GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

Caderno do Professor

Avaliação da Aprendizagem em Processo

2ª Série do Ensino Médio

Matemática

São Paulo

3º Bimestre de 2018

21ª Edição

APRESENTAÇÃO

A Avaliação da Aprendizagem em Processo – AAP - se caracteriza como uma ação desenvolvida de modo colaborativo entre a Coordenadoria de Gestão da Educação Básica e a Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional.

Iniciada em 2011 e voltada a apenas dois anos/séries, foi gradativamente sendo expandida e, desde 2015, abrange todos os alunos dos Ensinos Fundamental e Médio além de, continuamente, aprimorar seus instrumentos.

A AAP, fundamentada no Currículo do Estado de São Paulo, propõe o acompanhamento da aprendizagem das turmas e alunos de forma individualizada, com um caráter diagnóstico. Tem como objetivo apoiar as unidades escolares e os docentes na elaboração de estratégias adequadas a partir da análise de seus resultados, contribuindo efetivamente para melhoria da aprendizagem e desempenho dos alunos, especialmente nas ações de recuperação contínua.

As habilidades selecionadas para a AAP, em Língua Portuguesa e Matemática, têm como referência, a partir de 2016, a Matriz de Avaliação Processual elaborada pela CGEB e disponibilizada à rede.

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental permanece a articulação com as expectativas de aprendizagem de Língua Portuguesa e Matemática e com os materiais do Programa Ler e Escrever e da Educação Matemática nos Anos Iniciais – EMAI.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação, na forma de cadernos de provas para os alunos, também foram elaborados os respectivos exemplares do Professor, com orientações específicas para os docentes, instruções para a aplicação (Anos Iniciais), quadro de habilidades de cada prova, gabaritos, orientações e grades para correção e recomendações pedagógicas gerais.

Estes subsídios, agregados aos registros que o professor já possui e as informações sistematizadas no Sistema de Acompanhamento dos Resultados de Avaliações - SARA, que incorpora os dados resultantes da AAP, devem auxiliar a equipe escolar no planejamento, replanejamento e acompanhamento das ações pedagógicas, mobilizando procedimentos, atitudes e conceitos necessários para as atividades de sala de aula, sobretudo aquelas relacionadas aos processos de recuperação das aprendizagens.

COORDENADORIA DE GESTÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA - CGEB

COORDENADORIA DE INFORMAÇÃO, MONITORAMENTO E AVALIAÇÃO EDUCACIONAL - CIMA

Questão	Código da Habilidade	Descrição
01	MP11	Identificar a probabilidade como uma razão.
02		
03	MP12	Expressar uma probabilidade na forma percentual.
04		
05	MP13	Calcular a probabilidade simples da ocorrência de um evento.
06		
07	MP14	Resolver problemas envolvendo o princípio multiplicativo da contagem.
08		
09	MP16	Resolver problemas de análise combinatória, que envolvam arranjos simples e/ou combinações.
10		
11	MP17	Identificar a regularidade na construção do Triângulo de Pascal.
12		

GABARITO

■	A	B	C	D	E
01	□	□	■	□	□
02	□	■	□	□	□
03	□	□	■	□	□
04	■	□	□	□	□
05	□	□	□	□	■
06	□	□	□	□	■
07	□	□	■	□	□
08	■	□	□	□	□
09	□	■	□	□	□
10	□	□	□	■	□
11	■	□	□	□	□
12	□	□	□	□	■

COMENTÁRIOS E RECOMENDAÇÕES PEDAGÓGICAS

A premissa básica, a respeito de um processo avaliativo, é que ele deve ser considerado como instrumento que subsidiará tanto o aluno no seu desenvolvimento cognitivo, quanto o professor no redimensionamento de sua prática pedagógica.

Desta forma, a avaliação da aprendizagem passa a ser um instrumento que auxiliará o educador a atingir os objetivos propostos em sua prática educativa, neste caso a avaliação sob essa ótica deve ser tomada na perspectiva diagnóstica, servindo como instrumento para detectar as dificuldades e possibilidades de desenvolvimento do educando.

Neste sentido, as 12 questões que constam deste caderno, procuram verificar o nível de desenvolvimento das habilidades descritas na Matriz de Avaliação Processual de Matemática, notadamente as do 3º bimestre letivo.

Nas linhas a seguir, apresentamos uma breve caracterização das habilidades e o seu respectivo conteúdo.

- *(MP11) – Identificar a probabilidade como uma razão.*

Apresentar o cálculo de probabilidades sem a exigência de raciocínio combinatório significa priorizar o fato de que podemos expressar a chance de ocorrência de um evento por intermédio de uma razão entre dois valores: a parte e o todo. O numerador dessa razão coincide com o número de resultados esperados para o experimento, enquanto o denominador coincide com o número de resultados possíveis, todos eles considerados igualmente prováveis.

- *(MP12) – Expressar uma probabilidade na forma percentual.*

Uma razão entre dois valores pode ser expressa na língua materna por intermédio de uma fração, cujo denominador é 100, ou seja, através de um dado percentual, por exemplo, em uma classe de 40 alunos, se qualquer um tem uma chance em quarenta de ser sorteado, precisamos formalizar essa condição, que expressamos na língua materna por intermédio de uma fração 1/40, que pode ser representado por uma porcentagem, 2,5%.

Desta forma, os alunos da 2ª série do Ensino Médio o terreno preparado para o estudo formalizado das probabilidades, desde que os casos a eles apresentados não envolvam, inicialmente, raciocínio combinatório.

- *(MP13) – Calcular a probabilidade simples da ocorrência de um evento.*

Problemas envolvendo raciocínio combinatório são, na maioria das vezes, resolvidos por intermédio de uma adição ou de uma multiplicação, embora quase sempre a escolha pela multiplicação, seja a mais aconselhável, já que envolve raciocínio mais elaborado e eficiente.

A solução de situações-problema envolvendo simultaneamente raciocínio combinatório e cálculo de probabilidades costuma acarretar dificuldades maiores do que aquelas em que se aplicam esses conteúdos de maneira independente. Entre as diversas justificativas possíveis, podemos enunciar o fato de que as características conjuntas desses conteúdos impedem que os problemas sejam facilmente agrupados em tipos padrão, de maneira que resolver um deles sempre passe pela mobilização da estratégia de raciocínio que o associa a algum anteriormente resolvido e compreendido, como ocorre, mais facilmente, com problemas de outros grupos de conteúdos matemáticos.

- *(MP14) – Resolver problemas envolvendo o princípio multiplicativo da contagem.*

Uma adição de n parcelas iguais a p pode ser representada pelo produto $n \cdot p$. Muitas são as situações-problema resolvidas por intermédio de uma adição desse tipo. Outras adições não formadas por parcelas iguais, também podem ser expressas por intermédio de um produto, como é o caso de $5 + 4 + 3 + 2 + 1$, que é igual a $(6 \cdot 5) \div 2 = 15$, tal ordenação é chamada de princípio multiplicativo, que é válida apenas no interior princípio aditivo.

Em notação matemática isso seria o mesmo que considerarmos, que determinada atividade pode ser realizada em duas etapas, ou seja, de m e nas maneiras distintas, o total de possibilidades será dado pelo produto de m por n (m x n).

- *(MP15) – Resolver problemas de arranjos simples.*

No Ensino Médio, muitos cursos abandonam a ideia da representação da solução por meio das árvores e passam a priorizar a classificação dos problemas em alguns tipos: permutação, arranjos e combinações que, segundo essa opção didática, podem ser resolvidos a partir da aplicação de fórmulas matemáticas.

Considerando que o ensino de análise combinatória e probabilidades a partir desse enfoque deixa de favorecer a diversidade de estratégias de resolução e, consequentemente, de percursos de aprendizagem, uma vez que a representação da solução do problema por intermédio de desenhos, diagramas e/ou tabelas é um dos comportamentos heurísticos reconhecidos como um dos mais importantes a serem mobilizados pelos estudantes quando enfrentam situações que são de fato problemas.

- *(MP16) – Resolver problemas de combinações.*

A impossibilidade de padronização exige, mais do que em outros casos, que os alunos mobilizem diversas estratégias de raciocínio. Portanto cabe ao professor estimular a resolução de diversos problemas de análise combinatória e probabilidades com o foco voltado para o tipo de raciocínio exigido, em vez da clássica separação em problemas típicos, baseada no tipo de operação matemática envolvida.

Para a matriz de referência da avaliação de Matemática, consideramos a união das duas habilidades destacadas nas habilidades MP15 e MP16, pelo motivo de não particularizar o desenvolvimento de cada habilidade e sim o desenvolvimento do conhecimento, relativo ao tratamento dos problemas de Análise Combinatória.

- *(MP17) – Identificar a regularidade na construção do Triângulo de Pascal.*

Um cálculo de probabilidades sempre está associado a um “sim” e a um “não”, ou a um “sucesso” e a um “fracasso”, sem, todavia, que esses aspectos sejam expressos por probabilidades iguais. Em outras palavras, nem sempre há 50% de chance para o “sim” e 50% para o “não”, como no caso da face observada no lançamento de uma moeda em que o “sim” pode ser coroa e o “não” pode ser cara.

Para o comprador de um número de uma rifa, em um total de 200, o “sim” é 0,5% e o “não” é 99,5%. O que ocorre com o cálculo de probabilidades de eventos que se repetem n vezes sob as mesmas condições, isto é, situações em que “sim” ou “não” são esperados, cada um, mais de uma vez, como no caso do lançamento de quatro dados, com o objetivo de se conseguir duas vezes o número seis na face superior? A resolução desse tipo de problema pode ser associada ao desenvolvimento de um binômio do tipo [(sim) + (não)]n, de modo que, assim procedendo, estamos atribuindo significado real à busca do termo geral do Binômio de Newton, bem como aos elementos das linhas do Triângulo de Pascal.

Finalmente, a avaliação, entendida aqui como processual, haverá que ser percebida como um processo de mapeamento e da diagnose do processo de aprendizagem, ou seja, a obtenção de indicadores qualitativos do processo de ensino-aprendizagem no trabalho docente.

Seguindo esta concepção, o PCN destaca que:

> [...] cabe à avaliação fornecer aos professores as informações sobre como está ocorrendo a aprendizagem: os conhecimentos adquiridos, os raciocínios desenvolvidos, as crenças, hábitos e valores incorporados, o domínio de certas estratégias, para que ele possa propor revisões e reelaborações de conceitos e procedimentos parcialmente consolidados.
>
> (BRASIL, 2000, p. 54)

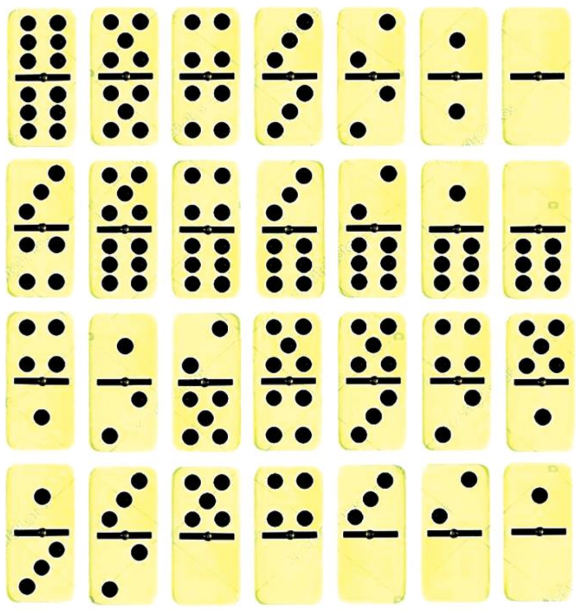
É importante salientar que as observações que constam nas grades de correção deste caderno são apenas pressupostos de resolução, cabendo ao professor analisar os registros dos alunos e não considerar as observações indicadas como norma padrão e que o objetivo maior é a proposição de uma grade de correção pelo próprio professor e assim realizar uma análise de acordo com a realidade do processo de ensino-aprendizagem desenvolvido em sala de aula.

Equipe Curricular de Matemática
CEFAF/CGEB

Habilidade	Identificar a probabilidade como uma razão.
MP11	

Questão 01

De um jogo de dominó, foi sorteada uma de suas peças.
A probabilidade da soma dos pontos dessa peça de dominó ser um número múltiplo de 3 é dada pela razão:



A) $\frac{7}{28}$
B) $\frac{8}{28}$
C) $\mathbf{\frac{9}{28}}$
D) $\frac{28}{9}$
E) $\frac{28}{7}$

GRADE DE CORREÇÃO

(A)	**Resposta incorreta**	O aluno pode ter montado incorretamente a lista de casos favoráveis, esquecendo de contar os pares com zero, (0,3) e (0,6), obtendo esta razão.

(B)	**Resposta incorreta**	O aluno que indicou esta resposta pode tê-lo feito de modo aleatório ou realizou a contagem errada do número de casos favoráveis para a situação.

(C)	**Resposta correta**	**O aluno mostra ter interpretado de modo correto o problema e soube buscar os valores que interessava: Ele pode ter recorrido à imagem apresentada ou pode ter feito:** $\boldsymbol{P(m\acute{u}ltiplos\ de\ 3) = \frac{n\acute{u}mero\ de\ casos\ favor\acute{a}veis}{n\acute{u}mero\ total\ de\ casos} = \frac{9}{28}}$

(D)	**Resposta incorreta**	Ao optar por esta alternativa o aluno parece ter calculado os valores corretamente, porém inverteu a razão colocando o número total de casos no numerador e o número de casos favoráveis no numerador.

(E)	**Resposta incorreta**	O aluno possivelmente cometeu dois enganos, um ao obter o número total de casos favoráveis, esquecendo de contar 2 deles. O outro foi o de tomar a razão de probabilidade invertida.

Habilidade	Identificar a probabilidade como uma razão.
MP11	

Questão 02

A tabela abaixo apresenta a relação de peças que compõem um jogo de xadrez.

Cor / Peça	Torre	Cavalo	Bispo	Peão	Rei	Rainha	Total
Branca	2	2	2	8	1	1	16
Preta	2	2	2	8	1	1	16
Total	4	4	4	16	2	2	32

Essas peças foram todas guardadas em uma caixa. A probabilidade de, sem olhar, retirarmos dessa caixa um bispo preto é:

A) $\frac{1}{32}$

B) $\mathbf{\frac{1}{16}}$

C) $\frac{1}{8}$

D) $\frac{1}{4}$

E) $\frac{1}{2}$

(A)	**Resposta incorreta**	Ao escolher esta alternativa o aluno interpretou como número de casos favoráveis o valor 1, embora tenha considerado corretamente o número total de peças.

(B)	Resposta correta	**O aluno interpretou o enunciado, calculou corretamente a probabilidade de ocorrer um bispo preto na extração de uma peça:** $\boldsymbol{P(bispo\ preto) = \frac{número\ bispos\ pretos}{número\ total\ de\ peças} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}}$**.**

(C)	**Resposta incorreta**	Ao optar por esta resposta o aluno pode ter considerado apenas o total de peças pretas para chegar à probabilidade procurada e dessa forma obteve o valor 1/8.

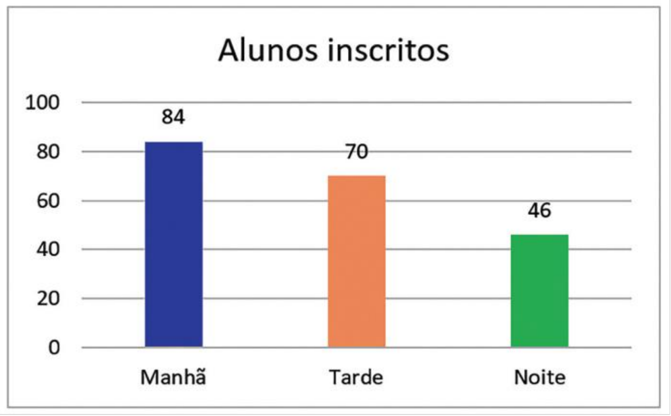
(D)	**Resposta incorreta**	O aluno que chegou ao valor 1/4 deve ter considerado todos os bispos da coleção, dividindo essa quantidade pela quantidade de peças pretas. Pode ter chegado a esse resultado por cálculo mental ou ainda ter escolhido essa resposta aleatoriamente.

(E)	**Resposta incorreta**	Ao optar por esta alternativa o aluno pode ter utilizado a quantidade de bispos pretos dividindo esse valor pelo total de bispos, chegando em 1/2.

Habilidade	Expressar uma probabilidade na forma percentual.
MP12	

Questão 03

Uma escola vai enviar 10 alunos a um estudo orientado sobre a preservação do ambiente. O gráfico abaixo apresenta o número de alunos inscritos.



A probabilidade, na forma percentual, do primeiro aluno sorteado ser do período da manhã é:

A) 23,8%
B) 33,3%
C) 42,0%
D) 50,0%
E) 84,0%

GRADE DE CORREÇÃO

(A)	**Resposta incorreta**	Ao escolher esta alternativa o aluno pode ter considerado o número total de alunos, mas no cálculo da probabilidade dividiu o total de alunos pelo número dos que frequentam o período da manhã obtendo 2,38, que considerou como 23,8%.

(B)	**Resposta incorreta**	O aluno que optou por esta alternativa pode ter considerado que a probabilidade seria dada por 1/3, uma cor (azul) sobre o total de cores do gráfico, que transformada em porcentagem corresponde a 33,3%.

(C)	**Resposta correta**	**Ao optar por esta resposta o aluno obteve o total de alunos candidatos, e em seguida obteve o percentual correspondente, podendo ter calculado:** $\boldsymbol{P(aluno\ da\ manhã) = \frac{número\ alunos\ da\ manhã}{número\ total\ de\ alunos} = \frac{84}{200} = 42\%.}$

(D)	**Resposta incorreta**	O aluno que optou por este valor desconsiderou o enunciado ou não conhece esse conteúdo. Optou por 50% como valor de um percentual conhecido. Pode ter escolhido aleatoriamente essa alternativa.

(E)	**Resposta incorreta**	Ao optar por esta alternativa o aluno apenas considerou o número de alunos da manhã inscritos e assumiu esse valor como percentual e resposta à questão.

Habilidade	Expressar uma probabilidade na forma percentual.
MP12	

Questão 04

Uma clínica especializada trata de Doenças Vasculares (DV) e Doenças do Coração (DC). No ano passado 120 pessoas procuraram a clínica com DV e 180 pessoas com DC. Pacientes com DV tiveram cura em 75% dos casos e pacientes com DC tiveram cura em 85% dos casos. A probabilidade de um paciente dessa clínica ter saído curado foi de:

A) 81%
B) 80%
C) 61%
D) 53%
E) 19%

(A)	**Resposta correta**	**O aluno compreendeu o enunciado e identificou os procedimentos necessários para o cálculo da probabilidade pedida. Ele pode ter feito:** **Percentual de pacientes com DV: 120/300 = 40%; com DC: 180/300=60%** **Para determinar a probabilidade de cura de cada tipo de doença tem-se:** $DV\ (40\%)\begin{cases} com\ cura\ (75\%) \rightarrow 40\% \times 75\% = 0{,}4 \times 0{,}75 = 0{,}3 = 30\% \\ sem\ cura\ (25\%) \rightarrow 40\% \times 25\% = 0{,}4 \times 0{,}25 = 0{,}1 = 10\% \end{cases}$ $DC\ (60\%)\begin{cases} com\ cura\ (85\%) \rightarrow 60\% \times 85\% = 0{,}6 \times 0{,}85 = 0{,}51 = 51\% \\ sem\ cura\ (15\%) \rightarrow 60\% \times 15\% = 0{,}6 \times 0{,}15 = 0{,}09 = 9\% \end{cases}$ **A probabilidade de um paciente sair curado dessa clínica será dado por:** **P(DV com cura)+P(DC com cura) = 30% + 51% = 81%**

(B)	**Resposta incorreta**	O aluno que optou por esta alternativa pode ter pensado a solução considerando apenas os percentuais de cura dados no problema, calculando a média entre eles.

(C)	**Resposta incorreta**	O aluno que escolheu esta resposta pode ter realizado os cálculos dos percentuais de cada uma das situações, cura e sem cura, mas ao final confundiu-se com os valores e calculou 10% + 51% = 61%.

(D)	**Resposta incorreta**	O aluno pode ter considerado a soma dos percentuais dados no problema como valor absoluto e dividiu-o por 300: 160/300, chegando a um valor aproximado de 53%.

(E)	**Resposta incorreta**	Ao optar por esta alternativa o aluno pode ter realizado todos os cálculos, mas confundiu-se com os resultados e ficou com a probabilidade do paciente não sair curado da clínica: 19%.

Habilidade MP13	Calcular a probabilidade simples da ocorrência de um evento.

Questão 05

Num estacionamento as vagas para carros são numeradas de 1 a 40. A probabilidade do primeiro motorista, ao estacionar, escolher uma vaga que corresponda a um número primo é:

A) $\frac{10}{3}$
B) $\frac{5}{3}$
C) $\frac{3}{5}$
D) $\frac{1}{2}$
E) $\mathbf{\frac{3}{10}}$

GRADE DE CORREÇÃO

(A)	**Resposta incorreta**	O aluno parece ter reconhecido que são 12 possibilidades de números primos nas 40 vagas do estacionamento, porém ao montar a probabilidade confunde-se e inverte a relação obtendo 40/12 ou 10/3.

(B)	**Resposta incorreta**	O aluno que optou por esta alternativa pode não ter entendido o enunciado e considerou os números primos de 1 a 40 comparados com os números ímpares de 1 a 40 e ao montar a probabilidade inverte e escreve 20/12 = 5/3.

(C)	**Resposta incorreta**	O aluno pode ter assinalado esta resposta porque relacionou os números primos de 1 a 40 com os números ímpares de 1 a 40 obtendo 12/20 ou 3/5.

(D)	**Resposta incorreta**	O aluno pode ter confundido número primo com número ímpar e considerou a probabilidade 20/40 ou ½.

(E)	**Resposta correta**	**O aluno compreendeu o enunciado, identificou os 12 números primos de 1 a 40 e calculou 12/40 ou 3/10.**

Habilidade	Calcular a probabilidade simples da ocorrência de um evento.
MP13	

Questão 06

Um baralho comum é composto de 4 naipes e em cada naipe tem-se 13 cartas de Ás a Rei. A probabilidade de, sem olhar, retirarmos uma carta que seja uma figura de ouros é:

A) $\frac{24}{52}$
B) $\frac{3}{12}$
C) $\frac{12}{52}$
D) $\frac{4}{52}$
E) $\boldsymbol{\frac{3}{52}}$

(A)	**Resposta incorreta**	O aluno teve dificuldade com o enunciado e acabou por considerar as 12 cartas de ouros mais as 12 figuras chegando a 24/52.
(B)	**Resposta incorreta**	O aluno conseguiu enumerar as cartas de ouros com figuras, mas não elencou o conjunto onde as cartas seriam sorteadas, considerando apenas o naipe de ouros, que o levou a 3/12.
(C)	**Resposta incorreta**	O aluno não conseguiu enumerar as cartas a serem sorteadas (figuras de ouros) e acabou por considerar todas as cartas de ouros com e sem figuras, obtendo 12/52.
(D)	**Resposta incorreta**	O aluno interpretou o problema, mas errou ao elencar as cartas a serem selecionadas, tendo incluído o Ás como figura. Assim chegou ao valor 4/52.
(E)	**Resposta correta**	**O estudante interpretou corretamente o problema e pode ter feito:** **1 baralho é constituído de 4 naipes. Cada naipe de 13 cartas: Ás, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Valete, Dama e Rei. Total de cartas: 52.** **Figuras de ouros: Valete, Dama e Rei. 3 cartas.** **P(figura de ouro)=3/52.**

Habilidade MP14	Resolver problemas envolvendo o princípio multiplicativo da contagem.

Questão 07

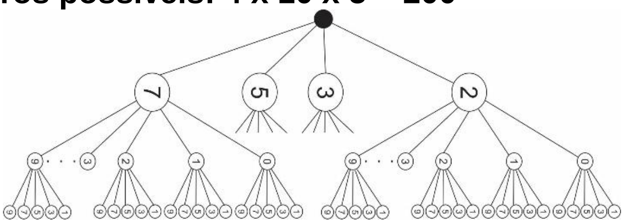
Quantos são os números impares de três algarismos iniciados por um número primo?

A) 500
B) 250
C) 200
D) 100
E) 80

GRADE DE CORREÇÃO

(A)	**Resposta incorreta**	O aluno teve dificuldade com o enunciado e acabou por considerar a formação de um número com os 3 algarismos ímpares, sem levar em conta o pedido do enunciado que o primeiro dígito deveria ser primo.

(B)	**Resposta incorreta**	O aluno que escolheu esta alternativa deve ter considerado o 1 como primo e assim chegou a multiplicação de 5x10x5.

(C)	**Resposta correta**	**O aluno interpretou o enunciado, fez a contagem dos dígitos possíveis na centena, na dezena e na unidade (impares) e chegou ao produto 4x10x5. Ele pode ter considerado:** **Primeiro digito: 2,3,5,7** **Segundo dígito:0,1,2,3,...,9** **Terceiro dígito: 1,3,5,7,9** **Números possíveis: 4 x 10 x 5 = 200** 

(D)	**Resposta incorreta**	O aluno interpretou o problema, mas errou ao elencar para as dezenas os números ímpares. Dessa forma seu produto 4x5x5 aponta para o valor dessa alternativa.

(E)	**Resposta incorreta**	O estudante interpretou o problema, mas nessa interpretação entendeu que os dígitos da centena e da dezena deveriam ser primos, o que o levou ao produto 4x4x5.

Habilidade MP14	Resolver problemas envolvendo o princípio multiplicativo da contagem.

Questão 08

Atualmente as placas de automóveis são formadas por três letras e quatro números. Um modo de calcular o total de possibilidades de placas diferentes que podem ser formadas está indicado em:

A) 26 · 26 · 26 · 10 · 10 · 10 · 10
B) 26 · 26 · 26 · 10 · 9 · 8 · 7
C) 26 · 26 · 26 · 9 · 10 · 10 · 10
D) 26 · 25 · 24 · 10 · 10 · 10 · 10
E) 26 · 25 · 25 · 10 · 9 · 8 · 7

GRADE DE CORREÇÃO

(A)	**Resposta correta**	**O aluno reconheceu que ao montar uma placa com letras e números não há restrições sobre não repetir letras ou números, portanto para cada uma das posições pode-se usar as 26 letras e os 10 algarismos.**

(B)	**Resposta incorreta**	O aluno pode ter considerado a possibilidade de repetir letras mas não repetir algarismos.

(C)	**Resposta incorreta**	O aluno pode ter pensado na possibilidade de repetir as letras e para o primeiro algarismo após as letras eliminou a possibilidade de se colocar o zero.

(D)	**Resposta incorreta**	O aluno pode ter interpretado que não há possibilidade de repetir as letras, mas os algarismos sim.

(E)	**Resposta incorreta**	O aluno pode ter entendido que não se tem repetições de letras e de algarismos para a formação de placas de automóveis.

Habilidade MP16	Resolver problemas de análise combinatória, que envolvam arranjos simples e/ou combinações.

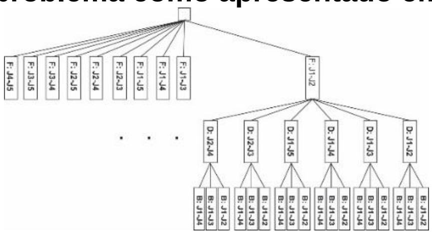
Questão 09

Pedro está colecionando figurinhas da Copa de Futebol de 2018. Ele tem 5 figurinhas repetidas de jogadores da França, 4 de jogadores da Dinamarca e 3 de jogadores do Brasil. Ele quer montar um pacote de figurinhas contendo 2 jogadores de cada um destes três times, de quantas maneiras ele pode fazê-lo?

A) 720
B) 180
C) 120
D) 90
E) 60

Grade de Correção

(A)	**Resposta incorreta**	O aluno pode não ter compreendido o enunciado e utilizou a ideia de arranjo para o cálculo do resultado, levando-o a obter 720.

(B)	**Resposta correta**	**O aluno interpretou o enunciado, calculou as combinações e utilizou o princípio multiplicativo ao final. Pode ter resolvido de várias formas:** **Primeiro as combinações e depois o cálculo da solução pelo princípio multiplicativo da contagem.** **França:** $F_{5,2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{120}{12} = 10$ **Dinamarca:** $D_{4,2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{24}{4} = 6$ **Brasil:** $D_{3,2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3$ **Pelo princípio fundamental da contagem temos 10 x 6 x 3 possibilidades, ou seja, 180 possibilidades.** **Pode-se resolver o problema como apresentado em seguida.** 

(C)	**Resposta incorreta**	O aluno pode ter interpretado o enunciado, calculado as combinações para França e Dinamarca e deve ter incorrido em erro na combinação para jogadores do Brasil, obtendo 2 em vez de 3, o que o levou ao valor 120.

(D)	**Resposta incorreta**	O aluno compreendeu o problema e pode ter calculado as combinações de Dinamarca e Brasil corretamente, mas não calculou corretamente a da França dividindo por 24 e não por 12, chegando então ao valor 90.

(E)	**Resposta incorreta**	O aluno pode ter dificuldade com o enunciado e acabou por multiplicar a quantidade de figurinhas de cada equipe, chegando ao valor 60. Outra alternativa para o erro é o aluno não ter multiplicado pelo número de pares relativos ao Brasil.

Habilidade	Resolver problemas de análise combinatória, que envolvam arranjos simples e/ou combinações.
MP16	

Questão 10

Para formar uma comissão com 7 alunos, se candidataram 6 do Ensino Fundamental e 4 do Ensino Médio. Quantas formas de compor esta comissão existem, de forma que sempre exista pelo menos um aluno do Ensino Médio participando?

A) 720
B) 630
C) 168
D) 120
E) 110

Grade de Correção

(A)	**Resposta incorreta**	O aluno pode ter interpretado corretamente o enunciado, mas ao utilizar a fórmula da combinatória considerou apenas o fatorial do número de elementos combinados, não multiplicando pela diferença entre o total de elementos e os elementos combinados, chegando ao valor 720.

(B)	**Resposta incorreta**	O aluno pode ter calculado todas as combinações possíveis com os alunos do EF e todas as possíveis com os alunos do EM, mas somou todas do EF e depois todas as do EM, finalizando com o produto desses dois resultados.

(C)	**Resposta incorreta**	O aluno parece não ter compreendido o problema e apenas multiplicou todos os números presentes no enunciado.

(D)	**Resposta correta**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e pode ter resolvido o problema por dois caminhos. O primeiro, mais simples passa pela consideração de que como 4 alunos em 10 são do Ensino Médio, qualquer comissão com 7 alunos terá pelo menos um aluno do Ensino Médio, assim o problema se resume a calcular as combinações de 10, 7 a 7.** **Comissões:** $C_{10,7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10\times9\times8}{3\times2} = 120.$ **O segundo seria realizar os cálculos de cada combinação para cada um dos grupos do EF e do EM:** $C_{6,6} = 1$; $C_{6,5} = 6$; $C_{6,4} = 15$; $C_{6,3} = 20$ **e** $C_{4,4} = 1$; $C_{4,3} = 4$; $C_{4,2} = 6$; $C_{4,1} = 4$ **e, depois multiplicar cada combinação do EF pela correspondente do EM:** $C_{6,6} \times C_{4,1} = 4$; $C_{6,5} \times C_{4,2} = 36$; $C_{6,4} \times C_{4,3} = 60$; $C_{6,3} \times C_{4,4} = 20$ **Em seguida, obtém-se o total de combinações: 4 + 36 + 60 + 20 = 120.**

(E)	**Resposta incorreta**	O aluno que assinalou esta alternativa pode ter feito de modo aleatório.

Habilidade MP17	Identificar a regularidade na construção do Triângulo de Pascal.

Questão 11

Aplicando a regularidade presente no triângulo de Pascal podemos afirmar que os espaços em branco devem ser preenchidos, respectivamente, pelos números:

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10		5	1			
1	6	15		15	6	1		
1	7	21		35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

A) 10, 20, 35
B) 14, 29, 50
C) 15, 30, 56
D) 15, 21, 28
E) 25, 36, 49

(A)	**Resposta correta**	**O aluno que escolheu esta resposta mostra que identifica a regra de formação do triângulo de Pascal, calculando: 6 + 4 = 10; 10 + 10 = 20; 15 + 20 = 35.**

(B)	**Resposta incorreta**	O aluno que indicou esta resposta pode ter considerado as adições: 10 + 4 = 14; 15 + 14 = 29; 21 + 29 = 50.

(C)	**Resposta incorreta**	O aluno que optou por esta alternativa pode ter considerado as adições dos dois termos que ladeiam os espaços: 10 + 5 = 15; 15 + 15 = 30; 21 + 35 = 56.

(D)	**Resposta incorreta**	O aluno considerou fazer a soma dos dois termos anteriores: 10 + 5 = 15; 15 + 6 = 21; 21 + 7 = 28

(E)	**Resposta incorreta**	O aluno pode ter feito a soma de dois termos seguintes da coluna do lado esquerdo: 10 + 15 = 25; 21 + 15 = 36; 28 + 21 = 49.

Habilidade MP17	Identificar a regularidade na construção do Triângulo de Pascal.

Questão 12

Ao montar o triângulo de Pascal abaixo, um aluno pulou uma de suas linhas.

								1
							1	1
						1	2	1
					1	3	3	1
				1	4	6	4	1
			1	5	10	10	5	1
	1	7	21	35	35	21	7	1
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Qual foi a linha que o aluno pulou?

A) 3ª linha
B) 4 ª linha
C) 5 ª linha
D) 6 ª linha
E) 7ª linha

GRADE DE CORREÇÃO

(A)	**Resposta incorreta**	O aluno que assinalou esta resposta pode ter feito uma escolha aleatória, pois as linhas iniciais são muito simples de serem observadas e completadas.

(B)	**Resposta incorreta**	O aluno que considerou que esta era a linha faltante pode não ter entendido a questão por não identificar as regularidades presentes no triângulo.

(C)	**Resposta incorreta**	O aluno pode ter considerado que era esta linha faltante por perceber que da 4ª para a 5ª linha há um aumento nos valores um pouco diferente das linhas anteriores.

(D)	**Resposta incorreta**	O aluno pode ter considerado esta linha como pulada por considerar que o salto de valores do 4 para 10 e do 6 para 10 não teriam a mesma correspondência.

(E)	**Resposta correta**	**O aluno pode reconhecer a linha faltante por identificar regularidades na construção do triângulo de Pascal. Ele pode ter percebido que: na primeira coluna à esquerda da coluna de 1 falta o 6 na sequência numérica; a fileira inclinada toda formada com 1 sofre uma interrupção, além da regularidade mais usada que é a regra geral de formação do triângulo de Pascal:** $P_{1,1} = 1$ $P_{n,1} = P_{n,n} = 1, para\ n > 1$ $P_{n,i} = P_{n-1,i} + P_{n-1,i-1}, para\ i > 2$

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional
Coordenador: Marcelo Schwarzberg Cabral Milanello

Departamento de Avaliação Educacional
Diretora: Patricia de Barros Monteiro
Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Planejamento e Análise de Avaliações
Diretor: Juvenal de Gouveia

Ademilde Ferreira de Souza, Cristiane Dias Mirisola, Soraia Calderoni Statonato, Márcia Soares de Araújo Feitosa

Centro de Aplicação de Avaliações
Diretora: Isabelle Regina de Amorim Mesquita

Denis Delgado dos Santos, José Guilherme Brauner Filho, Kamila Lopes Candido, Nilson Luiz da Costa Paes, Teresa Miyoko Souza Vilela

Coordenadoria de Gestão da Educação Básica
Coordenadora: Célia Maria Monti Viam Rocha

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão da Educação Básica
Diretor: Herbert Gomes da Silva

Centro do Ensino Fundamental dos Anos Finais, Ensino Médio e Educação Profissional
Diretora: Ana Joaquina Simões Sallares de Mattos Carvalho

Autoria
Maria Silvia Brumatti Sentelhas
Robespierre Sentelhas

Equipe Curricular CGEB de Matemática
Leitura crítica e validação do material
João dos Santos Vitalino, Maria Adriana Pagan, Otávio Yoshio Yamanaka e Vanderley Aparecido Cornatione

Representantes do CAPE
Leitura crítica, validação e adaptação do material para os deficientes visuais
Tânia Regina Martins Resende