos do processo de ensino-aprendizagem no trabalho docente.

Seguindo esta concepção, o PCN destaca que:

> [...] cabe à avaliação fornecer aos professores as informações sobre como está ocorrendo a aprendizagem: os conhecimentos adquiridos, os raciocínios desenvolvidos, as crenças, hábitos e valores incorporados, o domínio de certas estratégias, para que ele possa propor revisões e reelaborações de conceitos e procedimentos parcialmente consolidados.
>
> (BRASIL, 2000, p. 54)

[1] Fonte: http://focoaprendizagem.educacao.sp.gov.br – acesso: 27/11/2015

É importante salientar que as observações que constam nas grades de correção deste caderno são apenas pressupostos de resolução, cabendo ao professor analisar os registros dos alunos e não considerar as observações indicadas como norma padrão e que o objetivo maior, é a proposição de uma grade de correção pelo próprio professor e assim realizar uma análise de acordo com a realidade do processo de ensino-aprendizagem desenvolvido em sala de aula.

Equipe Curricular de Matemática – CEFAF/CGEB

1. Questões referentes às habilidades da Matriz de Avaliação Processual - CGEB

Habilidade
MP05 Expressar algebricamente uma matriz.

Questão 01

Médio

A representação de uma matriz E é dada pela expressão $E=(e_{ij})_{2X2}$. Os elementos e_{ij} de E são expressos algebricamente por $e_{ij}= i^2- 2j$.

A matriz que corresponde a esta lei de formação é

(A) $E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

(B) $E = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(C) $E = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(D) $\mathbf{E = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$

Resolução comentada

O objetivo da questão é avaliar a compreensão do aluno quanto à representação de uma matriz a partir de uma expressão algébrica.

A matriz E = $(e_{ij})_{2X2}$ *será representada por uma tabela de duas linhas e duas colunas. A lei que forma os elementos da matriz é dada por* $e_{ij} = i^2 - 2j$.

Assim, a configuração da matriz será:

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_{11} = 1^2 - 2\cdot 1 & e_{12} = 1^2 - 2\cdot 2 \\ e_{21} = 2^2 - 2\cdot 1 & e_{22} = 2^2 - 2\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Portanto, correta a alternativa D.

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	$E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	***Resposta incorreta.*** *A escolha desta resposta mostra que, possivelmente, o aluno pode ter calculado os elementos da matriz corretamente, mas inverte as posições das linhas e colunas.*
(B)	$E = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	***Resposta incorreta.*** *A escolha desta resposta mostra que, possivelmente, o aluno pode ter calculado os elementos da matriz corretamente, mas inverte as posições das linhas e colunas.*
(C)	$E = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	***Resposta incorreta.*** *A escolha desta resposta mostra que, possivelmente o aluno pode ter calculado os elementos da matriz corretamente, mas inverte as posições das linhas e colunas.*
(D)	$\mathbf{E = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}$	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***

Habilidade
MP05 Expressar algebricamente uma matriz.

Questão 02

Difícil.

Uma matriz A pode ser representada algebricamente por $A=(a_{ij})_{m\,x\,n}$ e seus elementos a_{ij} podem ser representados por expressões algébricas quando $\begin{cases} i = j \\ i \neq j \end{cases}$

Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}_{3\,x\,2}$$

A representação algébrica dos elementos da matriz A é

(A) $a_{ij} = \begin{cases} i - j \text{ se } i = j \\ 2i + j \text{ se } i \neq j \end{cases}$

(B) $a_{ij} = \begin{cases} i + j \text{ se } i = j \\ 3i + j \text{ se } i \neq j \end{cases}$

(C) $\mathbf{a_{ij} = \begin{cases} i + j \text{ se } i = j \\ 3i - j \text{ se } i \neq j \end{cases}}$

(D) $a_{ij} = \begin{cases} i + j \text{ se } i = j \\ 2i - j \text{ se } i \neq j \end{cases}$

Resolução Comentada

O objetivo da questão é avaliar a compreensão do aluno quanto à identificação dos elementos que compõe uma matriz.

A matriz $(A)_{3\,x\,2}$ *em questão possui três linhas e duas colunas e seus elementos podem ser representados algebricamente por* $a_{i\,j} = \begin{cases} i + j \text{ se } i = j \\ 3i - j \text{ se } i \neq j \end{cases}$ *e dispostos em uma tabela*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}_{3X2}$$

Verificando os elementos correspondentes da matriz e a condição apresentada temos que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} = i + j & a_{12} = 3i - j \\ a_{21} = 3i - j & a_{22} = i + j \\ a_{31} = 3i - j & a_{32} = 3i - j \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 + 1 & 3 \cdot 1 - 2 \\ 3 \cdot 2 - 1 & 2 + 2 \\ 3 \cdot 3 - 1 & 3 \cdot 3 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Outra possibilidade de resolução.

Tomando-se como referência os elementos $a_{11} = 2$ *e* $a_{22} = 4$, *fica evidente que quando i=j, a expressão algébrica que determina o resultado será dada por: i + j, desta forma as alternativas: (B), (C) e (D) atendem a esta condição.*

Tomando-se os elementos $a_{12} = 1$, $a_{21} = 5$, $a_{31} = 8$ *e* $a_{32} = 7$ *e verificando na segunda condição apresentada nas alternativas (B), (C) e (D), tem-se que:*

Na alternativa (B)

Se $i \neq j$, $a_{i\,j} = 3\,i + j$, *então para* $\begin{cases} a_{12} = 3 \cdot 1 + 2 = 5 \neq 1 \\ a_{21} = 3 \cdot 2 + 1 = 7 \neq 5 \\ a_{31} = 3 \cdot 3 + 1 = 10 \neq 8 \\ a_{32} = 3 \,.\, 3 + 2 = 11 \neq 7 \end{cases}$

De acordo com os resultados apresentados a expressão acima não determina os elementos apresentados na matriz A.

Na alternativa (C).

Se $i \neq j$, $a_{ij} = 3i - j$, *então para* $\begin{cases} a_{12} = 3 \cdot 1 - 2 = 1 \\ a_{21} = 3 \cdot 2 - 1 = 5 \\ a_{31} = 3 \cdot 3 - 1 = 8 \\ a_{32} = 3 \cdot 3 - 2 = 7 \end{cases}$

Verifica-se que os elementos $a_{ij} = 3i - j$ *, correspondem aos valores indicados na matriz A.*

Na alternativa (D)

se $i \neq j \Rightarrow a_{ij} = 2i - j$, *então para* $\begin{cases} a_{12} = 2 \cdot 1 - 2 = 0 \neq 1 \\ a_{21} = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \neq 5 \\ a_{31} = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \neq 8 \\ a_{32} = 2 \cdot 3 - 2 = 4 \neq 7 \end{cases}$

De acordo com os resultados apresentados a expressão acima não determina os elementos apresentados na matriz A.

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	$a_{ij}=\begin{cases} i-j \text{ se } i=j \\ 2i+j \text{ se } i\neq j \end{cases}$	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno não realizou corretamente os cálculos para verificar se os elementos a_{ij}, correspondem aos valores indicados na matriz A, neste caso a matriz A é representada pelos valores:* $A_1=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 0 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}_{3X2}$
(B)	$a_{ij}=\begin{cases} i+j \text{ se } i=j \\ 3i+j \text{ se } i\neq j \end{cases}$	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno não realizou corretamente os cálculos para verificar se os elementos a_{ij}, correspondem aos valores indicados na matriz A, neste caso a matriz A é representada pelos valores:* $A_2=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \\ 10 & 11 \end{pmatrix}_{3X2}$
(C)	$\mathbf{a_{ij}=\begin{cases} i+j \text{ se } i=j \\ 3i-j \text{ se } i\neq j \end{cases}}$	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(D)	$a_{ij}=\begin{cases} i+j \text{ se } i=j \\ 3i-j \text{ se } i\neq j \end{cases}$	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno não realizou corretamente os cálculos para verificar se os elementos a_{ij}, correspondem aos valores indicados na matriz A, neste caso a matriz A é representada pelos valores:* $A_3=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}_{3\,X\,2}$

Habilidade

MP06 **Identificar a matriz que representa uma situação-problema.**

Questão 03

Médio.

Josefa preparou três tipos distintos de sanduíches usando três ingredientes (A, B e C) em proporções variadas, conforme a tabela 1. Os preços unitários dos ingredientes constam da tabela 2.

Tabela 1

	Ingredientes		
Sanduiche	A	B	C
Tipo 1	3	6	1
Tipo 2	4	4	2
Tipo 3	2	3	1

Tabela 2

Ingredientes	Preço
A	R$ 1,20
B	R$ 1,80
C	R$ 3,20

A matriz que corresponde ao total de pontos das equipes, será representada por

(A) $\begin{pmatrix} \mathbf{17,60} \\ \mathbf{18,40} \\ \mathbf{11,00} \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1,20 \\ 1,80 \\ 3,20 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 10,00 \\ 10,00 \\ 6,00 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 12,00 \\ 18,00 \\ 19,20 \end{pmatrix}$

Resolução Comentada

O objetivo da questão é verificar se o aluno demonstra conhecimentos no cálculo dos elementos de uma tabela e sua posterior transcrição em matrizes, neste caso ao operar com as tabelas, para determinar o valor de cada sanduíche o aluno realiza uma multiplicação de duas matrizes, sendo que a tabela 1, refere-se a uma matriz 3X3 e a tabela 2, refere-se a uma matriz 3X1 e a matriz que informa o valor de cada sanduíche será composta de três linhas e uma coluna (3X1).

Então, temos que:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1{,}20 \\ 1{,}80 \\ 3{,}20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1{,}20 + 6 \cdot 1{,}80 + 1 \cdot 3{,}20 \\ 4 \cdot 1{,}20 + 4 \cdot 1{,}80 + 2 \cdot 3{,}20 \\ 2 \cdot 1{,}20 + 3 \cdot 1{,}80 + 1 \cdot 3{,}20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17{,}60 \\ 18{,}40 \\ 11{,}00 \end{pmatrix}$$

Este resultado satisfaz a alternativa A da questão.

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	$\begin{pmatrix} \mathbf{17,60} \\ \mathbf{18,40} \\ \mathbf{11,00} \end{pmatrix}$	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(B)	$\begin{pmatrix} 1,20 \\ 1,80 \\ 3,20 \end{pmatrix}$	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno não compreendeu o enunciado da questão e indicou como resposta a matriz que identifica o valor dos ingredientes A, B e C, ou escolheu aleatoriamente esta alternativa.*
(C)	$\begin{pmatrix} 10,00 \\ 10,00 \\ 6,00 \end{pmatrix}$	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno não compreendeu o enunciado da questão e indicou como resposta a matriz que representa a soma dos ingredientes da Tabela 1, ou escolheu aleatoriamente essa alternativa.*
(D)	$\begin{pmatrix} 12,00 \\ 18,00 \\ 19,20 \end{pmatrix}$	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno não compreendeu o enunciado da questão e pensou na resolução da seguinte maneira:* $\begin{pmatrix} 3+6+1=10 \\ 4+4+2=10 \\ 2+3+1=6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,20 \\ 1,80 \\ 3,20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12,00 \\ 18,00 \\ 19,20 \end{pmatrix}$

Habilidade
MP06 **Identificar a matriz que representa uma situação-problema.**

Questão 04

Médio.

A E. E. Processo de Aprendizagem promoveu uma gincana de Matemática.

Ao final da gincana, a direção divulgou aos alunos apenas as tabelas 1 e 2, a seguir:

Tabela 1 - Quantidade de acertos/erros por equipe

Equipe	Acerto	Erro
Pitágoras	8	2
Euclides	5	5
Bhāskara	9	1
Einstein	7	3
Newton	4	6

Tabela 2 - Critérios de pontuação

	Pontos
Acerto	3
Erro	–3

A matriz que corresponde ao total de pontos das equipes, será representada por

(A) $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ **(B)** $\begin{pmatrix} \mathbf{18} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{24} \\ \mathbf{12} \\ \mathbf{-6} \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 16 \\ 25 \\ 9 \\ 21 \\ 24 \end{pmatrix}$

Resolução Comentada

O objetivo da questão é verificar se o aluno reconhece uma tabela como matriz e utiliza elementos de matrizes para organizar a resolução de situação problema.

Para a resolução da questão utilizaremos novamente a multiplicação entre as duas matrizes, sendo que a primeira tabela representa uma matriz 5X2 e a segunda tabela representa uma matriz 2X1, e o produto será representado por uma matriz 5X1, da seguinte maneira.

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 5 & 5 \\ 9 & 1 \\ 7 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \cdot 3 + 2 \cdot -3 \\ 5 \cdot 3 + 5 \cdot -3 \\ 9 \cdot 3 + 1 \cdot -3 \\ 7 \cdot 3 + 3 \cdot -3 \\ 4 \cdot 3 + 6 \cdot -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 0 \\ 24 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Este resultado satisfaz a alternativa B da questão.

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$	***Resposta incorreta.*** *O equívoco cometido ao optar por esta alternativa mostra que o aluno, possivelmente subtraiu a quantidade de pontos referentes aos erros, da quantidade de pontos dos acertos, sem considerar os pontos correspondentes.*
(B)	$\begin{pmatrix} \mathbf{18} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{24} \\ \mathbf{12} \\ \mathbf{-6} \end{pmatrix}$	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(C)	$\begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$	***Resposta incorreta.*** *Para optar por esta resposta o aluno, possível e equivocadamente pode ter considerado a soma das quantidades de acertos e erros, não considerando a pontuação relativa a eles, possivelmente por notar a quantidade de problemas em cada rodada da gincana.*
(D)	$\begin{pmatrix} 16 \\ 25 \\ 9 \\ 21 \\ 24 \end{pmatrix}$	***Resposta incorreta.*** *Ao optar por esta alternativa, o aluno possivelmente leva em conta o produto das quantidades de acertos e erros sem considerar a pontuação a eles atribuída na proposta da questão.*

Habilidade
MP07 **Relacionar um sistema de equações lineares à matriz correspondente.**

Questão 05

Fácil

Uma loja está fazendo uma promoção para a compra conjunta de dois tipos de eletrodomésticos, de maneira que o consumidor interessado paga:

- R$ 590,00 por um forno de micro-ondas e um aspirador de pó;
- R$ 1.300,00 por um forno de micro-ondas e uma geladeira;
- R$ 1.250,00 por um aspirador de pó e uma geladeira.

Denominando por **x** o preço do forno de micro-ondas, **y** o preço do aspirador de pó, e **z** o preço da geladeira, podemos estabelecer um sistema linear de 3 equações e 3 incógnitas, que pode ser representado pela matriz:

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 590 & 590 \\ 1 & 1300 & 1300 \\ 1 & 1250 & 1250 \end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix} 1 & 590 & 1 \\ 1 & 1300 & 1 \\ 1 & 1250 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{590} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1300} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1250} \end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix} 590 & 1 & 1 & 0 \\ 1300 & 0 & 1 & 1 \\ 1250 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Resolução Comentada

O objetivo da questão é demonstrar a habilidade do estudante em identificar, um sistema de equações lineares em uma situação problema e transcrevê-lo em notação matricial.

Desta forma, o sistema de equações lineares que representa a situação problema será indicado por:

$$\begin{cases} x + y = 590 \\ x + z = 1300 \\ y + z = 1250 \end{cases}$$

E a matriz que representa o sistema de equações será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 590 \\ 1 & 0 & 1 & 1300 \\ 0 & 1 & 1 & 1250 \end{pmatrix}$$

Este resultado satisfaz a alternativa C da questão.

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	$\begin{pmatrix} 1 & 590 & 590 \\ 1 & 1300 & 1300 \\ 1 & 1250 & 1250 \end{pmatrix}$	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno não compreendeu o enunciado do problema e escolheu aleatoriamente esta alternativa.*
(B)	$\begin{pmatrix} 1 & 590 & 1 \\ 1 & 1300 & 1 \\ 1 & 1250 & 1 \end{pmatrix}$	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno não compreendeu o enunciado do problema e escolheu aleatoriamente esta alternativa.*
(C)	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 590 \\ 1 & 0 & 1 & 1300 \\ 0 & 1 & 1 & 1250 \end{pmatrix}$	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(D)	$\begin{pmatrix} 590 & 1 & 1 & 0 \\ 1300 & 0 & 1 & 1 \\ 1250 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno tenha compreendido o objetivo da questão, porém deve ter se enganado na atribuição das variáveis para cada equação linear que compõe o sistema e consecutivamente representou erroneamente a matriz solicitada.*

Habilidade	
MP06	Relacionar um sistema de equações lineares correspondente.

Questão 06

Fácil

Considere o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$$

Seja A uma matriz de ordem 3X4 que representa o sistema dado, então a matriz 2 · A, será representada por

(A) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 11 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 22 \\ 8 & 6 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-2} & \mathbf{6} & \mathbf{22} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-6} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$

Resolução Comentada

Dado o sistema: $\begin{cases} 2x - y + 3z = 11 \\ 4x - 3y + 2z = 0 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$

A matriz $A_{(3X4)}$ *dos coeficientes do sistema linear será representada por:*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

e por consequência $2 \cdot A$ *será representado por:*

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & 22 \\ 8 & -6 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

A matriz resultante, satisfaz a alternativa D da questão.

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 11 \\ 4 & -3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno efetuou a transcrição do sistema para a representação matricial, esquecendo-se de multiplicar por 2 os elementos desta matriz.*
(B)	$\begin{pmatrix} 11 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno não compreendeu o enunciado e transcreveu aleatoriamente os elementos do sistema para notação matricial.*
(C)	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 22 \\ 8 & 6 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno compreendeu o objetivo da questão, efetuou o produto, não considerando o sinal negativo de alguns elementos da matriz A.*
(D)	$\begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-2} & \mathbf{6} & \mathbf{22} \\ \mathbf{8} & \mathbf{-6} & \mathbf{4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***

Habilidade
MP08 Calcular determinante de 3ª ordem.

Questão 07

Fácil

Dada a matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 2 & 4 & 1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}$

Então o determinante da matriz A será

(A) det A=−18.

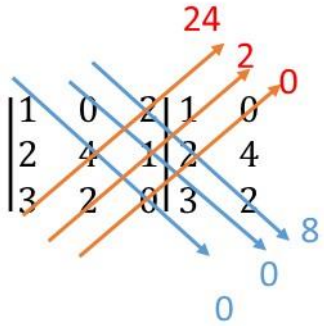
(B) det A= −15.

(C) det A= 15.

(D) det A= 18.

Resolução Comentada

Esta questão tem como objetivo principal a aplicação direta do método de Sarrus, para obtenção do determinante da matriz solicitada, conforme segue:



Então det A= 8 – 26 =−18

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	***det A=−18.***	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(B)	*det A= −15.*	***Resposta incorreta.*** *O aluno possivelmente, enganou-se ao aplicar o algoritmo, somando os elementos ao invés de multiplicar, obtendo a soma 15 para os elementos que seguem a diagonal secundária e 17 para a diagonal principal e efetuou a diferença entre eles.*
(C)	*det A= 15.*	***Resposta incorreta.*** *O aluno possivelmente, enganou-se ao aplicar o algoritmo, somando os elementos ao invés de multiplicar, obtendo a soma 15 para os elementos que seguem a diagonal secundária e 17 para a diagonal principal e efetuou a diferença entre 17 e 15.*
(D)	*det A= 18.*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno aplicou corretamente o algoritmo, porém, deve ter efetuado a diferença entre 26 e 8.*

Habilidade
MP08 Calcular determinantes de 3ª ordem.

Questão 08

Médio

Dado o sistema de equações $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 6 \end{cases}$

O determinante da matriz dos coeficientes é

(A) 0.

(B) 1.

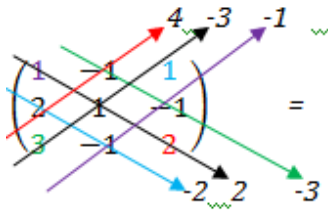
(C) 2.

(D) 3.

Resolução Comentada

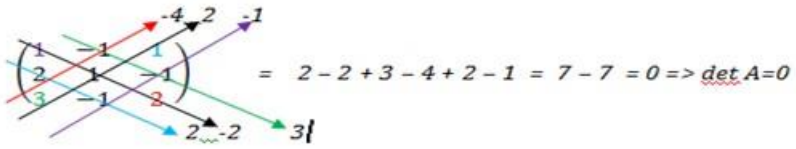
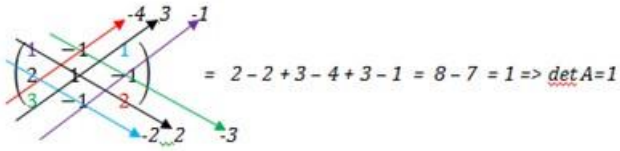
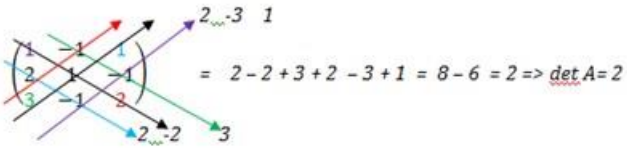
A matriz que representa o sistema de equações será dada por: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

e o determinante da matriz é calculado da seguinte maneira:



$= 2 - 2 + 3 - 3 + 4 - 1 = 9 - 6 = 3 \Rightarrow \det A = 3$

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	*0.*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno encontrou os valores corretos, conforme o algoritmo, porém enganou-se ao calcular a diferença entre as diagonais principal e secundária.*  $= 2-2+3-4+2-1 = 7-7 = 0 \Rightarrow \det A=0$
(B)	*1.*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno ao aplicar o algoritmo efetuou a soma dos elementos ao invés de aplicar o produto entre eles, da seguinte maneira:*  $= 2-2+3-4+3-1 = 8-7 = 1 \Rightarrow \det A=1$
(C)	*2.*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno ao aplicar o algoritmo efetuou a soma dos elementos que seguem as diagonais principal e da secundária da seguinte maneira*  $= 2-2+3+2-3+1 = 8-6 = 2 \Rightarrow \det A=2$
(D)	***3.***	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***

Habilidade
MP09 Resolver sistemas de equações lineares.

Questão 09

Médio

A solução do sistema de equações lineares $\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 6y = 3 \end{cases}$ será dada pelo par ordenado:

(A) S = {(3, -1)}.

(B) S = {(-1,3)}.

(C) S = {(-5,6)}.

(D) S = {(2,3)}.

Resolução Comentada

Esta questão tem como objetivo verificar se o aluno consegue aplicar corretamente, um dos métodos que são aplicados, quando da resolução de sistemas lineares, tais métodos referem-se ao método do escalonamento ou utilizando a regra de Cramer, para resolução de sistemas lineares.

Existem algumas opções quando da utilização de um ou outro método, no sentido em que o método do escalonamento, o aluno se vê obrigado a avaliar possibilidades e escolher estratégias, adotando, dessa forma, uma postura que o remete à mobilização de habilidades mais elaboradas e valorizadas na aprendizagem matemática.

Enquanto que no método de Cramer o aluno segue uma rotina determinada, ou seja, a montagem e cálculo dos determinantes e a posterior divisão entre eles.

Sabendo-se disto encaminharemos a resolução do referido sistema de equações utilizando ambos os métodos.

- *Resolução utilizando o método do escalonamento:*

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 & 11 \\ 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{3}{2}L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 2 & -5 & 11 \\ 0 & \frac{27}{2} & -\frac{27}{2} \end{bmatrix}$$

A última linha da matriz nos fornece a equação:

$$\frac{27}{2}y = -\frac{27}{2} \Rightarrow y = -1$$

Substituindo o valor de y na equação: 2x − 5y = 11, tem-se que:

$$x = \frac{5 \cdot (-1) + 11}{2} = \frac{-5+11}{2} = \frac{6}{2} = 3 \ \therefore S = \{(3,-1)\}$$

- *Resolução utilizando o método de Cramer.*

No caso do sistema indicado na questão, não é possível utilizar tal método, pois ele é utilizado apenas em sistemas de lineares quadrados, isto é, para sistemas com incógnitas em mesmo número, passa pela resolução de alguns determinantes formados pelos coeficientes das incógnitas e/ou pelos termos independentes.

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	**S={(3,-1)}**	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(B)	S={(-1,3)}	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno efetuou corretamente todas as passagens para determinar os valores das incógnitas, porém, inverteu os valores de x e y.*
(C)	S={(-5,6)}	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno indicou apenas os coeficientes da segunda variável, contidas nas equações que compõe o sistema linear, isto mostra que o aluno ainda não compreendeu o processo de resolução de sistemas lineares.*
(D)	S={(2,3)}	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno indicou apenas os coeficientes da primeira variável, contidas nas equações que compõe o sistema linear, isto mostra que o aluno ainda não compreendeu o processo de resolução de sistemas lineares.*

Habilidade
MP09 Resolver sistemas de equações lineares.

Questão 10

Difícil

Seja o sistema linear, com três equações e três incógnitas

$$\begin{cases} 2a - b + c = 3 \\ a + 2b - c = 2 \\ a + b + c = 6 \end{cases}$$

A solução deste sistema é dada pelo termo ordenado

(A) (1, 2, 3).

(B) (2, 1, 3).

(C) (2, 2, 2).

(D) (3, 2, 1).

Resolução Comentada

O objetivo da questão é verificar a estratégia de raciocínio mobilizada pelo aluno ao resolver um sistema de equações.

Do sistema: $\begin{cases} 2a - b + c = 3 \\ a + 2b - c = 2 \\ a + b + c = 6 \end{cases}$ *obtém-se a matriz completa formada pelos coeficientes das incógnitas e pelos termos independentes das três equações, conforme segue:*

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} L_3 \\ L_2 \\ L_1 \end{matrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-L_1+L_2}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{5L_2+L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -7 & -21 \end{pmatrix}$$

A última linha da matriz nos fornece a equação: $-7c = -21 \Rightarrow c = \frac{-21}{-7} = 3$

Substituindo o valor encontrado para "c" na equação da segunda linha da matriz final, temos:

$b - 2c = -4 \Rightarrow b - 2 \cdot 3 = -4 \Rightarrow b = -4 + 6 \Rightarrow b = 2$

Se a + b + c = 6 e b = 2 e c= 3, temos que a = 1

Então o terno ordenado será: (1,2,3).

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	***(1, 2, 3).***	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(B)	*(2, 1, 3).*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno efetuou corretamente todas as passagens para determinar os valores das incógnitas, porém, não estabeleceu corretamente os valores das incógnitas a, b e c.*
(C)	*(2, 2, 2).*	***Resposta incorreta.*** *Com base na terceira equação do sistema a + b + c = 6, o aluno possível admite como solução do sistema a terna (2, 2, 2).*
(D)	*(3, 2, 1).*	***Resposta incorreta.*** *Para assinalar esta resposta, o aluno, possivelmente tenha calculado corretamente os valores de a, b e c, porém deve tê-los anotado na sequência em que foram calculados, como se pode observar na solução comentada.*

Habilidade

MP10 **Resolver problemas envolvendo sistema de equações lineares.**

Questão 11

Médio

Uma papelaria recebeu um lote especial de cadernos, canetas e lapiseiras e fez a seguinte promoção:

Kit	Preço
Kit 1: 1 Caderno + 1 Caneta	R$ 15,00
Kit 2: 1 Caderno + 1 Lapiseira	R$ 13,00
Kit 3: 1 Caneta + 1 Lapiseira	R$ 12,00

Mantendo os mesmos preços da promoção, um novo kit com 1 caderno, 1 lapiseira e 1 caneta, deverá custar:

(A) R$ 16,00

(B) R$ 20,00

(C) R$ 28,00

(D) R$ 40,00

Resolução Comentada

Na resolução de situações problemas, o primeiro fator a ser considerado é a verificação da capacidade de realizar a devida conversão de um registro em linguagem materna para outro registro de representação, no caso a utilização de um sistema de equações lineares.

Na questão proposta, ao transcrever os dados do problema em linguagem algébrica, o aluno perceberá que há três incógnitas, que denominaremos x, para representar a quantidade de lapiseiras, y para a quantidade de canetas e z para a quantidade de cadernos, que resultam no sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} y + z = 15 \\ x + z = 13 \\ x + y = 12 \end{cases}$$

Existem vários processos para encaminhar a resolução do sistema, demonstraremos a resolução a partir de alguns processos de resolução.

1- Método da Substituição:

$$\begin{cases} y + z = 15 \Rightarrow y = 15 - z \ (I) \\ x + z = 13 \Rightarrow x = 13 - z \ (II) \\ x + y = 12 \ (III) \end{cases}$$

Substituindo a equação (I) e (II) na equação (III), temos que:

$$(13 - z) + (15 - z) = 12$$

$$-2z + 28 = 12$$

$$-2z = 12 - 28$$

$$-2z = -16$$

$$z = \frac{-16}{-2} = 8$$

Substituindo o valor de z na equação (I), temos que: $y + 8 = 15 \Rightarrow y = 15 - 8 = 7$

Substituindo o valor de z na equação (II), temos que: $x + 8 = 13 \Rightarrow y = 13 - 8 = 5$

Então temos que o preço de 1 lapiseira e 1 caneta e 1 caderno será determinado pela soma: 8 + 7 + 5= 20, então o valor do novo kit será de R$ 20,00.

2- Método do escalonamento:

Seja a matriz: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ *representadas pelos coeficientes das incógnitas e dos termos independentes, das três equações, conforme segue:*

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 0 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & 13 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 + L_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & 16 \end{bmatrix}$$

A partir da obtenção da última matriz, verifica-se que 2z=16, então z=8.

Substituindo o valor de z, na 2ª linha desta matriz, verifica-se que x + 8=13, então x=5

Substituindo o valor de z, na 1ª linha da matriz, verifica-se que y + 8=15, então y= 7.

3- Regra de Cramer:

Seja a matriz: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ *representadas pelos coeficientes das incógnitas e dos termos independentes, das três equações, conforme segue:*

Seja Δ o determinante da matriz representada pelos coeficientes das equações lineares, então temos:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$\Delta_x = \begin{pmatrix} 15 & 1 & 1 \\ 13 & 0 & 1 \\ 12 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 10 \therefore x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\Delta_y = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 1 \\ 1 & 13 & 1 \\ 1 & 12 & 1 \end{pmatrix} = 14 \therefore y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{14}{2} = 7$$

$$\Delta_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 15 \\ 1 & 0 & 13 \\ 1 & 1 & 12 \end{pmatrix} = 16 \therefore z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{16}{2} = 8$$

4- Adição das equações do sistema.

Se somarmos todas as equações do sistema obtemos a seguinte igualdade:

$(y+z) + (x+z) + (x+y) = 15 + 13 + 12 = 40$

donde

$2(x+y+z)=40$

Portanto, $x+y+z=20$

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	*R$ 16,00*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno pode ter chegado nessa resposta considerando que o valor de um kit com os três objetos deve ser maior que o valor de cada um dos kits.*
(B)	***R$ 20,00***	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(C)	*R$ 28,00*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno pode ter chegado nessa resposta somando todos os valores dos dois primeiros kits, onde aparece o caderno.*
(D)	*R$ 40,00*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno pode ter chegado nessa resposta somando todos os valores dos kits.*

Habilidade	
MP10	**Resolver problemas envolvendo sistema de equações lineares.**

Questão 12

Difícil.

Clarice vendeu 80 doces de três tipos diferentes e arrecadou R$ 115,00. Sabe-se que um brigadeiro custa R$ 1,00, um bombom R$ 2,00 e um olho de sogra R$ 1,50 e que a quantidade de brigadeiros é igual à soma dos outros doces vendidos. O número de bombons que Clarice vendeu é igual a:

(A) 10

(B) 15

(C) 30

(D) 40

Resolução Comentada

O objetivo desta questão resume-se na escrita das três equações que compõe o sistema e determinar a quantidade de um determinado tipo de doce que Clarice vendeu, no caso a quantidade de bombons.

Desta forma, uma possibilidade de resolução, será:

Sejam $\begin{cases} x=\text{quantidade de brigadeiros;} \\ y=\text{quantidade de bombons.} \\ z=\text{quantidade de olhos de sogra.} \end{cases}$

Conforme os dados apresentados, temos que:

$$\begin{cases} x + y + z = 80 (I) \\ y + z = x (II) \\ x + 2y + 1{,}5z = 115 (III) \end{cases}$$

Substituindo a igualdade (II) em (I), temos que: $2x = 80 \Rightarrow x = 40$

Substituindo, x = 40 nas igualdades (III) e (II), temos que:

$$\begin{cases} 40 = y + z \\ 40 + 2y + 1{,}5z = 115 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 40 \ (IV) \\ 2y + 1{,}5z = 75 \ (V) \end{cases}$$

Multiplicando-se a equação (IV) por −1,5 e somando com a equação (V), temos que:

$$\begin{cases} -1{,}5y - 1{,}5z = -60 \\ 2y + 1{,}5z = 75 \end{cases} \Rightarrow 0{,}5y = 15 \Rightarrow y = \frac{15}{0{,}5} = 30$$

Se x=40, y=30, então z=10, pois, x+y+z= 80.

e Clarice arrecadou: $\begin{cases} \text{R\$ 40,00 com a venda de 40 bombons;} \\ \text{R\$ 60,00 com a venda de 30 brigadeiros;} \\ \text{R\$ 15,00 com a venda de 10 olhos de sogra.} \end{cases}$

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	*10*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno, determinou corretamente a quantidade de brigadeiros (x=40), porém equivocou-se na montagem do sistema, conforme segue:* $\begin{cases} y + z = 40 \\ 1{,}5y + 2z = 115 - 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 40 \ \ (I) \\ 1{,}5y + 2z = 75 \ \ (II) \end{cases}$ *Multiplicando a equação (I) por −1,5, temos que:* $\begin{cases} -1{,}5y - 1{,}5z = -60 \\ 1{,}5y + 2z = 75 \end{cases} \Rightarrow 0{,}5z = 15 \Rightarrow z = \frac{15}{0{,}5} = 30$ *Se x=40, z=30, então y=10.*
(B)	*15*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno, determinou corretamente a quantidade de brigadeiros (x=40), porém equivocou-se na montagem do sistema, conforme segue:* $\begin{cases} y + z = 40 \\ 1{,}5x + 2y + z = 115 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 40 \\ 1{,}5 \cdot 40 + 2y + z = 115 \end{cases} \Rightarrow$ $\Rightarrow \begin{cases} y + z = 40 \\ 60 + 2y + z = 115 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + z = 40 (I) \\ 2y + z = 55 (II) \end{cases}$ *Multiplicando a equação (I) por −1, temos que:* $\begin{cases} -y - z = -40 \\ 2y + z = 55 \end{cases} \Rightarrow y = 15$
(C)	***30***	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(D)	*40*	***Resposta incorreta.*** *Possivelmente o aluno interpretou apenas a afirmação: "a quantidade de brigadeiros é igual a soma dos outros doces vendidos" e que a soma dos doces é igual a 80, então concluiu que a quantidade de bombons é 40, confundindo-se com a quantidade de brigadeiros.*

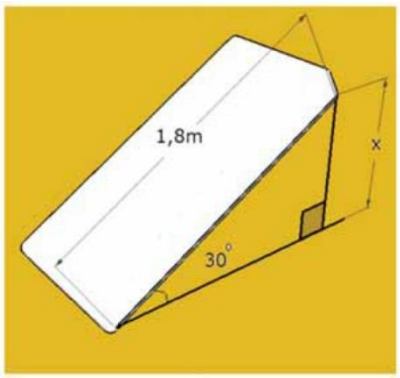
2. Questões referentes às habilidades da Matriz de Referência para a Avaliação - SARESP

H37 9º Ano	**Resolver problemas em diferentes contextos, a partir da aplicação das razões trigonométricas dos ângulos agudos.**

Questão 13

Média (SARESP 2009)

Karen tem problemas com sono e seu médico recomendou que seu colchão fosse inclinado segundo um angulo de 30º em relação ao solo.



Função	0°	30°	45°	60°	90°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Sabendo que o colchão tem 1,80 m de comprimento e terá uma parte apoiada no chão, conforme ilustra a figura, a medida x, que representa a altura do apoio do colchão na parede é:

(A) 0,50 m.

(B) 0,80 m.

(C) 0,90 m.

(D) 1,00 m.

Comentários

Os alunos devem analisar que, com os dados do problema, é preciso utilizar a definição de seno de um ângulo agudo. Nesse sentido,

$$\text{sen } 30° = \frac{x}{1,8}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{1,8}$$

$$x = 0,90$$

Grade de correção

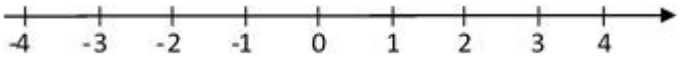
Alternativa		Observação
(A)	*0,50 m.*	***Resposta incorreta**. É possível que o aluno tenha indicado apenas o valor de sen 30°, fornecido na tabela.*
(B)	*0,80 m.*	***Resposta incorreta**. É possível que o aluno tenha indicado 0,8 por ser um valor mais semelhante à medida de 1,8 m, comprimento da cama.*
(C)	***0,90 m.***	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(D)	*1,00 m.*	***Resposta incorreta**. É possível que o aluno tenha interpretado esse valor por comparação geométrica das medidas apresentadas, supondo que a parte sustentada estivesse a 1 metro de altura.*

H17 3ª Série – E.M	Identificar a localização de números reais na reta numérica.

Questão 14

Médio

Observe a reta numérica.



Dentre as alternativas abaixo, qual contém valores compreendidos entre dois números inteiros consecutivos da reta numérica?

(A) $\sqrt{5}$ e $\frac{3}{4}$

(B) $-\sqrt{5}$ e $\frac{5}{7}$

(C) $\sqrt{2}$ e $\frac{3}{2}$

(D) $-\sqrt{8}$ e $\frac{8}{3}$

Comentários

É preciso reconhecer os números irracionais representados por radicais e suas aproximações racionais e reconhecer os números racionais representados pelas frações. Dessa forma o aluno poderá verificar a posição que os mesmos ocupam na reta numérica.

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	$\sqrt{5}\ e\ \frac{3}{4}$	***Resposta incorreta**. O aluno possivelmente associou a sequência 3, 4 e 5, mostrando não reconhecer os números irracionais ou mesmos os racionais.*
(B)	$-\sqrt{5}\ e\ \frac{5}{7}$	***Resposta incorreta**. O aluno possivelmente verificou os dois algarismos 5 nas representações, mostrando não reconhecer os números irracionais ou mesmos os racionais, inclusive não identificou que, no intervalo de dois números inteiros consecutivos os sinais se mantém.*
(C)	$\boldsymbol{\sqrt{2}\ e\ \frac{3}{2}}$	***Resposta correta. O aluno possivelmente reconhece o número irracional $\sqrt{2}$ e sua aproximação 1,4, e o número racional 3/2 e sua representação decimal 1,5, verificando que os dois estão entre os números inteiros 2 e 3.***
(D)	$-\sqrt{8}\ e\ \frac{8}{3}$	***Resposta incorreta**. O aluno possivelmente verificou os dois algarismos 8 nas representações, mostrando não reconhecer os números irracionais ou mesmos os racionais, inclusive não identificou que, no intervalo de dois números inteiros consecutivos os sinais se mantém.*

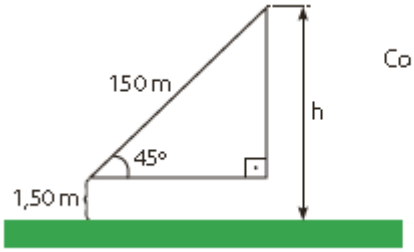
H27 3ª Série – E.M.	Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente).

Questão 15

Médio

(SARESP 2012)

Um jovem avista o topo de uma torre segundo um ângulo de 45º, conforme a ilustração.



Considere $\sqrt{2} \cong 1{,}4$.

Sabe-se que a distância dos seus olhos ao topo da torre é 150 m e, ainda, que a distância dos seus olhos ao solo é 1,50 m. A altura aproximada h da torre é

(A) 77 m.

(B) 100 m.

(C) 107 m.

(D) 150 m.

Comentários

Esse problema aborta a aplicação da relação trigonométrica seno. Nesse caso, além de aplicar a devida relação trigonométrica, é necessário acrescentar a medida 1,50 m ao resultado.

Assim,

$$\text{sen}45° = \frac{h - 1{,}50}{150}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h - 1{,}50}{150}$$

$$\frac{1{,}4}{2} = \frac{h - 1{,}50}{150}$$

$$h = 106{,}5$$

$$h \cong 107 \text{ m}$$

Grade de correção

Alternativa		Observação
(A)	*77 m.*	***Resposta incorreta**. Possivelmente o aluno não fez os cálculos e considerou por aproximação visual.*
(B)	*100 m.*	***Resposta incorreta**. Possivelmente o aluno pode ter dividido o comprimento 150 m pelo valor 1,5 m.*
(C)	***107 m.***	***Resposta correta. O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.*** ***Cabe ao professor verificar através dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.***
(D)	*150 m.*	***Resposta incorreta**. Possivelmente o aluno pode ter tomado apenas o comprimento 150 m.*

Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional
Coordenador: Olavo Nogueira Batista Filho

Departamento de Avaliação Educacional
Diretora: Cyntia Lemes da Silva Gonçalves da Fonseca
Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Planejamento e Análise de Avaliações
Diretor: Juvenal de Gouveia
Ademilde Ferreira de Souza, Cristiane Dias Mirisola, Isabelle Regina de Amorim Mesquita, Patricia de Barros Monteiro, Soraia Calderoni Statonato

Centro de Aplicação de Avaliações
Denis Delgado dos Santos, José Guilherme Brauner Filho, Kamila Lopes Candido, Lilian Sakai, Manoel de Castro Pereira, Nilson Luiz da Costa Paes, Teresa Miyoko Souza Vilela

Coordenadoria de Gestão da Educação Básica
Coordenadora: Ghisleine Trigo Silveira

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão da Educação Básica
Diretora: Regina Aparecida Resek Santiago

Centro do Ensino Fundamental dos Anos Finais, Ensino Médio e Educação Profissional
Diretora: Valeria Tarantello de Georgel

Equipe Curricular CGEB de Matemática – Autoria, Leitura crítica e validação do material
Djalma de Oliveira Bispo Filho, João dos Santos Vitalino, Otávio Yoshio Yamanaka, e Vanderley Aparecido Cornatione

Professores Coordenadores dos Núcleos Pedagógicos das Diretorias de Ensino - Leitura crítica e validação do material de Matemática

Adriana Santos Morgado, Antonia Zulmira da Silva, Cristina Aparecida da Silva, Edna Marchi Alvarenga, Edson Basilio Amorim Filho, Leandro Geronazzo, Lúcio Mauro Carnaúba, Marcelo Balduino Silva, Maria Denes Tavares Sa Silva, Mario José Pagotto, Nilton Celso Mourão, Rebeca Meirelles das Chagas, Rosana Jorge Monteiro Magni, Rosemeire Lepinski, Sheila Cristina Aparecida Lima Camargo