GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

Caderno do Professor

1ª Série do Ensino Médio

Matemática

São Paulo

3º Bimestre de 2017

17ª Edição

APRESENTAÇÃO

A Avaliação da Aprendizagem em Processo – AAP - se caracteriza como uma ação desenvolvida de modo colaborativo entre a Coordenadoria de Gestão da Educação Básica e a Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional.

Iniciada em 2011 e voltada a apenas dois anos/séries, foi gradativamente sendo expandida e, desde 2015, abrange todos os alunos dos Ensinos Fundamental e Médio além de, continuamente, aprimorar seus instrumentos.

A AAP, fundamentada no Currículo do Estado de São Paulo, propõe o acompanhamento da aprendizagem das turmas e alunos de forma individualizada, com um caráter diagnóstico. Tem como objetivo apoiar as unidades escolares e os docentes na elaboração de estratégias adequadas a partir da análise de seus resultados, contribuindo efetivamente para melhoria da aprendizagem e desempenho dos alunos, especialmente nas ações de recuperação contínua.

As habilidades selecionadas para a AAP, em Língua Portuguesa e Matemática, têm como referência, a partir de 2016, a Matriz de Avaliação Processual elaborada pela CGEB e já disponibilizada à rede.

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental permanece a articulação com as expectativas de aprendizagem de Língua Portuguesa e Matemática e com os materiais do Programa Ler e Escrever e da Educação Matemática nos Anos Iniciais – EMAI.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação, na forma de cadernos de provas para os alunos, também foram elaborados os respectivos exemplares do Professor, com orientações específicas para os docentes, instruções para a aplicação (Anos Iniciais), quadro de habilidades de cada prova, gabaritos, orientações e grades para correção e recomendações pedagógicas gerais.

Estes subsídios, agregados aos registros que o professor já possui e informações sistematizadas no Sistema de Acompanhamento dos Resultados de Avaliações - SARA, incorporando os dados resultantes da AAP, devem auxiliar no planejamento, replanejamento e acompanhamento das ações pedagógicas, mobilizando procedimentos, atitudes e conceitos necessários para as atividades de sala de aula, sobretudo aquelas relacionadas aos processos de recuperação das aprendizagens.

COORDENADORIA DE GESTÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA - CGEB

COORDENADORIA DE INFORMAÇÃO, MONITORAMENTO E AVALIAÇÃO EDUCACIONAL - CIMA

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

Questão	Código da Habilidade	Descrição
01	MP13	Aplicar procedimentos de cálculos com potências de mesma base.
02		
03	MP14	Identificar o gráfico de uma função exponencial.
04		
05	MP15	Resolver situações-problema envolvendo função exponencial.
06		
07	MP16	Aplicar procedimentos de cálculos com logaritmos.
08		
09	MP17	Identificar os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas
10		
11	MP18	Resolver situações-problema envolvendo função logarítmica.
12		

GABARITO

	A	B	C	D	E
01	○	○	○	●	○
02	○	○	○	○	●
03	○	○	○	●	○
04	○	○	●	○	○
05	●	○	○	○	○
06	○	○	●	○	○
07	○	○	○	○	●
08	○	●	○	○	○
09	○	○	●	○	○
10	○	○	○	●	○
11	○	●	○	○	○
12	○	○	●	○	○

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A premissa básica, a respeito de um processo avaliativo deve ser considerada como instrumento que subsidiará tanto o aluno no seu desenvolvimento cognitivo, quanto o professor no redimensionamento de sua prática pedagógica.

Desta forma, a avaliação da aprendizagem passa a ser um instrumento que auxiliará o educador a atingir os objetivos propostos em sua prática educativa, neste caso a avaliação, sob essa ótica, deve ser tomada na perspectiva diagnóstica, servindo como instrumento para detectar as dificuldades e possibilidades de desenvolvimento do educando.

Neste sentido, as questões que constam deste caderno, procuram verificar o nível de desenvolvimento das habilidades descritas na Matriz de Avaliação Processual de Matemática, notadamente as do 3º bimestre letivo.

Nas linhas a seguir, apresentamos uma breve caracterização das habilidades e o seu respectivo conteúdo.

- *(MP13) – Aplicar procedimentos com potências de mesma base.*

As potências já foram apresentadas aos alunos no Ensino Fundamental (no 6º ano, as primeiras noções; no 8º ano, as potências com expoentes inteiros, no 9º ano, os expoentes racionais e reais). Na primeira série do Ensino Médio, consolidam-se o significado de potência, sintetizando os fatos conhecidos na apresentação da função exponencial, com destaque para sua forma peculiar de crescimento ou decrescimento.

- *(MP14) – Identificar o gráfico de uma função exponencial.*

Um dos objetivos principais desta habilidade é o de estabelecer certa familiaridade com os gráficos de funções da forma $y = y_o \cdot a^{kx}$, em que y_o e k são constantes, e com cálculos envolvendo potências em situações práticas, em diferentes contextos.

- *(MP15) – Resolver situações-problema envolvendo função exponencial.*

Assim como as funções f(x) = ax + b constituem um padrão para o estudo dos fenômenos lineares, em que o crescimento ou decrescimento acontece a taxas constantes, as funções exponenciais constituem um novo padrão para a descrição e a compreensão de uma nova classe de fenômenos de natureza não linear.

- *(MP16) – Aplicar procedimentos de cálculos com logaritmos.*

Compreender e explorar as propriedades dos logaritmos, não passa de seu reconhecimento como expoentes de potências, nos cálculos já conhecidos. Sem dúvida, a linguagem dos logaritmos amplifica muito a competência leitora: trata-se da leitura e da compreensão de uma extensa classe de fenômenos, associados ao crescimento ou ao decrescimento exponencial.

- *(MP17) – Identificar os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas.*

A continuidade do desenvolvimento da habilidade anteriormente descrita ocorre por meio da exploração de gráficos de funções exponenciais e logarítmicas, verificando a capacidade de identificar as interdependências envolvidas, e reconhecer as relações existentes nas duas funções.

- *(MP18) – Resolver situações problemas envolvendo função logarítmica.*

Para finalizar, o diagnóstico do desenvolvimento das habilidades relativas ao 3º bimestre, inserimos a contextualização do estudo das funções logarítmicas, com destaque para as propriedades fundamentais desta função, cuja ênfase será, portanto, a contextualização dos conteúdos e temas já estudados ao longo das situações anteriores. A competência maior a ser desenvolvida é a capacidade de articular os conhecimentos já estudados, tendo em vista a intervenção direta na realidade.

Finalmente, a avaliação, entendida aqui como processual, haverá que ser percebida como um processo de mapeamento e diagnose do processo de aprendizagem, ou seja, a obtenção de indicadores qualitativos do processo de ensino-aprendizagem no trabalho docente.

Seguindo esta concepção, o PCN destaca que:

> [...] cabe à avaliação fornecer aos professores as informações sobre como está ocorrendo a aprendizagem: os conhecimentos adquiridos, os raciocínios desenvolvidos, as crenças, hábitos e valores incorporados, o domínio de certas estratégias, para que ele possa propor revisões e reelaborações de conceitos e procedimentos parcialmente consolidados. (BRASIL, 2000, p. 54)

É importante salientar que as observações que constam nas grades de correção deste caderno são apenas pressupostos de resolução, cabendo ao professor analisar os registros dos alunos e não considerar as observações indicadas como norma padrão e que o objetivo maior, é a proposição de uma grade de correção pelo próprio professor e assim realizar uma análise de acordo com a realidade do processo de ensino-aprendizagem desenvolvido em sala de aula.

Equipe Curricular de Matemática – CEFAF/CGEB

Questões referentes à Matriz de Avaliação Processual do 3º Bimestre

Habilidade MP13	Aplicar procedimentos de cálculos com potências de mesma base.

Questão 1

Em um estacionamento há 4 automóveis, em cada automóvel há 4 rodas e em cada roda há 4 parafusos.

O total de parafusos desses quatro automóveis pode ser expresso por

(A) 4^0

(B) 4^1

(C) 4^2

(D) 4^3

(E) 4^4

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo desta questão é que o aluno aplique procedimentos de cálculos com potência de mesma base.

Utilizando as propriedades de multiplicação de potências de mesmo expoente, temos que:

- *um carro:* 4^0*;*
- *quatro rodas: (*4^1*);*
- *quatro parafusos por roda: 4 · 4 = 16 =* 4^2*;*
- *quatro carros: 4 · 4 · 4 = 64 =* $\mathbf{4^3}$ *parafusos.*

Organizando uma tabela:

Carros	Rodas	Parafusos		
		Quantidades	a^n	a^n
••••	1	4	2^2	4^1
1	4	16	2^4	4^2
2	8	32	2^5	••••
3	12	48	••••	••••
4	16	64	2^6	$\mathbf{4^3}$

*Portanto, **(D)** é a alternativa correta.*

GRADE DE CORREÇÃO

(A)		
4^0	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não se atentou na leitura da questão e escolheu aleatoriamente a resposta.
(B)		
4^1	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno considerou, apenas, como a representação de quatro parafusos em uma roda.
(C)		
4^2	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno considerou o produto ($4 \cdot 4 = 4^2$), por ser quatro rodas e quatro carros, não se atentando com a quantidade de parafusos solicitada na questão.
(D)		
$\mathbf{4^3}$	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**
(E)		
4^4	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno considerou que sendo quatro rodas por carro em quatro carros a representação seria: ($4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256 = 4^4$ parafusos).

Habilidade	Aplicar procedimentos de cálculos com potências de mesma base.
MP13	

Questão 2

No quadrado mágico, cada letra representa uma potência de base 3, sabendo que o produto dos números de cada linha, coluna ou diagonal é $\mathbf{3^6}$.

3^5	**A**	3^3
B	3^2	**C**
3	**D**	**E**

A potência que a letra **D** representa é

(A) 3^{-1}

(B) 3^0

(C) 3^1

(D) 3^5

(E) $\mathbf{3^6}$

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo da questão está em avaliar a habilidade do aluno ao trabalhar o produto de potências de mesma base.

No produto de potências de mesma base, conserva-se a base e somam-se os expoentes.

Para saber que potência a letra D representa é preciso calcular que potência representa cada letra do quadrado.

3^5	**A**	3^3
B	3^2	**C**
3	**D**	**E**

Sabendo-se que todas as potências do quadrado mágico são de base três, temos que:

Linha 1:

$3^0 \cdot 3^x \cdot 3^3 = 3^6 \Rightarrow 3^{5+x+3} = 3^6 \Rightarrow 8 + x = 6 \Rightarrow x = -2 \therefore \mathbf{A = 3^{-2}}$

Linha 2:

$3^5 \cdot 3^t \cdot 3^1 = 3^6 \Rightarrow 3^{6+t} = 3^6 \Rightarrow 6 + t = 6 \Rightarrow t = 0 \therefore \mathbf{B = 3^0 = 1}$

Linha 3:

$3^1 \cdot 3^6 \cdot 3^z = 3^6 \Rightarrow 3^{7+z} = 3^6 \Rightarrow 7 + z = 6 \Rightarrow z = -1 \therefore \mathbf{E = 3^{-1}}$

Coluna 3:

$3^3 \cdot 3^w \cdot 3^{-1} = 3^6 \Rightarrow 3^{2+w} = 3^6 \Rightarrow 2 + w = 6 \Rightarrow w = 4 \therefore \mathbf{C = 3^4}$

Portanto o quadrado mágico será formado pelas seguintes potências:

3^5	$A=3^{-2}$	3^3
$B=3^0$	3^2	$C=3^4$
3	$D=3^6$	$E=3^{-1}$

*Portanto, (**E**) é a alternativa correta.*

Grade de Correção

(A)

3^{-1}	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não se atentou na leitura da questão e escolheu aleatoriamente a resposta.

(B)

3^{0}	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno considerou a potência que representa a letra B = 3^4 e então C = 3^0.

(C)

3^{1}	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno considerou, na Linha 3, a potência correspondente à letra E como 3^4 e então D=3^1

(D)

3^{5}	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno considerou apenas a potência E da Linha 3, com expoente igual a zero, sem observar a coluna 2.

(E)

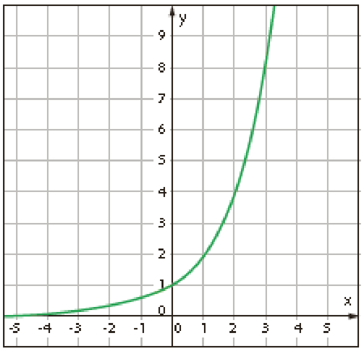
$\mathbf{3^{6}}$	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão. Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

Habilidade	Identificar o gráfico de uma função exponencial.
MP14	

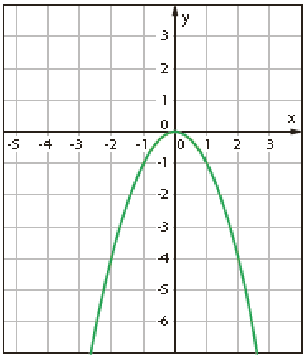
Questão 3

A representação gráfica da função exponencial **$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$** é

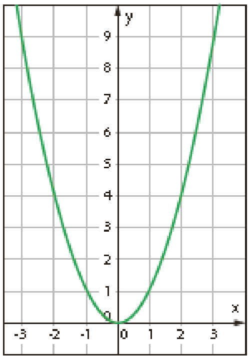
(A)



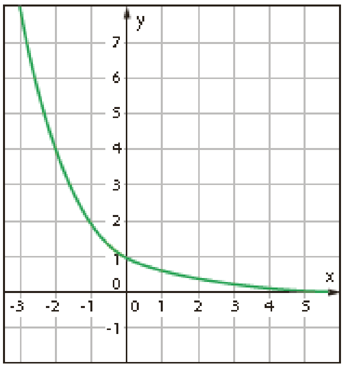
(B)



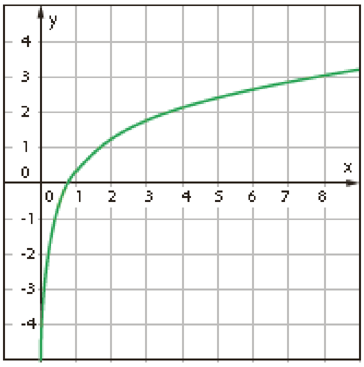
(C)



(D)



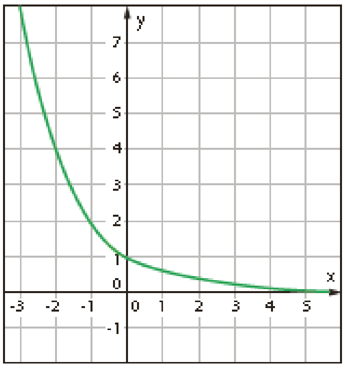
(E)



CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo desta questão é que o aluno identifique o gráfico de uma função exponencial.

Analisando as figuras, a que corresponde à função exponencial requerida é o gráfico, que segue.

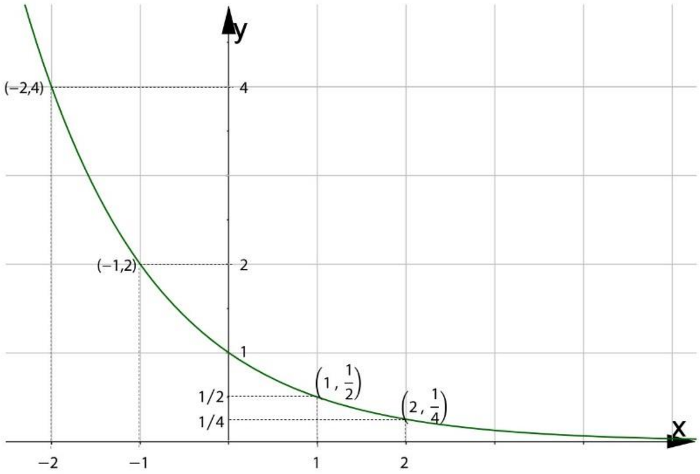


Uma vez que o "identificar", aqui, tem o caráter de conferir os atributos acerca do objeto de estudo em questão. No caso, identificar que o gráfico da função exponencial $y=a^x$ *é decrescente porque "a" é um número no intervalo* $0< a < 1$.

Porquanto, na função $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ *quando* $x=0$, $y=1$ *significa que o gráfico corta o eixo vertical no ponto (0, 1). Seguidamente, à medida que x é cada vez menor, o valor correspondente, y, admite valores mais altos, ao passo que, enquanto x assume valores crescentes o valor de y se aproxima de zero* ($y\neq0$), *configurando-se um gráfico decrescente.*

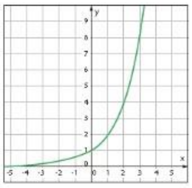
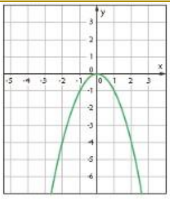
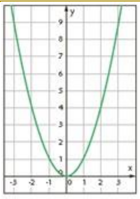
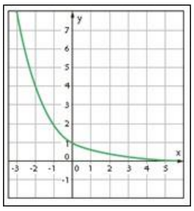
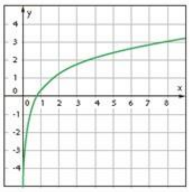
Assim:

x	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(2^{-1}\right)^x$
-2	$\left(2^{-1}\right)^{-2} = 2^2 = 4$
-1	$\left(2^{-1}\right)^{-1} = 2^1 = 2$
0	$\left(2^{-1}\right)^{0} = 2^0 = 1$
1	$\left(2^{-1}\right)^{1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
2	$\left(2^{-1}\right)^{2} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$



Portanto, (D) é a alternativa correta.

GRADE DE CORREÇÃO

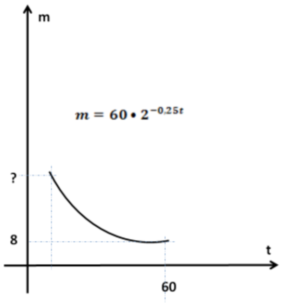
(A)		
	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno identificou que o gráfico tem características de uma função exponencial, porém não se dá conta de que a função solicitada na questão é decrescente.
(B)		
	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não utilizou os conceitos necessários para esta habilidade, não identificando a função como exponencial.
(C)		
	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não utilizou os conceitos necessários para esta habilidade, não identificando a função como exponencial.
(D)		
	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**
(E)		
	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não utilizou os conceitos necessários para esta habilidade, não identificando a função como exponencial.

Habilidade	Identificar o gráfico de uma função exponencial.
MP14	

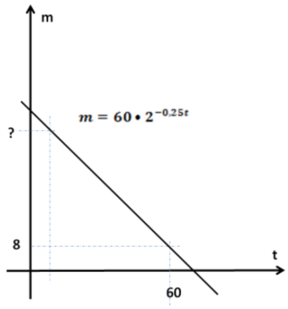
Questão 4

Certa substância radioativa se decompõe de tal forma que sua massa “m” reduz-se a metade do valor inicial a cada 4 horas, ou seja, $m = m_0 \cdot 2^{-0,25t}$, sendo m_0 o valor inicial da massa (t em horas). Partindo de 60 g da substância, o gráfico que representa a decomposição dessa substância é

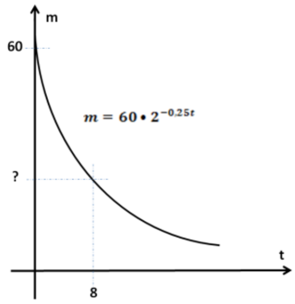
(A)



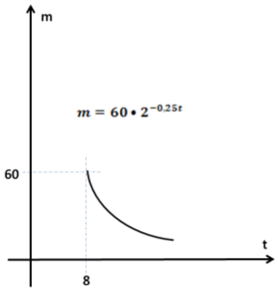
(B)



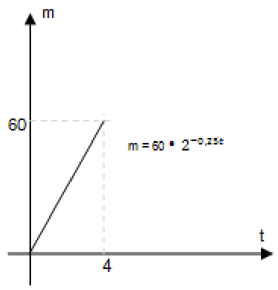
(C)



(D)



(E)

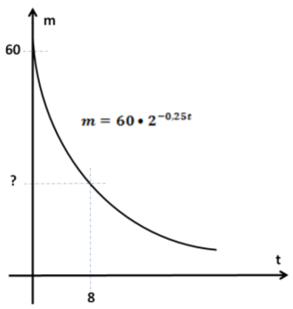


Correção Comentada

O objetivo da questão está em avaliar a familiaridade que se espera que os alunos tenham com funções do tipo $y = y_0 \cdot a^{kx}$ em que y_0 e k são constantes.

Na questão, o gráfico que representa a função é decrescente e inicia em 60 g, massa inicial em decomposição/redução.

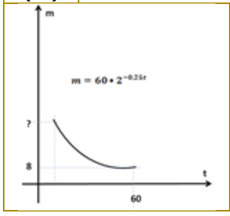
De acordo com a expressão, $m=m_0 \cdot 2^{-0,25t}$ quando $t=0 \Rightarrow m = 60g$ que corresponde à massa inicial da substância, isso identifica o início do gráfico na ordenada $y=60$ e que segue reduzindo-se a metade de sua massa a cada 4 horas.



*Portanto, (**C**) é a alternativa correta.*

Grade de Correção

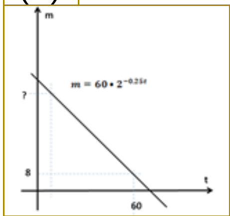
(A)



Resposta incorreta.

Possivelmente o aluno opta por essa resposta considerando o número 60 do enunciado.

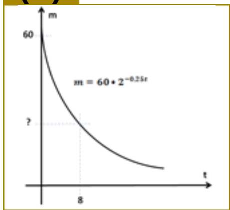
(B)



Resposta incorreta.

Possivelmente o aluno não utilizou os conceitos básicos necessários para essa habilidade, não identificando a função como exponencial.

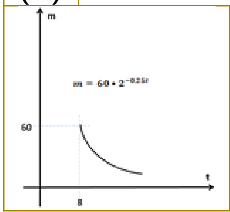
(C)



Resposta correta.

O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.
Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.

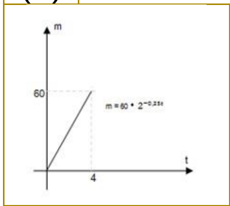
(D)



Resposta incorreta.

Possivelmente o aluno escolheu esta resposta aleatoriamente, visto que, não considerou o instante t=0, que substituído na função encontra a quantidade de massa inicial igual a 60 g.

(E)



Resposta incorreta.

Possivelmente o aluno não utilizou os conceitos básicos necessários para essa habilidade, não identificando a função como exponencial.

Habilidade	Resolver situações-problema envolvendo função exponencial.
MP15	

Questão 5

Em uma indústria, um funcionário recém-contratado produz menos que um operário experiente.

A função que descreve o número de peças produzidas diariamente por um trabalhador em uma metalurgica é dada por $p(t) = 180 - 110 \cdot 2^{-0,5t}$.

Em que t é o tempo de experiência no serviço, em semanas.

Assim sendo, um funcionário recém-contratado, produzirá diariamente nos seus primeiros dias,

(A) 70 peças.

(B) 98 peças.

(C) 103 peças.

(D) 125 peças.

(E) 235 peças.

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo desta questão é que o aluno resolva situações problema envolvendo função exponencial.

*Descrições de fenômenos em que a variável aparece no expoente caracteriza uma **função exponencial**, nesse caso descrita como $p(t)= 180 - 110 \cdot 2^{-0,5t}$.*

Considerando que um funcionário recém-contratado em seus primeiros dias de trabalho ainda não completou uma semana, tem-se que t = 0 semanas.

Assim:

t(s)	$p(t)= 180 - 110 \cdot 2^{-0,5t}$
t = o semana	$p(0)= 180 - 110 \cdot 2^{-0,5 \cdot 0} =$ $=p(0) = 180 - 110 \cdot 2^{0} =$ $=p(0) = 180 - 110 \cdot 1=$ $=p(0) = 180 - 110=$ $p(0)= 70$

*Portanto, **(A)** é a alternativa correta.*

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

70 peças.	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão. Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(B)

98 peças.	**Resposta incorreta.**	Ao indicar esta alternativa, o aluno pode equivocadamente calculado: $p(1) = 180 - 110 \cdot 2^{-0,5 \cdot 1} = 70 \cdot \sqrt{2} = 70 \cdot 1,4 = 98$

(C)

103 peças.	**Resposta incorreta.**	Ao indicar esta alternativa, o aluno pode ter calculado para t=1, considerando $\sqrt{2} = 1,4$. $p(t) = 180 - 110 \cdot 2^{-0,5 \cdot 1} = 180 - 110 \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} = 180 - 110 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ $= 180 - 55 \cdot \sqrt{2} = 180 - 77 = 103$

(D)

125 peças.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno considera t=1 e equivocadamente calcula: $p(t) = 180 - 110 \cdot 2^{-0,5 \cdot 1} = 180 - 110 \cdot 2^{-1} = 180 - 110 \cdot \frac{1}{2} = 180 - 55 = 125$

(E)

235 peças.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno considera t=1, e comete equívoco no cálculo: $p(t) = 180 - 110 \cdot 2^{-0,5 \cdot 1} = 180 - 110 \cdot \frac{-1}{2} = 180 + 55 = 235$

Habilidade	Resolver situações-problema envolvendo função exponencial.
MP15	

Questão 6

Um capital C_0 é aplicado a uma taxa de juros compostos de 12% ao ano. Nesse regime, os juros gerados a cada período são incorporados ao capital para o cálculo dos juros do período seguinte. Sabendo-se que o capital em função do tempo é dada pela função:

$C = C_0 \cdot (1 + i)^t$, sendo que C_0 é o capital inicial e i a taxa de juros

Levando em conta que os juros são incorporados ao capital apenas ao final de cada ano, o capital dobrará seu valor em, aproximadamente

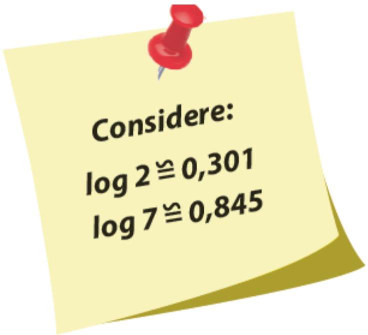
(A) 5 anos.

(B) 6 anos.

(C) 7 anos.

(D) 8 anos.

(E) 9 anos.



CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo desta questão é que o aluno resolva problemas envolvendo a função exponencial.

O valor C_1 do capital ao final do primeiro ano será: $C_1 = C_0 + 12\%$ de C_0, ou seja, $\boldsymbol{C_1 = C_0 \cdot (1+0{,}12) = 1{,}12\, C_0}$.

O valor C_2 do capital ao final do segundo ano será:

$\boldsymbol{C_2 = C_1 \cdot (1+0{,}12) = C_0 \cdot (1{,}12)^2}$.

*Então, o valor $C(t)$ do capital ao final de **t** anos será:* $\boldsymbol{C(t) = C_0 \cdot (1{,}12)^t}$.

O capital dobrará de valor quando $C(t) = 2C_0$, ou seja, quando:

$C_0 \cdot 1{,}12^t = 2C_0$ *, o que significa que:* $1{,}12^t = 2$.

Calculando o logaritmo dos dois membros dessa igualdade, temos:

$$t \cdot \log 1{,}12 = \log 2, \text{ ou seja, } t = \frac{\log 2}{\log 1{,}12}$$

Calculando log 1,12, obtemos:

$$\log \frac{112}{100} = \log 112 - \log 100$$

$$* \log 112 = \log\left(2^4 \cdot 7\right) = 4 \cdot \log 2 + \log 7 = 4 \cdot 0{,}301 + 0{,}845 = 2{,}049$$

$$** \log 100 = 2$$

Então: $\log 1{,}12 = 2{,}049 - 2 = 0{,}049$

O valor de t, portanto, será:

$$t = \frac{0{,}301}{0{,}049} \cong 6{,}14 \text{ anos} \cong 6 \text{ anos e } 2 \text{ meses}$$

*Como os juros são incorporados ao capital apenas ao final de cada ano, somente após 7 anos será possível dispor do capital dobrado, portanto, alternativa **C**.*

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

5 anos.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não utilizou os conceitos necessários para esta habilidade e assinalou a alternativa aleatoriamente.

(B)

6 anos.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno interpreta o resultado (6,14 anos), desconsiderando que o capital será dobrado apenas após o final de cada ano.

(C)

7 anos.	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(D)

8 anos.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não utilizou os conceitos necessários para esta habilidade e assinalou a alternativa aleatoriamente.

(E)

9 anos.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não utilizou os conceitos necessários para esta habilidade e assinalou a alternativa aleatoriamente.

Habilidade	Aplicar procedimentos de cálculos com logaritmos.
MP16	

Questão 7

O valor de *p* para o qual se verifica a igualdade: $\log_p 16 = 4$ é é

(A) –4

(B) 4

(C) $\sqrt{2}$

(D) –2

(E) 2

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo desta questão é que o aluno aplique os procedimentos de cálculo referentes à definição de logaritmo.

Trata-se de um prolongamento natural do estudo de potências, em que os expoentes a serem determinados serão chamados de logaritmos. Aprender a operar com tais expoentes amplifica a competência leitora de uma extensa classe de fenômenos, associados ao crescimento ou decrescimento exponencial.

Assim, as funções exponencial e logarítmica se distinguem apenas por uma troca de posições entre as variáveis.

Cálculo de p:

$$log_p 16 = 4 \Leftrightarrow 16 = p^4 \Rightarrow 2^4 = p^4 \Rightarrow p = 2$$

*Portanto, (**E**) é a alternativa correta.*

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

-4	**Resposta incorreta.**	Ao escolher essa resposta, o aluno mostra dificuldades com a utilização das propriedades do logaritmo e equivocadamente considera a base *p* como um número negativo. Ou escolheu aleatoriamente.

(B)

4	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não utilizou adequadamente as propriedades do logaritmo e da igualdade $16 = 4^2$ conclui que p=4.

(C)

$\sqrt{2}$	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno não utilizou as propriedades do logaritmo, apenas escolheu a resposta aleatoriamente.

(D)

-2	**Resposta incorreta.**	Possivelmente o aluno utilizou corretamente as propriedades do logaritmo, porém se equivoca ao considerar o sinal da base (p) como negativo.

(E)

2	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

Habilidade MP16	Aplicar procedimentos de cálculos de logaritmos.

Questão 8

Sejam a, b e c três números reais tais que $\log_a(b) = c$.

O valor de $\log_a(ab)$ é

(A) a^c.

(B) $1 + c$.

(C) $1 – c$.

(D) $a + b \cdot c$

(E) $a + c$.

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo da questão está em avaliar o conhecimento do aluno sobre as propriedades do logaritmo.

Temos que: $\log_a(b) = c$

Então:

$\log_a(ab) = \log_a(a) + \log_a(b)$

Como:

$\log_a(a) = 1$ e $\log_a(b) = c$ **(dado da questão)**

Logo:

$$\log_a(ab) = 1 + c$$

*Portanto, **(B)** é a alternativa correta.*

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

a^c.	**Resposta incorreta.**	Nessa resposta, possivelmente, o aluno apenas aplica equivocadamente a definição de logaritmo e não conclui o cálculo solicitado.

(B)

1 + c.	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão. Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(C)

1 – c.	**Resposta incorreta.**	Para a escolha dessa resposta, o aluno equivocadamente resolve como o logaritmo de um quociente.

(D)

$a + b \cdot c$	**Resposta incorreta.**	Ao assinalar essa alternativa, o aluno possivelmente desconhece as operações dos logaritmos e escolhe aleatoriamente a resposta.

(E)

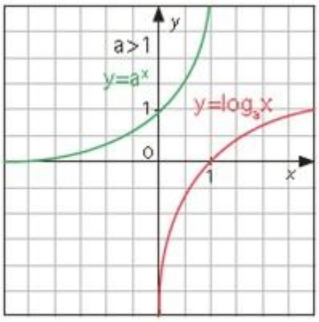
a + c.	**Resposta incorreta.**	Ao escolher essa resposta, o aluno possivelmente apresenta desconhecimento da linguagem, das propriedades e das operações com logaritmos e soma *c* à base.

Habilidade	Identificar os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas.
MP17	

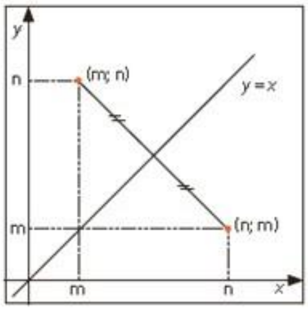
Questão 9

Considere as funções $f(x) = 10^x$ e $g(x) = \log x$. O gráfico que representa as duas funções no mesmo sistema de coordenadas é

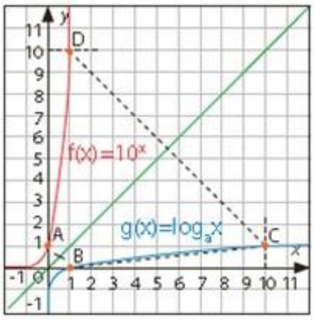
(A)



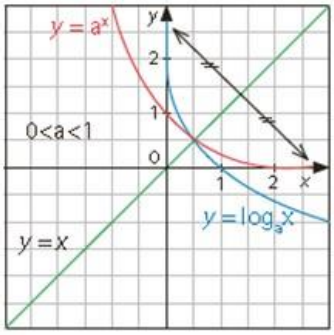
(B)



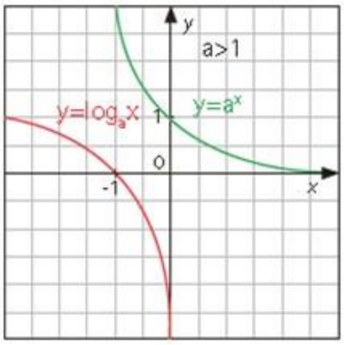
(C)



(D)



(E)



Correção Comentada

O objetivo da questão está em avaliar o conhecimento do aluno quanto aos atributos referentes aos gráficos das funções exponenciais e logarítmicas.

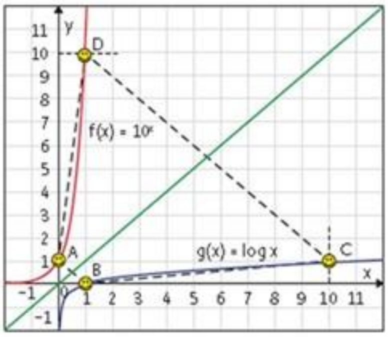
Em muitas situações problema, estudamos fenômenos que apresentam um crescimento ou decrescimento que não pode ser representado por uma função polinomial ou racional. Problemas cuja modelagem exige o emprego de uma função exponencial, tema central dessa habilidade, ocorrem em áreas distintas como a economia (cálculo de juros de investimentos e dívidas bancárias), a biologia (determinação da população de bactérias) e química (decaimento de material radioativo).

As funções logarítmicas, por sua vez, desempenham o papel contrário, permitindo-nos, por exemplo, determinar o instante em que uma função exponencial atinge um valor preestabelecido. Para compreender essa relação entre funções exponenciais e logarítmicas pede-se o estudo de funções inversas.

Para a questão, a identificação do gráfico correto exige o domínio dos vários tópicos relativos ao assunto e já vistos ao longo do ano, incluindo potências, equações e funções, em particular, a exponencial e a logarítmica.

Como as funções em questão são crescentes e inversíveis, seus pontos são simétricos em relação à assíntota, y=x.

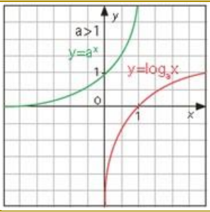
Logo a função f (exponencial) de base 10, $f(x) = 10^x$ se relaciona à g(x) = log x (logaritmo de base 10). Assim, temos



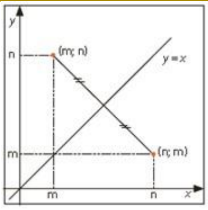
*Portanto, (**C**) é a alternativa correta.*

GRADE DE CORREÇÃO

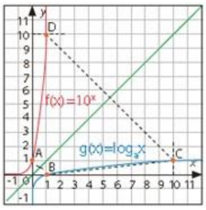
(A)

	**Resposta incorreta.**	Ao assinalar essa alternativa, o aluno mostra desconhecimento do assunto tratado na questão.

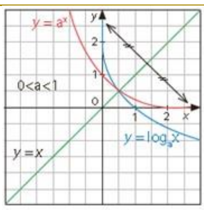
(B)

	**Resposta incorreta.**	A escolha equivocada dessa resposta mostra que o aluno não identifica as características relativas às funções exponenciais e logarítmicas.

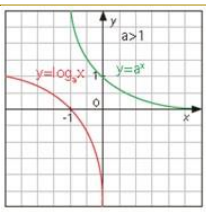
(C)

	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(D)

	**Resposta incorreta.**	Ao assinalar essa alternativa, o aluno possivelmente não identifica que as funções, f(x) e g(x), representadas na alternativa são decrescentes e, portanto, não correspondem ao solicitado no problema.

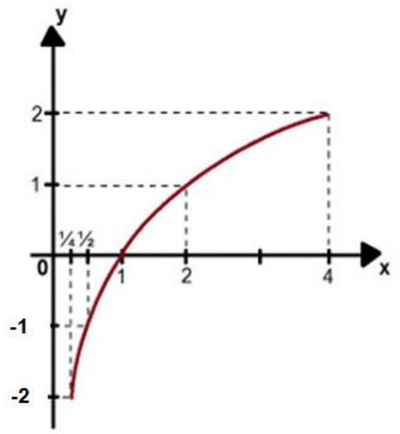
(E)

	**Resposta incorreta.**	Ao assinalar essa alternativa, o aluno mostra desconhecimento do assunto tratado na questão.

Habilidade	Identificar os gráficos de funções exponenciais e logarítmicas.
MP17	

Questão 10

Observe o gráfico.



A função correspondente ao gráfico está expressa em

(A) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

(B) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

(C) $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$.

(D) $y = \log_2 x$.

(E) $y = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo da questão está em avaliar a habilidade do aluno ao identificar a função logarítmica a partir do seu gráfico.

A leitura desse gráfico demanda que o estudante tenha o conhecimento do conceito e características do logaritmo e da função logarítmica.

Observando o gráfico vê-se que:

- *é de uma função logarítmica crescente;*
- *de base a = 2 > 1 (condição de existência), ou seja, a= 2 ⇨* $\boldsymbol{\log_2 x}$
- *Para valores de x ⇨* $\boldsymbol{y = \log_2 x}$

$$x = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{4} = y \Rightarrow 2^y = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2} \Rightarrow y = -2$$

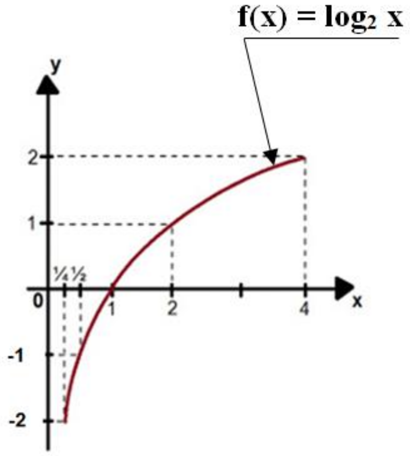
$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2 \frac{1}{2} = y \Rightarrow 2^y = \frac{1}{2} = 2^{-1} \Rightarrow y = -1$$

$$x = 1 \Rightarrow \log_2 1 = y \Rightarrow 2^y = 1 = 2^0 \Rightarrow y = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow \log_2 2 = y \Rightarrow 2^y = 2 = 2^1 \Rightarrow y = 1$$

$$x = 4 \Rightarrow \log_2 4 = y \Rightarrow 2^y = 4 = 2^2 \Rightarrow y = 2$$

Como se observa no gráfico da função



Donde se nota que a base da função é 2, assim $y = \log_2 x \;\; \Leftrightarrow \;\; \boldsymbol{f(x) = \log_2 x}$

*Portanto, (**D**) é a alternativa correta.*

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

$y = \log_{\frac{1}{4}} x$	**Resposta incorreta.**	Para a escolha dessa resposta, o aluno faz a relação correta da função e do gráfico, porém se equivoca com a representação da base do logaritmo.

(B)

$y = \log_{\frac{1}{2}} x.$	**Resposta incorreta.**	Para a escolha dessa resposta, o aluno faz a relação correta da função e do gráfico, porém se equivoca com a representação da base do logaritmo.

(C)

$y = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2.$	**Resposta incorreta.**	Nessa resposta, o aluno possivelmente entende a proposta da questão, contudo equivocadamente inverte os elementos representados na função.

(D)

$\mathbf{y = \log_2 x.}$	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(E)

$y = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2$	**Resposta incorreta.**	Ao assinalar essa alternativa, o aluno possivelmente considera a função potência como inversa, no entanto não a relaciona corretamente com o gráfico da função logarítmica dado na questão.

Habilidade	Resolver situações-problema envolvendo função logarítmica.
MP18	

Questão 11

Para medir o potencial destrutivo de um terremoto, utiliza-se a escala Richter.

A energia calculada em um terremoto é dada pela fórmula: $\mathbf{I = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right)}$, na qual I varia de 0 a 9, E = energia liberada em kWh e o $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kWh.

A partir destes dados, a energia liberada por um terremoto de intensidade 6 graus na escala Richter em kWh é

(A) $7 \cdot 10^{-3}$

(B) $7 \cdot 10^{6}$

(C) $7 \cdot 10^{-6}$

(D) $7 \cdot 10^{9}$

(E) $7 \cdot 10^{12}$

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo da questão está em avaliar a capacidade do aluno de operar com expoentes e logaritmos.

De acordo com os dados temos:

$I = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$ *e* $I=6$*, então temos que*

$$6 = \frac{2}{3} \cdot \log_{10}\left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \Rightarrow \frac{6}{\frac{2}{3}} = \log_{10}\left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \Rightarrow 9 = \log_{10}\left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \Rightarrow$$

$$10^9 = \left(\frac{E}{7 \cdot 10^{-3}}\right)$$

Desta forma, o valor de E será:

$$E = 7 \cdot 10^{-3} \cdot 10^9 = 7 \cdot 10^6\, kWh$$

Portanto, (B) é a alternativa correta.

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

$7 \cdot 10^{-3}$	**Resposta incorreta.**	Para a escolha dessa resposta, o aluno utilizou uma informação do enunciado.

(B)

$\mathbf{7 \cdot 10^{6}}$	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão. Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(C)

$7 \cdot 10^{-6}$	**Resposta incorreta.**	Para a escolha dessa resposta, possivelmente o aluno aplicou a propriedade das potências erroneamente.

(D)

$7 \cdot 10^{9}$	**Resposta incorreta.**	Para a escolha dessa resposta, possivelmente o aluno aplicou a propriedade das potências erroneamente.

(E)

$7 \cdot 10^{12}$	**Resposta incorreta.**	Para a escolha dessa resposta, possivelmente o aluno aplicou a propriedade das potências erroneamente.

Habilidade MP18	Resolver situações-problema envolvendo função logarítmica.

Questão 12

A massa m de carbono 14 varia com o tempo de acordo com a seguinte expressão:

$$m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

(cada vez que t assume valores múltiplos sucessivos de 5 730, a massa reduz-se a metade).

Se for constatada que a massa de carbono 14 restante no fóssil é apenas 10% da massa inicial, a idade estimada do fóssil é de

(Dado: $\log 2 \cong 0{,}301$)

(A) aproximadamente 11.460 anos.

(B) aproximadamente 17.190 anos.

(C) aproximadamente 19.036 anos.

(D) aproximadamente 28.650 anos.

(E) aproximadamente 40.110 anos.

CORREÇÃO COMENTADA

O objetivo da questão é avaliar a percepção do aluno quanto à articulação entre as funções exponencial e logarítmica.

Dados:

$$\begin{cases} m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \quad (I) \\ \text{a massa de carbono 14 é 10\% da massa inicial} \Rightarrow m(t) = 0{,}1 \cdot m_0 \ (II) \\ \log 2 = 0{,}301 \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I), temos que:

$$0{,}1 \cdot m_0 = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \Rightarrow 0{,}1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \quad (III)$$

Aplicando uma das propriedades da potenciação em (III), temos que:

$$0{,}1 = 2^{-\frac{t}{5730}} \quad (IV)$$

Aplicando a definição de logaritmo em (IV), temos que:

$$\log_2 0{,}1 = -\frac{t}{5730} \Rightarrow -t = \log_2 0{,}1 \cdot 5730 \ (V)$$

Aplicando a propriedade da mudança de base de logaritmos em $\log_2 0{,}1$, temos que:

$$-t = \frac{\log 0{,}1}{\log 2} \cdot 5730 \Rightarrow -t = \frac{\log 10^{-1}}{\log 2} \Rightarrow -t = \frac{-1}{0{,}301} \cdot 5730 \Rightarrow -t = -\frac{5730}{0{,}301} \Rightarrow t = \frac{5730}{0{,}301}$$

$$\therefore t \cong 19.036 \text{ anos}$$

*Desta forma, o resultado obtido, atende à alternativa **C** da questão.*

GRADE DE CORREÇÃO

(A)

aproximadamente 11.460 anos.	**Resposta incorreta.**	Possivelmente para escolher essa resposta o aluno multiplicou por 2, um dos números apresentado na expressão (2 · 5730).

(B)

aproximadamente 17.190 anos.	**Resposta incorreta.**	Para a escolha dessa resposta, possivelmente o aluno tenha multiplicado 5730 · 0,301 · 10 = 17 247.

(C)

aproximadamente 19.036 anos.	**Resposta correta.**	**O aluno interpretou corretamente o enunciado e aplicou seus conhecimentos para resolver a questão.** **Cabe ao professor verificar por meio dos registros do aluno se as estratégias utilizadas para a resolução do problema são pertinentes ou não.**

(D)

aproximadamente 28.650 anos.	**Resposta incorreta.**	Ao assinalar essa alternativa, o aluno possivelmente multiplica por 10 e divide por 2, (10 · 5730/2 = 28650)

(E)

aproximadamente 40.110 anos.	**Resposta incorreta.**	Ao assinalar essa alternativa, o aluno possivelmente multiplica por 14 e divide por 2, (5730 · 14 = 80220 e 80220/2 = 40110).

Avaliação da Aprendizagem em Processo

Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional
Coordenadora: Cyntia Lemes da Silva Gonçalves da Fonseca

Departamento de Avaliação Educacional
Diretora: Patricia de Barros Monteiro
Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Planejamento e Análise de Avaliações
Diretor: Juvenal de Gouveia
Ademilde Ferreira de Souza, Cristiane Dias Mirisola, Soraia Calderoni Statonato

Centro de Aplicação de Avaliações
Diretora: Isabelle Regina de Amorim Mesquita
Denis Delgado dos Santos, José Guilherme Brauner Filho, Kamila Lopes Candido, Lilian Sakai, Nilson Luiz da Costa Paes, Teresa Miyoko Souza Vilela

Coordenadoria de Gestão da Educação Básica
Coordenadora: Valéria de Souza

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão da Educação Básica
Diretora: Regina Aparecida Resek Santiago

Centro do Ensino Fundamental dos Anos Finais, do Ensino Médio e da Educação Profissional - CEFAF
Diretor: Herbert Gomes da Silva

Equipe Curricular CGEB de Matemática
Autoria, Leitura crítica e validação do material
João dos Santos Vitalino, Maria Adriana Pagan, Otávio Yoshio Yamanaka e Vanderley Aparecido Cornatione

Professores Coordenadores dos Núcleos Pedagógicos das Diretorias de Ensino
Leitura crítica e validação do material de Matemática
Ademar Gomes Vieira, Arlete Ap. Oliveira de Almeida, Carlos Alberto Simas de Almeida, Cristina Aparecida da Silva, Eliana Rodrigues Lotte, Fátima Rosangela Gebin, Maria Helena Silveira, Raphael J. Mamede, Reis Magno Leal Pereira, Rosana Jorge Monteiro Magni, Rosemeire Lepinski, Sandra Shisue Yamaguchi.

Representantes do CAPE
Leitura crítica, validação e adaptação do material para os deficientes visuais
Tânia Regina Martins Resende