GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

COMENTÁRIOS E RECOMENDAÇÕES PEDAGÓGICAS

Subsídios para o
Professor de Matemática

2ª série do Ensino Médio

Prova de Matemática

São Paulo
1º Semestre de 2014

6ª Edição

Avaliação da Aprendizagem em Processo

APRESENTAÇÃO

A *Avaliação da Aprendizagem em Processo* se caracteriza como ação desenvolvida de modo colaborativo entre a Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional e a Coordenadoria de Gestão da Educação Básica, que também contou com a contribuição de Professores do Núcleo Pedagógico de diferentes Diretorias de Ensino.

Aplicada desde 2011, abrangeu inicialmente o 6º ano do Ensino Fundamental e a 1ª série do Ensino Médio. Gradativamente foi expandida para os demais anos/séries (do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e 1ª a 3ª série do Ensino Médio) com aplicação no início de cada semestre do ano letivo.

Essa ação, fundamentada no Currículo do Estado de São Paulo, tem como objetivo fornecer indicadores qualitativos do processo de aprendizagem do educando, a partir de habilidades prescritas no Currículo. Dialoga com as habilidades contidas no SARESP, SAEB, ENEM e tem se mostrado bem avaliada pelos educadores da rede estadual. Propõe o acompanhamento da aprendizagem das turmas e do aluno de forma individualizada, por meio de um instrumento de caráter diagnóstico. Objetiva apoiar e subsidiar os professores de Língua Portuguesa e de Matemática que atuam nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio da Rede Estadual de São Paulo, na elaboração de estratégias para reverter desempenhos insatisfatórios, inclusive em processos de recuperação.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação, na forma de cadernos de provas para os alunos, também foram elaborados documentos específicos de orientação para os professores – Comentários e Recomendações Pedagógicas – contendo o quadro de habilidades, gabaritos, itens, interpretação pedagógica das alternativas, sugestões de atividades subsequentes às análises dos resultados e orientação para aplicação e correção das produções textuais. Espera-se que, agregados aos registros que o professor já possui, sejam instrumentos para a definição de pautas individuais e coletivas que, organizadas em um plano de ação, mobilizem procedimentos, atitudes e conceitos necessários para as atividades de sala de aula, sobretudo, aquelas relacionadas aos processos de recuperação da aprendizagem.

COORDENADORIA DE INFORMAÇÃO, MONITORAMENTO E AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

COORDENADORIA DE GESTÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 2 12/18/13 5:41 PM

Avaliação da Aprendizagem em Processo – Matemática

Nos dois segmentos (Ensino Fundamental Anos Finais e Ensino Médio) avaliados, as questões foram idealizadas de modo a atender habilidades já desenvolvidas em períodos anteriores, seja no ano, ou no semestre letivo. Particularmente no 6º ano (5ª série) do EF foram utilizadas as expectativas de aprendizagens contidas na grade do 5º ano (4ª série) do EF.

As questões apresentadas retratam uma parte significativa do que foi previsto no conteúdo curricular de Matemática e poderão permitir a verificação de algumas habilidades que foram ou não desenvolvidas no processo de ensino e aprendizagem.

Composição:

1. *Anos/séries participantes:*
   6º ao 9º anos do Ensino Fundamental;
   1ª a 3ª séries do Ensino Médio.

2. *Composição das provas de Matemática:*
   10 questões objetivas e algumas dissertativas.

3. *Matrizes de referência (habilidades/descritores) para a constituição de itens das provas objetivas:*
   – Currículo do Estado de São Paulo.

4. *Banco de questões:*
   – Questões inéditas e adaptadas, formalizadas a partir das habilidades prescritas no Currículo.

EQUIPE DE MATEMÁTICA

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 3 12/18/13 5:41 PM

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA A AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DE MATEMÁTICA

2ª SÉRIE - ENSINO MÉDIO

Nº do item	Habilidades
1	Saber reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens, expressando-as matematicamente quando possível.
2	Compreender a construção do gráfico de funções do 1º grau, sabendo caracterizar crescimento, decrescimento e taxa de variação.
3	Compreender a construção do gráfico de funções de 2º grau como expressões de proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado da outra, sabendo caracterizar os intervalos de crescimento, os sinais da função e os valores extremos.
4	Saber utilizar em diferentes contextos as funções de 1º e de 2º graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos.
5	Conhecer a função exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento.
6	Saber resolver equações e inequações simples, usando propriedades de potências e logaritmos.
7	Saber usar de modo sistemático relações trigonométricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos.
8	Conhecer algumas relações trigonométricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos.
9	Saber aplicar as propriedades dos polígonos regulares no problema da pavimentação de superfícies.
10	Visualizar as formas espaciais a partir de suas representações planas, tais como vistas e planificações.
11	Saber utilizar, em diferentes contextos, funções de 1º e de 2º graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos.
12	Saber usar de modo sistemático relações trigonométricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos.

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 4 12/18/13 5:41 PM

Habilidade:

Saber reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens, expressando-as matematicamente quando possível.

Questão 01 – Teste

Suponha que a sequência de figuras abaixo continue seguindo sempre o mesmo padrão.

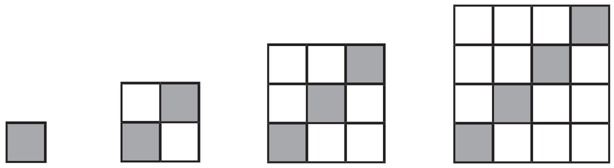


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

Na figura de número ***n***, a quantidade ***b*** de quadradinhos brancos pode ser dada pela expressão

(A) $b = n$.

(B) $b = 2n$.

(C) $\mathbf{b = n^2 - n}$**.**

(D) $b = n^2$.

Comentários e recomendações pedagógicas

O reconhecimento de regularidades é uma das habilidades mais importantes da matemática e do pensamento humano em geral. É esse reconhecimento que possibilita que façamos generalizações, que possamos categorizar objetos e nomeá-los etc. Por isso, é desejável que questões de observação de padrões e regularidades sejam trabalhadas sempre que possível.

Para que esse reconhecimento de regularidades aconteça e seja expresso, é necessário dominar e utilizar alguma forma de linguagem. No caso dessa questão, o reconhecimento do padrão e sua expressão algébrica precisam se conjugar para a correta resolução.

A sequência só está representada até a quarta figura, mas é natural que se avance mais um pouco para averiguar a compreensão global da regularidade. Esse é um processo não guiado explicitamente pela questão, mas que o professor deve estimular em sala de aula quando trabalhar com questões desse tipo.

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 5 12/18/13 5:41 PM

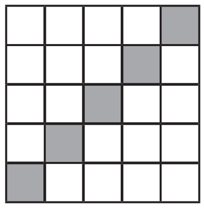


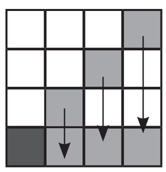
Figura 5

Vamos organizar informações por meio de uma tabela, para ter um panorama das várias relações que os alunos podem vir a observar na sequência de figuras.

	posição da figura	quantidade total de quadradinhos	quantidade de quadradinhos cinzas	***b***: quantidade de quadradinhos brancos
Figura 1	1	$1^2 = 1$	1	$1 - 1 = 0$
Figura 2	2	$2^2 = 4$	2	$4 - 2 = 2$
Figura 3	3	$3^2 = 9$	3	$9 - 3 = 6$
Figura 4	4	$4^2 = 16$	4	$16 - 4 = 12$
Figura 5	5	$5^2 = 25$	5	$25 - 5 = 20$
Figura ***n***	***n***	$\boldsymbol{n^2}$	***n***	$\boldsymbol{n^2 - n}$

A linha correspondente à figura ***n***, claro, é o objetivo da questão. Mas, para chegar lá, há observações anteriores. Uma primeira constatação é que ***n***, além de indicar a própria posição da figura na sequência, indica também a quantidade de quadradinhos que forma o lado das figuras.

Depois, há que se perceber que a quantidade total de quadradinhos da figura é o lado ***n*** ao quadrado. E, por fim, algo que pode ser percebido numérica ou visualmente é que a quantidade de quadradinhos cinzas é igual a ***n***.



A partir daí, fica fácil concluir que $\boldsymbol{b = n^2 - n}$.

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 6 12/18/13 5:41 PM

Grade de correção

Alternativa	Interpretação
(A) $b = n$	É possível que o aluno não tenha compreendido o que foi pedido. Esta alternativa estaria correta se ***b*** representasse a quantidade de quadradinhos cinzas. Mas pode ser também que o aluno tenha escolhido esta alternativa meramente por sua simplicidade, na ausência de compreensão real da questão.
(B) $b = 2n$	Esta alternativa se adéqua perfeitamente à terceira figura da sequência, mas não se ajusta às demais. Eventualmente, tendo percebido essa relação específica, o aluno pode ter se precipitado na generalização.
(C) $\boldsymbol{b = n^2 - n}$	**Resposta correta**. O aluno percebeu o padrão e soube escrevê-lo algebricamente. Ou, o que também é satisfatório, soube testar qual das alternativas se encaixa em todas as figuras da sequência.
(D) $b = n^2$	Aqui, o aluno expressou ***b*** como sendo a quantidade total de quadradinhos da figura. É importante averiguar a correta compreensão do significado de cada variável.

Algumas referências

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as respostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série, Volume 1
   • Situação de Aprendizagem A – Sequências: padrões e regularidades
2. *Álgebra: das variáveis às equações e funções.* Eliane Reame de Souza; Maria Ignez de S. V. Diniz, CAEM – IME – USP.

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 7 12/18/13 5:41 PM

Habilidade:

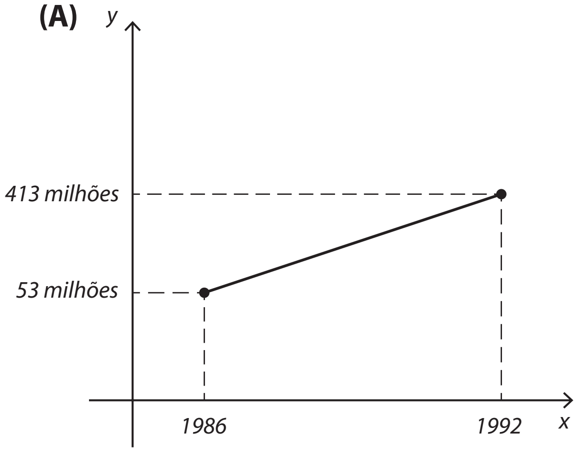
Compreender a construção do gráfico de funções do 1º grau, sabendo caracterizar crescimento, decrescimento e taxa de variação.

Questão 02 – Teste

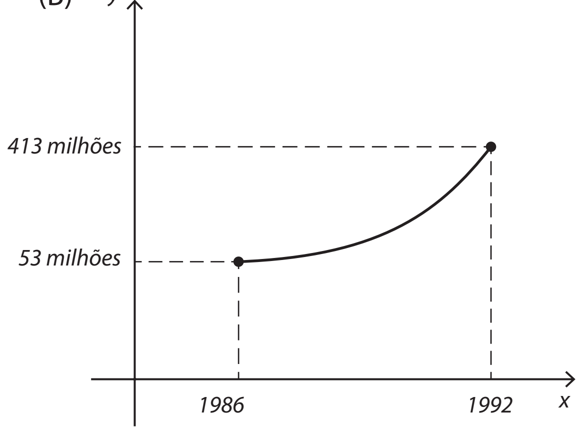
O CD *(compact disc)* foi inventado em 1979, começou a ser comercializado em 1982 e rapidamente tornou-se muito popular. Para se ter ideia, em 1986 o número de vendas chegou a 53 milhões e, a partir daí, foi aumentando cerca de 60 milhões de unidades ao ano até 1992.

O gráfico que melhor representa as vendas de CDs entre os anos de 1986 e 1992 é

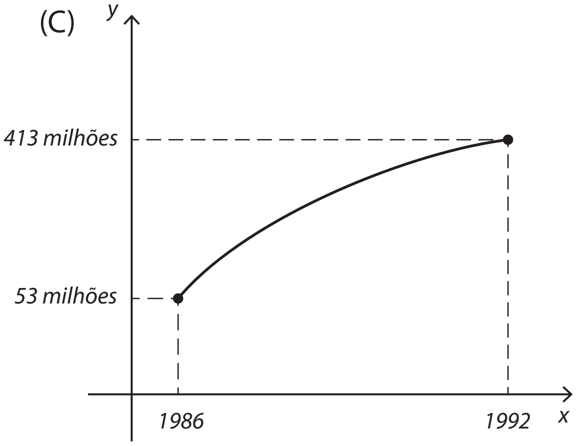
(A)



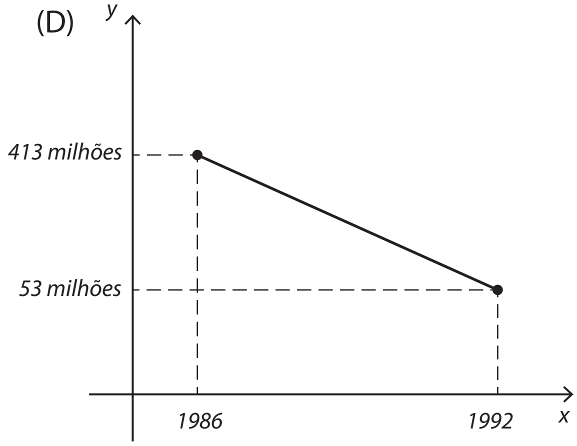
(B)



(C)



(D)



(Adaptada de *CONNALLY E. et all.* ***Functions Modeling Change****. 2nd edition, John Wiley & Sons Inc., 2004.*)

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 8 12/18/13 5:41 PM

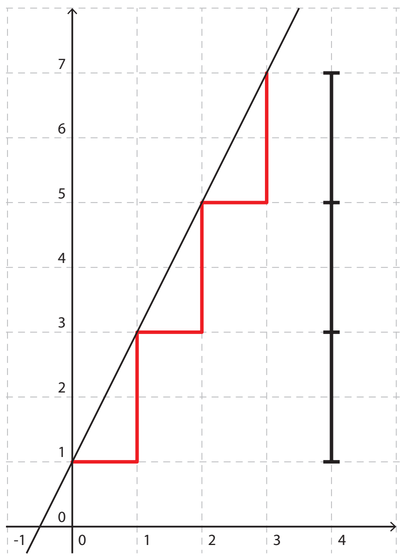
Comentários e recomendações pedagógicas

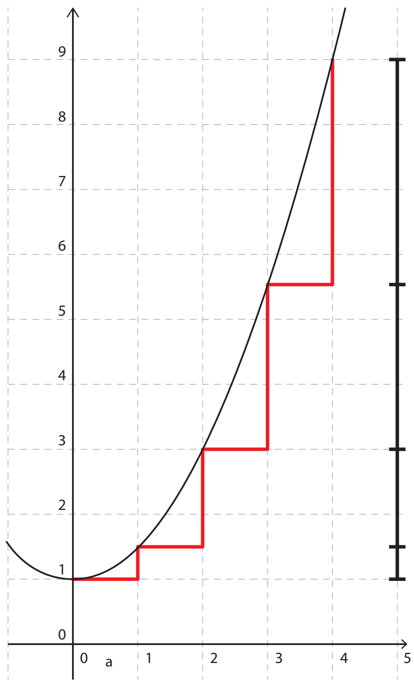
O estudo das funções é um dos assuntos da matemática onde fica mais evidente a necessidade de trabalhar, simultaneamente, com diversos tipos de representação: verbal, numérica, gráfica, algébrica. A verdadeira apreensão do conceito só pode se dar quando ele é cercado por esses diversos tipos de representação.

Uma das mais importantes características de uma função afim é seu crescimento "uniforme". O que caracteriza com exatidão essa propriedade é a taxa média de variação constante:

$$T.M.V. = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = a$$

Graficamente, isso se expressa por um acréscimo (ou decréscimo) constante em ***y***, a cada unidade que se avança em ***x***. A menos que o gráfico seja uma reta, isso não acontece.





Na situação-problema apresentada, a expressão verbal da taxa média de variação constante é a frase "foi aumentando cerca de 60 milhões de unidades ao ano".

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 9 12/18/13 5:41 PM

Grade de correção

Alternativa	Interpretação
(A)	**Resposta correta**. O aluno associou corretamente uma função afim crescente, cujo gráfico é uma reta, à taxa média de variação constante, expressa pela frase "foi aumentando cerca de 60 milhões de unidades ao ano".
(B)	O aluno compreendeu corretamente o caráter crescente da função que associa o número de vendas de CDs ao tempo, expresso em anos. Porém, a informação "foi aumentando cerca de 60 milhões de unidades ao ano" não foi significativa para ele, a ponto de que associasse esse tipo de crescimento a uma função afim, expressa graficamente por uma reta.
(C)	Nesta alternativa, pode-se observar o mesmo que na alternativa anterior. Mas ainda há um equívoco adicional, de interpretação, ao associar os 53 milhões de CDs vendidos ao ano de 1982.
(D)	Neste caso, o aluno não identificou o caráter crescente da função que modela a situação proposta ou, se identificou, não sabe qual a expressão gráfica desse crescimento.

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série, Volume 2
   • Situação de Aprendizagem 1 – Funções polinomiais de 1º grau: representação gráfica, proporcionalidade, crescimento e decrescimento

2. *Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando microcomputador*. Maria Cristina B. Barufi; Maira Mendias Lauro, CAEM – IME – USP.

3. *Álgebra: das variáveis às equações e funções.* Eliane Reame de Souza; Maria Ignez de S. V. Diniz, CAEM – IME – USP.

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 10 12/18/13 5:41 PM

Habilidade:

Compreender a construção do gráfico de funções de 2º grau como expressões de proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado da outra, sabendo caracterizar os intervalos de crescimento, os sinais da função e os valores extremos.

Questão 03 – Teste

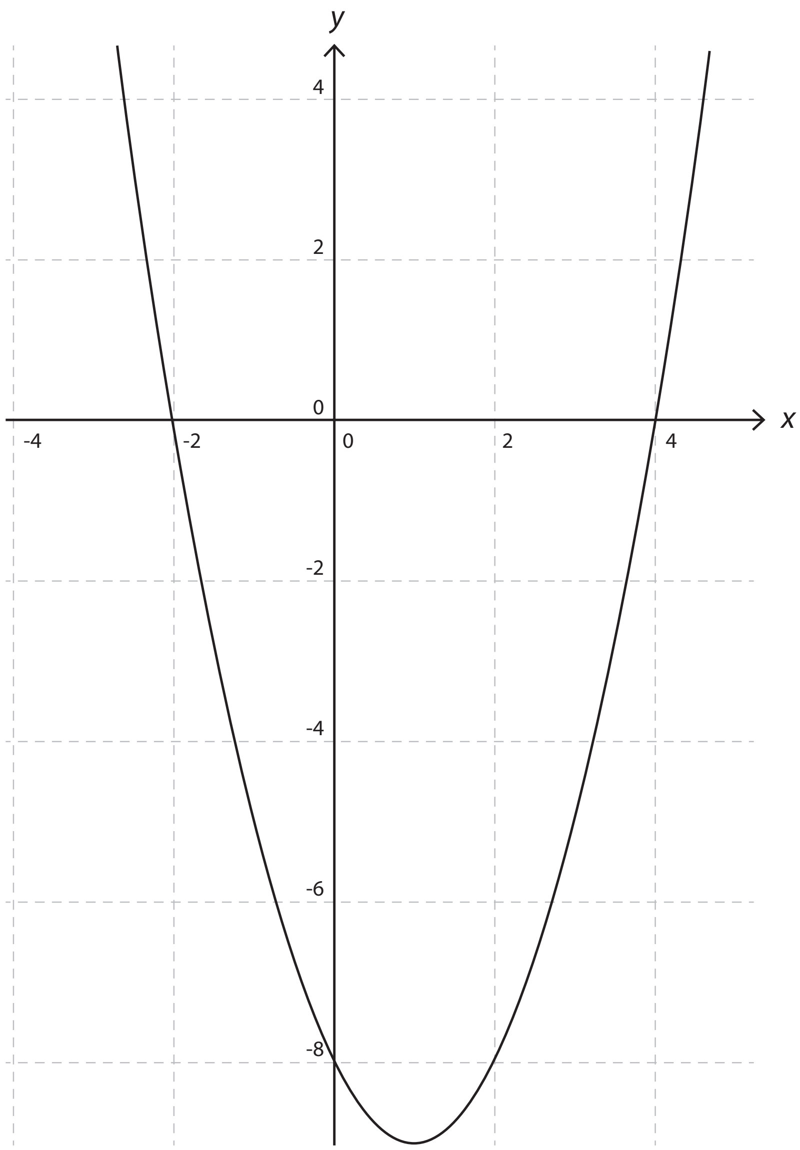
A única expressão algébrica que pode corresponder ao gráfico abaixo é

(A) $y = -x^2 + 2x + 8$.

(B) $y = 2x^2 - 8$.

(C) $y = x^2 - 2x - 8$.

(D) $y = 2x^2 - 4x - 16$.



27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 11 12/18/13 5:41 PM

Comentários e recomendações pedagógicas

O esboço do gráfico de uma função quadrática, diferentemente do que acontece numa função afim, exige a análise de diversos parâmetros. Numa função afim, bastam dois pontos para que a reta fique inteiramente determinada. No caso da função quadrática, por dois pontos passam diversas parábolas e, mesmo aumentando a quantidade de pontos, isso pode não ajudar a caracterizar o gráfico.

É importante, portanto, analisar características e pontos especiais do gráfico: *concavidade*, *raízes*, *ponto em que corta o eixo das ordenadas* e *vértice*.

No caso desta questão, o esboço do gráfico representa uma função quadrática de concavidade para cima ($a > 0$), raízes –2 e 4, passando por (0, –8) e com vértice de abscissa 1.

A análise da concavidade já permite eliminar a alternativa (A). O estudo das raízes permite eliminar (B). Resta analisar (C) e (D), mas, dentre essas, apenas (C) expressa uma função que passa por (0, –8).

Grade de correção

Alternativa	Interpretação
(A) $y = -x^2 + 2x + 8$	O aluno provavelmente não associa o sinal do coeficiente de x^2 à concavidade da parábola.
(B) $y = 2x^2 - 8$	Neste caso, o aluno não percebe os números –2 e 4 como raízes da função. Talvez não tenha assimilado o conceito de raiz. Ou pode ser que sua compreensão do plano cartesiano e sua leitura do gráfico seja falha, de modo que não consiga perceber, nos pontos em que o gráfico cruza o eixo das abscissas, a ordenada é zero. Ou ainda, não sabe determinar as raízes da função que consta na alternativa. Em qualquer dos casos, ficam apontadas dificuldades importantes, que merecem ser revistas e trabalhadas.
(C) $\boldsymbol{y = x^2 - 2x - 8}$	**Resposta correta**. O aluno identificou corretamente todos os parâmetros que deviam ser avaliados. Ou, o que também é satisfatório e até equivalente, testou corretamente dos dados do gráfico nas expressões algébricas das alternativas.
(D) $y = 2x^2 - 4x - 16$	Esta alternativa coincide em muitos aspectos com a alternativa correta, de modo que isso pode indicar certo domínio da habilidade que está sendo avaliada. No entanto, faltou exaurir os parâmetros que precisavam ser analisados. A função que tem tal expressão não tem gráfico passando por (0,–8).

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 12 12/18/13 5:41 PM

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio– 1ª série, Volume 2
   • Situação de Aprendizagem 2 – Funções polinomiais de 2º grau
   • Situação de Aprendizagem 3 – Máximos e Mínimos

2. *Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando microcomputador*. Maria Cristina B. Barufi; Maira Mendias Lauro, CAEM.

3. *Álgebra: das variáveis às equações e funções*. Eliane Reame de Souza; Maria Ignez de S. V. Diniz, CAEM – IME – USP.

Habilidade:

Saber utilizar em diferentes contextos s funções de 1º e de 2º graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos.

Questão 04 – Teste

O preço, em reais, de uma pedra preciosa é dado pelo quadrado de sua massa, em gramas. Assim, uma pedra de 7 gramas, custa R$ 49,00. Se essa pedra se partisse em dois pedaços de, por exemplo, 1 grama e 6 gramas, haveria um prejuízo de R$12,00, pois o preço que se poderia obter pelos dois pedaços juntos seria calculado assim: $1^2 + 6^2 = 37$.

Desse modo, se a pedra de fato se partir em dois pedaços, o prejuízo máximo que se pode obter é de

(A) R$ 20,00.

(B) R$ 24,00.

(C) R$ 24,50.

(D) R$ 29,50.

Comentários e recomendações pedagógicas

Os problemas de máximos e mínimos são de fundamental importância em diversas aplicações da matemática, tais como engenharia ou economia. A função quadrática é um modelo que se ajusta bem a muitas dessas aplicações, considerado o domínio adequado.

Nesta questão, a aplicação do modelo pode ser feita "traduzindo" a situação para a linguagem algébrica:

Massa do pedaço 1: x gramas $\rightarrow$ *Preço:* x^2 *reais*

Massa do pedaço 2: $(7 – x)$ *gramas* $\rightarrow$ *Preço:* $(7 – x)^2 = 49 – 14x + x^2$ *reais*

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 13 12/18/13 5:41 PM

O prejuízo P é obtido subtraindo de 49 reais o preço de cada novo pedaço de pedra:

$$P = 49 - x^2 - (49 - 14x + x^2) = -2x^2 + 14x$$

O gráfico de $P = -2x^2 + 14x$ é uma parábola de concavidade para baixo, indicando que, de fato, há um prejuízo máximo. Usando a fórmula para a abscissa do vértice, sai que o prejuízo é máximo quando $x = -14/-4 = 3{,}5$ gramas. E, nesse caso, o prejuízo é de $P = -2\,(3{,}5)^2 + 14(3{,}5) = 24{,}50$ reais.

Essa é uma resolução usual, do tipo que consta na maior parte dos materiais didáticos, mas há muitas variações possíveis. O aluno pode, por exemplo, calcular diretamente a ordenada do vértice ou, ao contrário, pode escolher um caminho indireto, calculando as coordenadas do vértice por meio da média das raízes da função (0 e 7). Ou ainda, o aluno pode resolver o problema sem fazer uso da álgebra, mas analisando a variação numericamente:

Pedaço 1	Pedaço 2	Novo preço	Prejuízo
1 grama	6 gramas	1 + 36 = 37	49 – 37 = 12
2 gramas	5 gramas	4 + 25 = 29	49 – 29 = 20
3 gramas	4 gramas	9 + 16 = 25	49 – 25 = 24

A partir daí, se a análise continuar se concentrando em números inteiros, então a tabela começará a repetir os valores de prejuízo. Isso pode fazer com que o aluno perceba uma tendência, que é: o prejuízo aumenta à medida que as massas dos dois pedaços se aproximam. Como a massa não necessariamente é um número inteiro, o equilíbrio total se dará quando cada novo pedaço tiver 3,5 gramas.

Pedaço 1	Pedaço 2	Novo preço	Prejuízo
3,5 grama	3,5 gramas	12,25 + 12,25 = 24,50	49 – 24,50 = **24,50**

Estratégias como essas devem ser valorizadas e é recomendável que o professor mostre sua relação com a abordagem usual, seu alcance e suas limitações.

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 14 12/18/13 5:41 PM

Grade de correção

Alternativa	Interpretação
(A) R$ 20,00	O aluno pode ter experimentado um único par de valores para os novos pedaço de pedra, tais como 2 e 5 gramas, caso em que, de fato, o prejuízo é de 20 reais. No entanto, esse aluno pode não ter percebido a variação: as massas dos dois pedaços de pedra são desconhecidos e, portanto, a análise deve observar como podem variar.
(B) R$ 24,00	O aluno pode ter utilizado a estratégia exposta nos comentários, porém sem se atentar para o fato de que a massa não é uma grandeza discreta, de modo que não se pode limitar a análise aos inteiros.
(C) R$ 24,50	**Resposta correta**. O aluno utilizou com sucesso quer a estratégia usual, quer uma estratégia pessoal diferente.
(D) R$ 29,50	O aluno pode ter assinalado esta alternativa simplesmente porque é a maior, uma vez que o problema perguntava pelo máximo prejuízo. Isso indica que o aluno não considerou a estrutura da situação problema como uma limitante para esse valor máximo.

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio– 1ª série, Volume 2
   - Situação de Aprendizagem 2 – Funções polinomiais de 2º grau
   - Situação de Aprendizagem 3 – Máximos e Mínimos
   - Situação de Aprendizagem 4 – Situações-problema: Modelos Matemáticos

2. *Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando microcomputador*. Maria Cristina B. Barufi; Maira Mendias Lauro, CAEM – IME – USP.

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 15 12/18/13 5:41 PM

Habilidade:

Conhecer a função exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento.

Questão 05 – Teste

Leia as situações descritas abaixo:

I. Um imóvel valoriza-se 20% a cada ano.
II. Uma colônia de bactérias duplica o número de bactérias a cada hora.

É correto afirmar que

(A) ambas as situações se referem a grandezas que crescem exponencialmente.

(B) apenas a situação I se refere a uma grandeza que cresce exponencialmente.

(C) apenas a situação II se refere a uma grandeza que cresce exponencialmente.

(D) nenhuma das situações se refere a grandezas que crescem exponencialmente.

Comentários e recomendações pedagógicas

O que caracteriza uma função exponencial é o *fator de crescimento constante*. Num domínio discreto, isso equivale a observar uma PG, em que cada novo termo é o anterior multiplicado pela razão constante, que seria esse tal fator de crescimento.

De modo geral, o domínio de uma função exponencial pode ser todo o conjunto dos números reais, então é possível descrever esse fator de crescimento constante pela razão $\frac{f(x+1)}{f(x)}$, obtida a partir de qualquer valor de x.

Nesta questão, ainda que o aluno desconheça a nomenclatura "fator de crescimento", o que se espera é que ele tenha internalizado a noção de que, se é possível obter *f(x+1)* multiplicando *f(x)* por uma constante, então, produz-se uma potência e, por esse motivo, tem-se uma função exponencial:

$$f(x+1) = a\,f(x)$$

$$f(x+2) = a\,f(x+1) = a^2\,f(x)$$

$$f(x+3) = a\,f(x+2) = a^3\,f(x)$$

...

$$f(x+n) = a\,f(x+n-1) = a^n\,f(x)$$

Nesta questão, a situação II apresenta um fator de crescimento constante bastante evidente, já que a cada hora, o número de bactérias fica multiplica-

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 16 12/18/13 5:41 PM

do por 2. A função será $f(x) = n \cdot 2^x$, onde n é a quantidade inicial de bactérias, que não foi explicitada, e x é o tempo em horas.

A situação I demanda um pouco mais de elaboração. Se a cada ano o valor do imóvel aumenta 20%, então, a cada ano seu valor anterior deve ser multiplicado por 1,2 (100% mais 20%). Assim, o fator de crescimento da função é constante e é possível escrever $g(x) = v \cdot 1,2^x$, onde v é o valor inicial do imóvel, que não foi explicitado, e x é o tempo em anos.

Grade de correção

Alternativa	Interpretação
(A) ambas as situações se referem a grandezas que crescem exponencialmente.	**Resposta correta**. O aluno identificou corretamente o tipo de crescimento envolvido nas duas situações.
(B) apenas a situação I se refere a uma grandeza que cresce exponencialmente.	Numa situação de entendimento parcial das funções exponenciais, é pouco esperado que o aluno tenha identificado corretamente a situação I como de crescimento exponencial, mas não a situação II, que tem suas características muito mais evidentes. É interessante que o professor averigue se houve contextos específicos em que o aluno teve contato com esse tipo de função. Ou, ainda, esta alternativa pode indicar que o aluno respondeu aleatoriamente à questão.
(C) apenas a situação II se refere a uma grandeza que cresce exponencialmente.	Esse é um erro relativamente esperado, uma vez que a situação II constitui o tipo básico de exemplo usado para abordar as funções exponenciais e traz suas características muito mais evidenciadas. É importante que o professor reconheça e aproveite esse conhecimento parcial para mostrar que a situação II também apresenta um crescimento exponencial, apesar de não haver *pistas linguísticas* indicando isso. Na situação I, a expressão "duplica a cada hora" é uma pista linguística, no sentido em que a própria estrutura verbal corresponde à estrutura matemática subjacente à situação. Na situação II, a palavra "aumento" sugere adição e é necessário maior conhecimento para perceber a estrutura multiplicativa subjacente à situação.
(D) nenhuma das situações se refere a grandezas que crescem exponencialmente.	O aluno que assinalou esta alternativa demonstra falta e familiaridade com os exemplos mais corriqueiros de função exponencial. É importante que o professor retome o assunto mais globalmente.

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 17 12/18/13 5:41 PM

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série, Volume 3
   - Situação de Aprendizagem 1 – As potências e o crescimento/decrescimento exponencial: a função exponencial
   - Situação de Aprendizagem 3 – As funções com variáveis no expoente: a exponencial e sua inversa, a logarítmica

2. *Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando microcomputador*. Maria Cristina B. Barufi; Maira Mendias Lauro, CAEM – IME – USP.

Habilidade:

Saber resolver equações e inequações simples, usando propriedades de potências e logaritmos.

Questão 06 – Teste

Se $4^x = \dfrac{1}{32}$ então x é um número

(A) negativo e inteiro.

(B) positivo e inteiro.

(C) negativo e não inteiro.

(D) positivo e não inteiro.

Comentários e recomendações pedagógicas

Esta questão é predominantemente procedimental e o objetivo é diagnosticar se o aluno consegue utilizar as definições e propriedades de potência para resolver equações exponenciais simples, cujos membros podem ser reduzidos a potências de mesma base. Por esse motivo, as alternativas não explicitam números, evitando, assim, que o aluno teste as raízes.

O trabalho com as definições e propriedades de potência muitas vezes fica calcado na mera memorização e, se for esse o caso, é importante buscar uma reparação. A compreensão das propriedades, bem como a justificativa das definições, permite que o aluno possa apoiar-se em pequenas deduções, em vez de apoiar-se unicamente na memorização de regras que podem lhe *parecer* arbitrárias. Por exemplo, a definição de potência de expoente negativo não é arbitrária, mas é construída para que possam ser mantidas as boas propriedades que já valiam para expoentes naturais. Vejamos:

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 18 12/18/13 5:41 PM

Para manter a propriedade $\boldsymbol{\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}}$**, devemos ter** $\boldsymbol{b^{-y} = b^{0-y} = \frac{b^0}{b^y} = \frac{1}{b^y}}$.

Outro modo de justificar essa mesma definição é por meio da regularidade que se deseja manter:

$$b^{-1} \overset{\times b}{\underset{:b}{\rightleftarrows}} b^{0} \overset{\times b}{\underset{:b}{\rightleftarrows}} b^{1} \overset{\times b}{\underset{:b}{\rightleftarrows}} b^{2} \overset{\times b}{\underset{:b}{\rightleftarrows}} b^{3}$$

Há duas dificuldades básicas a serem transpostas na resolução da equação proposta aqui. A primeira é a fração que aparece no segundo membro. É preciso que o aluno saiba que essa fração pode ser escrita como uma potência de expoente negativo. A segunda é que, ainda que o aluno escreva corretamente a potência 2^{-5}, no outro membro não aparece imediatamente uma potência de 2. Assim, o aluno terá de fazer a seguinte transformação: $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$.

Finalmente, como a função exponencial é bijetora, $2^{2x} = 2^{-5}$ implica $2x = -5$. Então, $x = -2{,}5$.

Grade de correção

Alternativa	Interpretação
(A) é um número inteiro e negativo.	Embora a resposta esteja errada, esta alternativa pode indicar que o aluno reconhece que para que uma potência de 4 se iguale a uma fração própria, seu expoente precisa ser negativo.
(B) é um número inteiro e positivo.	É possível que inteiros positivos sejam os únicos expoentes com os quais o aluno esteja familiarizado e que, apenas por isso, ele tenha assinalado esta alternativa. É importante que o professor retome os significados das potências com outros tipos de expoentes.
(C) é um número não inteiro e negativo.	**Resposta correta**. Possivelmente, o aluno resolveu a equação corretamente aplicando as propriedades e definições de potência. Porém, como a alternativa não explicita a solução da equação, é importante que a resolução da mesma seja discutida com todos.
(D) é um número não inteiro e positivo.	Neste caso, o aluno sequer percebeu que, para uma potência de 4 igualar-se a uma fração própria, o expoente necessariamente terá de ser negativo. Essa percepção é importante, porque se apoia fortemente na compreensão do significado de um expoente negativo. É importante retomar esse significado, para além de retomar os procedimentos de cálculo que levam à solução correta.

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 19 12/18/13 5:41 PM

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série, Volume 3
   - Situação de Aprendizagem 1 – As potências e o crescimento/decrescimento exponencial: a função exponencial
   - Situação de Aprendizagem 4 – As múltiplas faces das potências e dos logaritmos: problemas envolvendo equações e inequações em diferentes contextos.

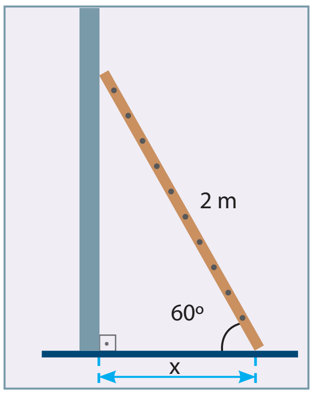
Habilidade:

Saber usar de modo sistemático relações trigonométricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos.

Questão 07 – Teste

Um pedreiro utiliza uma escada de 2 metros para realizar obras em casas e apartamentos.

No manual de segurança, está escrito que a escada deve fazer com o chão um ângulo de cerca de 60º, para evitar derrapagens.



Sabendo que o cos 60° = 1/2, o pedreiro calculou que deve apoiar o pé da escada a uma distância da parede de

(A) 0,5 metro.

(B) 1 metro.

(C) 1,7 metro.

(D) 2 metros.

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 20 12/18/13 5:41 PM

Comentários e recomendações pedagógicas

A chamada resolução de triângulos é uma importante ferramenta dentro e fora da matemática. Afinal, calcular comprimentos e distâncias é uma das atividades mais essenciais no trato com o mundo físico. A trigonometria tem nesse tipo de atividade muitas de suas motivações e representa uma ampliação do repertório de resolução de triângulos que se inicia no EFII, especialmente com o estudo do Teorema de Pitágoras.

Nesta questão, o contexto envolve um triângulo retângulo e, para determinar o comprimento desejado, será necessário fazer uso das razões trigonométricas. Especificamente, será necessário utilizar o cosseno de 60º, que está dado no enunciado. Assim, a questão acaba por averiguar apenas a *uso adequado do cosseno de um ângulo*. Não é necessário que o aluno represente o enunciado por meio de um desenho, nem é necessário que tenha memorizado o valor do cosseno, ainda que 60º seja um ângulo notável.

Grade de correção

Alternativa	Interpretação
(A) 0,5 metro	Esta alternativa indica que, de modo irrefletido, o aluno tomou o instrumento pelo objetivo, isto é, tomou o cosseno pela distância que se deseja determinar. É importante que o professor chame a atenção para o fato de que as razões trigonométricas são relações e que não podem ser "desenhadas" na figura. O que de fato pode ser desenhado são os lados e os ângulos do triângulo.
(B) 1 metro	**Resposta correta**. Aqui, o aluno percebeu que x/2 deve valer ½, de modo que x deve medir 1 metro.
(C) 1,7 metro	Esta alternativa pode indicar que o aluno conhece as razões trigonométricas e até mesmo seus valores aproximados para os ângulos notáveis, mas que "complicou" a resolução da questão ao trocar o cosseno pelo seno. De fato se tivéssemos sen 60° = x/2, teríamos x medindo aproximadamente 1,7 metros.
(D) 2 metros	Se o aluno assinalou esta alternativa, pode ser que não tenha a compreensão visual e estrutural da questão, tendo apenas "transportado" a medida da escada para o chão. É preciso que o professor mostre, no desenho, visualmente mesmo, que a hipotenusa de 2m é maior que qualquer um dos catetos. Um compasso pode ajudar o aluno a testar esse fato de modo significativo, nesse e em outros triângulos retângulos, por meio do transporte de segmentos.

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 21 12/18/13 5:41 PM

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 8ª serie (9º ano), Volume 3
   • Situação de Aprendizagem 4 – Razões trigonométricas dos ângulos agudos

2. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio– 1ª série, Volume 4
   • Situação de Aprendizagem 1 – Rampas, cordas, parsecs – razões para estudar triângulos retângulos

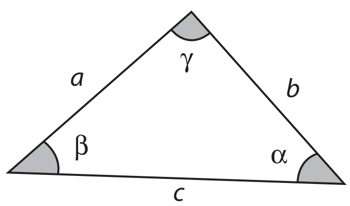
3. *Atividades de laboratório de Matemática,* coord: Elza F. Gomide e org.: Janice Cássia Rocha, CAEM – IME – USP.
   • Laboratório 71 – Teodolito

Habilidade:

Conhecer algumas relações trigonométricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos.

Questão 08 – Teste

A Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos são resultados matemáticos que nos ajudam a descobrir medidas desconhecidas num triângulo qualquer. Suas expressões são:

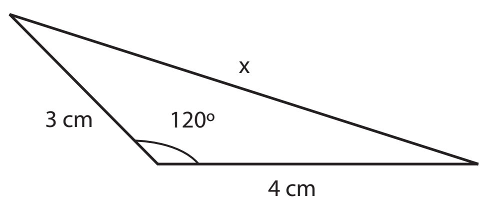


$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

Sabendo disso, no triângulo abaixo, o valor de x, em centímetros, é

(A) 1/2
(B) 5
(C) $\sqrt{13}$
(D) $\sqrt{37}$



27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 22 12/18/13 5:41 PM

Comentários e recomendações pedagógicas

A Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos representa mais uma ampliação do repertório de resolução de triângulos. A partir dessas duas leis, será possível relacionar lados e ângulos de triângulos não retângulos.

A passagem delicada e de maior dificuldade nessa ampliação é a atribuição de significado ao seno ou cosseno de um ângulo possivelmente obtuso. Afinal, é natural que o aluno se pergunte: se o seno de um ângulo era o cateto oposto a esse ângulo dividido pela hipotenusa, dentro de um triângulo retângulo, o que significa obter o seno de, por exemplo, 120º? Não há nenhum triângulo retângulo contendo um ângulo de 120º, tampouco catetos ou hipotenusas para dividir.

Por esse motivo, é importante que a passagem das razões trigonométricas para as funções trigonométricas, por meio do ciclo trigonométrico, seja feita com bastante detalhe e cuidado.

Sabemos, entretanto, que, em muitas propostas curriculares e livros didáticos, justamente por sua utilidade, a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos é apresentada antes do estudo do ciclo trigonométrico. Nesse caso, recomenda-se colocar o problema com clareza para o aluno, para que, ao menos, esteja ciente de que existe uma "pendência" de compreensão a respeito do assunto – pendência essa que, no caso, só será resolvida mais adiante.

Nesta questão, é necessário aplicar corretamente a Lei dos Cossenos para determinar a medida de um dos lados do triângulo. O lado desconhecido é o lado oposto ao ângulo conhecido, o que costuma facilitar a aplicação da lei, já que a incógnita aparece quase isolada num dos membros da equação:

$$x^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120°$$

$$x^2 = 25 - 24 \cdot \cos 120°$$

Então, para determinar o cosseno de 120°, é preciso conhecer a relação cos(180° - x) = – cos(x) ou visualizá-la no ciclo trigonométrico. Assim, se conclui que cos120° = – cos60°. E, por fim, é preciso conhecer o cosseno de 60°, informado na questão 7, de modo que o aluno mais atento pode concluir a resolução mesmo sem ter memorizado esse valor.

$$x^2 = 25 - 24 \cdot \cos 120°$$

$$x^2 = 25 - 24 \cdot (-0{,}5)$$

$$x^2 = 25 + 12$$

$$x = \sqrt{\mathbf{37}}$$

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 23 12/18/13 5:41 PM

Grade de correção

Alternativa	Interpretação
(A) 1/2	É comum que, dependendo do contexto, os alunos troquem a ordem das operações numa expressão numérica. Essa pode ter sido a origem do erro contido nessa questão, pois o aluno pode ter subtraído 24 de 25 antes de multiplicar por cos120°. $x^2 = 25 - 24 \cdot \cos 120° = 1\cos 120° \rightarrow$ **Erro**. Neste caso, também teria se equivocado quanto ao sinal, ou teria tentado ajustar o erro à situação. Porém, esse erro indica mais um problema: o aluno desconhece ou não fez relação desta questão com a condição de existência de um triângulo. Não é possível que, somando a medida de dois lados, não se alcance a medida do terceiro lado, e $3 + 1/2 < 4$.
(B) 5	Esta alternativa pode indicar que o aluno memorizou o "triângulo pitagórico 3,4,5" e, indiscriminadamente, aplicou este conhecimento aqui, sem atentar para o fato de que o triângulo em questão não é retângulo.
(C) $\sqrt{13}$	Esta alternativa pode indicar um erro de sinal no cosseno de 120°. É interessante notar que, se o aluno conhece o "triângulo pitágorico 3,4,5", ele pode concluir que, abrindo mais os catetos, de modo a aumentar o ângulo reto para 120°, o lado oposto a esse ângulo também deveria aumentar. Mas $\sqrt{13} < 5$ e, assim, ele poderia identificar que cometeu um erro de cálculo.
(D) $\sqrt{37}$	**Resposta correta**. O aluno possivelmente seguiu corretamente todos os passos da resolução.

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio– 1ª série, Volume 4
   - Situação de Aprendizagem 2 – Dos triângulos à circunferência: vamos dar uma volta?
   - Situação de Aprendizagem 4 – A hora e a vez dos triângulos não retângulos

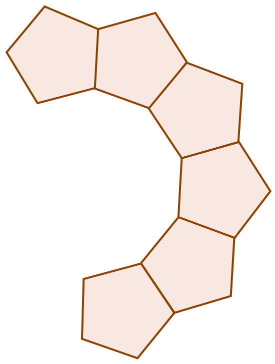
27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 24 12/18/13 5:41 PM

Habilidade:

Saber aplicar as propriedades dos polígonos regulares no problema da pavimentação de superfícies.

Questão 09 – Teste

O número total de pentágonos regulares necessários para formar a “roda” é



(A) 4.

(B) 6.

(C) 8.

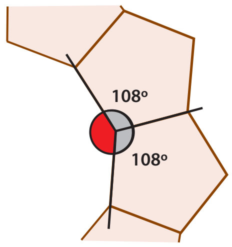
(D) 10.

Comentários e recomendações pedagógicas

Problemas de pavimentação de superfície por meio de polígonos regulares costumam exigir o conhecimento dos ângulos internos desse tipo de polígono. Em princípio, é necessário saber que, num polígono de n lados, a soma dos ângulos internos é dada por $\boldsymbol{S_i = (n - 2)180^o}$ e que, portanto, a medida α_i é um ângulo interno desse polígono é dada por

$$\alpha_i = \frac{(n-2)180^o}{n}$$

Nesta questão, conclui-se, com isso, que cada ângulo interno do pentágono regular tem 108°. Assim, vejamos o que acontece num dos vértices internos à “roda”:



27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 25 12/18/13 5:41 PM

Assim, $x + 108° + 108° = 360°$, donde se conclui que $x = 144°$. Usando a mesma fórmula, podemos agora descobrir qual é o polígono regular interno à roda:

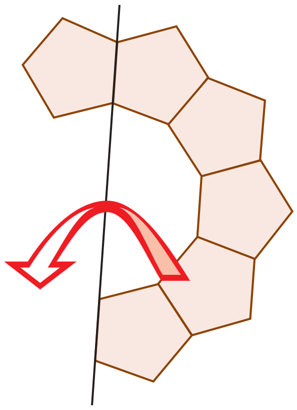
$$144° = \frac{(n-2)180°}{n}$$

$$144n = 180n - 360$$

$$n = 10$$

Portanto, o polígono regular interno à roda é um decágono e isso significa que são necessários 10 pentágonos regulares para formar a roda.

Porém, há outras abordagens possíveis. O aluno pode estimar o número de pentágonos visualmente, por simetria. Se ele percebe o alinhamento entre os lados do segundo e do último pentágono da figura, pode concluir diretamente que são necessários 10 pentágonos para formar a roda.



Grade de correção

Alternativa	Interpretação
(A) 4	O aluno pode ter raciocinado ou visualizado corretamente, mas talvez tenha interpretado errado o enunciado. 4 é o número de pentágonos que faltam para completar a roda.
(B) 6	Esta alternativa pode indicar um erro de interpretação similar ao da alternativa "a", com o adicional de um erro de visualização da simetria. Como aparecem 6 pentágonos desenhados e a parte já formada da figura está próxima da metade, o aluno pode ter suposto que faltavam mais 6.
(C) 8	Esta alternativa é, em certo sentido, a mais discrepante do esperado. Convém investigar se houve alguma hipótese equivocada ou se o aluno assinalou aleatoriamente.
(D) 10	**Resposta correta**. É interessante que o professor discuta os possíveis métodos de resolução e a relação entre eles.

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 26 12/18/13 5:41 PM

Algumas referências

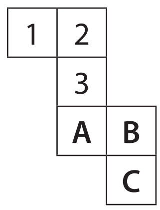
1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série, Volume 4
   - Situação de Aprendizagem 3 – Polígonos e circunferências: regularidades na inscrição e circunscrição
2. *Atividades de laboratório de Matemática,* coord: Elza F. Gomide e org.: Janice Cássia Rocha, CAEM – IME – USP.
   - Laboratório 42 – Ângulos dos polígonos

Habilidade:

Visualizar as formas espaciais a partir de suas representações planas, tais como vistas e planificações.

Questão 10 – Teste

A figura abaixo é um molde que permite montar um dado em formato de cubo, com as faces numeradas de 1 a 6.



Sabendo que, nesse dado, faces opostas devem ter valores que somam 7, as faces A, B e C devem apresentar, respectivamente, os valores:

(A) 4, 5 e 6.

(B) 5, 4 e 6.

(C) 5, 6 e 4.

(D) 6, 5 e 4.

Comentários e recomendações pedagógicas

A habilidade avaliada nesta questão, diferentemente de todas as demais questões desta avaliação, não está descrita no Currículo de Matemática para a 1ª série do Ensino Médio. No entanto, sua inclusão se justifica em função da ênfase, dada na 2ª série, à geometria espacial.

A geometria espacial trata de objetos tridimensionais, mas, de modo geral, tais objetos são representados bidimensionalmente, no plano do papel, do livro, do caderno e da lousa. Então a compreensão dos objetos de estudo da geometria espacial passa pela habilidade de transitar entre as representações planas desses objetos: perspectivas, vistas e planificações.

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 27 12/18/13 5:41 PM

Dessas possíveis representações, as perspectivas são às mais fieis àquilo que realmente *vemos* e estão bastante presentes num mundo que cada vez mais é representado nas telas planas da televisão, do computador, dos impressos etc. As vistas e planificações não estão tão presentes no dia a dia, mas são de fundamental importância para o estudo dos objetos da geometria espacial. Não poderemos calcular a área superficial de um cone, por exemplo, sem a habilidade de transitar entre este objeto e sua planificação.

Nesta questão, pretende-se verificar se o aluno consegue imaginar o cubo (hexaedro regular) a partir de sua planificação, identificando faces que ficarão opostas. Uma possibilidade é imaginar que a face de número 3 continua no plano do papel, enquanto as demais vão, gradativamente se "dobrando" no espaço. Assim, verifica-se que a face de número 2 ficará oposta à da letra A. Em seguida, imaginando a continuidade do movimento de fechar o cubo, verifica-se que B e 1 ocuparão faces laterais opostas. C "fechará" o cubo, ficando na posição oposta à face de número 3. Como faces opostas devem apresentar soma 7, temos:

Face	Oposta a	Deve ter valor
A	2	5
B	1	6
C	3	4

É claro que, tomando como referência inicial outra face, a sequência de conclusões provenientes do movimento imaginado é outra. No entanto, sempre se poderá concluir que os pares de faces opostas são A e 2, B e 1, C e 3.

Grade de correção

Alternativa	Interpretação
(A) 4, 5 e 6	Esta alternativa pode indicar uma interpretação equivocada do problema proposto. O aluno talvez tenha apenas feito a correspondência entre a sequência alfabética A, B e C e a sequência numérica crescente 4, 5 e 6.
(B) 5, 4 e 6	Esta alternativa pode indicar que o aluno conseguiu identificar que as faces A e 2 são opostas, de modo que A deve ter valor 5. Porém, não conseguiu prosseguir com o restante da "montagem mental" do cubo, errando as demais faces.
(C) 5, 6 e 4	Resposta correta. Possivelmente o aluno conseguiu imaginar corretamente a montagem do cubo, indicando domínio da habilidade avaliada.
(D) 6, 5 e 4	Talvez o aluno tenha identificado tomado por pares de opostos A e 1, B e 2, C e 3, simplesmente por conta da ordem alfabética e da ordem numérica crescente. A partir disso, concluiu que A deveria valer 6, B deveria valer 5 e C, 4.

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 28 12/18/13 5:41 PM

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 5ª série (6º ano), Volume 3
   • Situação de Aprendizagem 2 – Planificando o espaço
2. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 6ª série (7º ano), Volume 2
   • Situação de Aprendizagem 4 – Classificação, desenho e montagem de poliedros
3. Experiencias Matemáticas – 5ª série
   • Atividade 6 – Geometria: sólidos geométricos
   • Atividade 11 – Os prismas
   • Atividade 12 – Prismas e alturas

Habilidade:

Saber utilizar, em diferentes contextos, funções de 1º e de 2º graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos.

Questão 11 – Aberta

Existe uma infinidade de retângulos com perímetro 18 metros. Quais são a largura x e a altura y daquele que, dentre todos, tem a maior área? Justifique sua resposta.

Comentários e recomendações pedagógicas

Aqui, novamente temos um problema de máximos e mínimos que deve ser modelado por uma função quadrática. Porém, esta questão acaba por exigir também o conhecimento dos conceitos de área e perímetro que, *espera-se*, estejam consolidados no aluno ingressante do 2º ano EM. De todo modo, é preciso ficar atento às “várias camadas de conteúdos e habilidades” que toda questão apresenta, para poder extrair informação dos erros dos alunos, visando contribuir para sua real aprendizagem.

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 29 12/18/13 5:41 PM

A resolução usual desta questão consiste no seguinte:

Dimensões do retângulo: x e y

Perímetro: $2x + 2y = 18$ metros $\rightarrow x + y = 9$ metros

Área: $A = xy = x(9 - x) = - x^2 + 9x$

Desse modo, a área de um retângulo de perímetro 18 metros, varia conforme a função quadrática $A = - x^2 + 9x$. Calculando a abscissa do vértice dessa função, temos $-9/-2 = 4{,}5$. Portanto, nessas condições, o retângulo de maior área é aquele que tem $x = y = 4{,}5$ metros. Esse fato pode ser generalizado: fixado um perímetro, o retângulo de maior área é um quadrado.

Uma outra possibilidade de resolução para o problema não é algébrica, mas passa pela percepção de que, se o perímetro do retângulo é 18 metros, a soma de suas duas dimensões deve ser 9 metros. Assim, as seguintes tentativas podem ser organizadas:

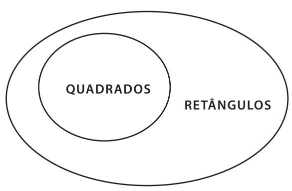
Largura (m)	**Altura (m)**	**Área (m^2)**
1	8	8
2	7	14
3	6	18
4	5	20

A partir daí, mantendo as tentativas no conjunto dos números naturais, as áreas começam a se repetir, de modo que não é necessário avançar.

Se o aluno limitar sua análise aos números naturais, não chegará à resposta correta do problema. Porém, se perceber a tendência sugerida pela tabela, poderá verificar que equilibrando totalmente a largura e a altura, obtém-se a maior área: 4,5 x 4,5 = 20,25.

Assim, o retângulo de maior área é um quadrado de lado 4,5 metros.

Uma dificuldade que pode aparecer nesta questão é a definição de *quadrado* e de *retângulo*. É possível que, sozinhos, os alunos ainda não tenham observado a inclusão:



Por fim, esta questão tem exatamente a mesma *estrutura matemática* de outra questão constante desta avaliação, a da pedra preciosa que se quebra, ainda que os contextos e valores sejam completamente distintos. Naquela questão, o exemplo dado no enunciado pode levar o aluno a abordar o pro-

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 30 12/18/13 5:41 PM

blema com uma análise numérica, enquanto nesta questão o enunciado pretende induzi-lo a uma abordagem algébrica.

Por meio das duas questões, o professor pode ter uma avaliação global do domínio que o aluno tem da habilidade avaliada. Pode ser, por exemplo, que o aluno tenha resolvido ambos os problemas por meio da análise numérica, indicando que ele *talvez* não saiba expressar algebricamente suas ideias com relação ao assunto. É importante lembrar que uma função é uma relação que pode ser expressa em diferentes linguagens: numérica, algébrica, gráfica ou até mesmo verbal. É importante que o professor valorize as diversas linguagens e ajude o aluno a fazer relação entre elas. Assim, se um aluno resolveu algebricamente esta questão, é interessante que o professor mostre a análise numérica que poderia ter sido feita. Se resolveu por meio da análise numérica, é importante que o professor mostre a abordagem algébrica e até mesmo o gráfico que expressa tal relação. Melhor ainda é pedir que os alunos comparem entre si suas resoluções, com a condução do professor.

Grade de correção

Respostas corretas	As respostas corretas possivelmente foram obtidas por alguma das duas abordagens expostas nos comentários acima.
Respostas parcialmente corretas	Se o aluno usou a abordagem algébrica, há diversos passos nos quais um erro de cálculo, de atenção, de fórmula etc poderia conduzir a uma resposta errada. No entanto, mesmo com uma resposta errada, pode haver uma compreensão global do problema, o que é muito importante. Se o aluno usou uma abordagem numérica, pode ter se limitado a analisar os valores inteiros e, assim, pode ter concluído que o retângulo de maior área é o de 4 m por 5 m. Ou ainda, a falta de compreensão de que um quadrado é um retângulo pode tê-lo feito descartar a resposta correta. É importante que o aluno tenha respondido ao problema. Caso apresente a resolução correta, sem uma resposta clara à questão que foi colocada, o professor deve assinalar isso, assim como no caso de uma resposta sem resolução.
Respostas incorretas	O desconhecimento ou a falta de clareza a respeito dos conceitos de área e perímetro podem ser um motivo para uma abordagem muito equivocada. Também a ausência de boas estratégias de resolução – tradução para a linguagem algébrica ou análise numérica da variação – constituem um diagnóstico para o professor. Uma grande variedade de estratégias precisa ser explorada e os alunos devem ser estimulados a construir suas próprias estratégias de resolução de problemas.

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 31 12/18/13 5:41 PM

Algumas referências

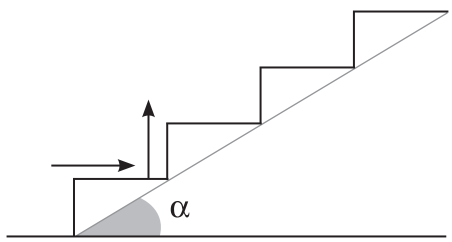
1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio– 1ª série, Volume 2
   - Situação de Aprendizagem 2 – Funções polinomiais de 2º grau
   - Situação de Aprendizagem 3 – Máximos e Mínimos
   - Situação de Aprendizagem 4 – Situações-problema: Modelos Matemáticos
2. *Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando microcomputador*. Maria Cristina B. Barufi; Maira Mendias Lauro, CAEM – IME – USP.

Habilidade:

Saber usar de modo sistemático relações trigonométricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos.

Questão 12 – Aberta

Quando subimos uma escada de alvenaria convencional, nos movemos *para frente* e *para cima* ao mesmo tempo.



Dizemos que α é o *ângulo de inclinação* da escada.

Sendo assim, subindo uma escada cujo ângulo de inclinação é 45º, para cada metro que avançamos na horizontal, quantos metros subimos? Justifique sua resposta.

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 32 12/18/13 5:41 PM

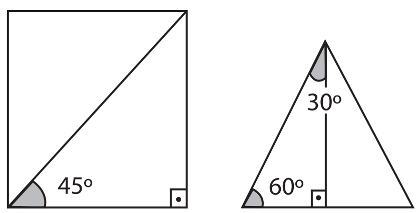
Comentários e recomendações pedagógicas

Este problema não exige que o aluno conheça os nomes das razões trigonométricas, no entanto, explora fundamentalmente seus significados. Na realidade, explora o significado da tangente de um ângulo.

O aluno que já conhece a tangente e que já memorizou seu valor para os ângulos notáveis, deve associar esse conceito à situação-problema dada. Então, poderá concluir que, como tg45º = 1, para cada metro que se avança na horizontal, sobe-se 1 metro.

Porém, mesmo o aluno que não conhece a tangente pode resolver a questão, contanto que tenha clareza de que um triângulo retângulo contendo um ângulo de 45º equivale a metade de um quadrado, obtida a partir da diagonal. Assim, a horizontal e a vertical são congruentes.

Grade de correção

Respostas corretas	O aluno pode ter resolvido o problema por meio do conhecimento da tangente de 45º, concluindo que, avançando um metro, sobe-se também 1 metro. Ou, conforme já foi citado, pode modelar a situação a partir da diagonal de um quadrado, chegando à mesma conclusão.
Respostas incorretas ou parcialmente corretas	Uma possibilidade é que o aluno associe este problema às razões trigonométricas, mas confunda-se com relação à qual delas deve ser usada. Ou ainda, pode trocar os valores das razões trigonométricas para os ângulos notáveis. Neste último caso, é importante que o professor retome os valores das razões trigonométricas de 30º, 45º e 60º, justificando-os a partir das propriedades geométricas do quadrado e do triângulo equilátero:  A fórmula mnemônica tradicionalmente usada para que o aluno memorize esses valores não é desaconselhada, porém, por si, carece de significado. Por fim, é muito importante, especialmente nesse tipo de questão – em que praticamente não há cálculos – que o professor reforce a necessidade de justificar a resposta, com palavras, com esquemas etc. Sem justificativa, a resolução não deve ser considerada completamente correta, independentemente da correção da resposta.

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 33 12/18/13 5:41 PM

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 8ª série (9º ano), Volume 3
   • Situação de Aprendizagem 4 – Razões trigonométricas dos ângulos agudos

2. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série, Volume 4
   • Situação de Aprendizagem 1 – Rampas, cordas, parsecs – razões para estudar triângulos retângulos

3. *Atividades de laboratório de Matemática,* coord: Elza F. Gomide e org.: Janice Cássia Rocha, CAEM – IME – USP.
   • Laboratório 71 – Teodolito

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 34 12/18/13 5:41 PM

Avaliação da Aprendizagem em Processo
Comentários e Recomendações Pedagógicas – Matemática

Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional
Coordenadora: Ione Cristina Ribeiro de Assunção

Departamento de Avaliação Educacional
Diretor: William Massei
Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Aplicação de Avaliações
Diretora: Diana Yatiyo Mizoguchi
Equipe Técnica DAVED participante da AAP
Ademilde Ferreira de Souza, Cyntia Lemes da Silva Gonçalves da Fonseca, Juvenal de Gouveia, Patricia e Barros Monteiro, Silvio Santos de Almeida

Coordenadoria de Gestão da Educação Básica
Coordenadora: Maria Elizabete da Costa

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão da Educação Básica
Diretor: João Freitas da Silva

Centro do Ensino Fundamental dos Anos Finais, Ensino Médio e Educação Profissional
Diretora: Valéria Tarantello de Georgel

Equipe Curricular CGEB de Matemática
Carlos Tadeu da Graça Barros, Ivan Castilho, João dos Santos, Otavio Yoshio Yamanaka, Rodrigo Soares de Sá, Rosana Jorge Monteiro, Sandra Maira Zen Zacarias, Vanderley Aparecido Cornatione

Elaboração do material de Matemática
Aline dos Reis Matheus, Cristina Cerri, Martha Salerno Monteiro, Raul Antônio Ferraz e Rogério Osvaldo Chaparin

Validação, Leitura e Revisão Crítica

Equipe Curricular CGEB de Matemática
Carlos Tadeu da Graça Barros, Ivan Castilho, João dos Santos, Otavio Yoshio Yamanaka, Rodrigo Soares de Sá, Rosana Jorge Monteiro, Sandra Maira Zen Zacarias, Vanderley Aparecido Cornatione

Professores Coordenadores dos Núcleos Pedagógicos
Agnaldo Garcia, Clarice Pereira, Emerson de Souza Silva, Everaldo José Machado de Lima, Geverson Ribeiro Machi, João Acácio Busquini, Laíde Leni Lacerda N. Moleiro Martins, Luciana Vanessa de Almeida Buranello, Maria Josiléia Silva Bergamo Almeida, Mário José Pagotto, Renata Ercília Mendes Nifoci, Silvia Ignês Peruquetti Bortolatto, Sueli Aparecida Gobbo Araújo e Zilda Meira Aguiar Gomes

Revisão de Texto
Ademilde Ferreira de Souza

Anotações

27_AAP_RPM_2 EM_professor.indd 36 12/18/13 5:41 PM