GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

AVALIAÇÃO DA
APRENDIZAGEM EM PROCESSO

COMENTÁRIOS E RECOMENDAÇÕES PEDAGÓGICAS

Subsídios para o
Professor de Matemática

1ª série do Ensino Médio

Prova de Matemática

São Paulo
2° Semestre de 2014

7ª Edição

Avaliação da Aprendizagem em Processo

APRESENTAÇÃO

A *Avaliação da Aprendizagem em Processo* se caracteriza como ação desenvolvida de modo colaborativo entre a Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional e a Coordenadoria de Gestão da Educação Básica, que também contou com a contribuição de Professores do Núcleo Pedagógico de diferentes Diretorias de Ensino.

Aplicada desde 2011, abrangeu inicialmente o 6º ano do Ensino Fundamental e a 1ª série do Ensino Médio. Gradativamente foi expandida para os demais anos/séries (do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e 1ª a 3ª série do Ensino Médio) com aplicação no início de cada semestre do ano letivo.

Essa ação, fundamentada no Currículo do Estado de São Paulo, tem como objetivo fornecer indicadores qualitativos do processo de aprendizagem do educando, a partir de habilidades prescritas no Currículo. Dialoga com as habilidades contidas no SARESP, SAEB, ENEM e tem se mostrado bem avaliada pelos educadores da rede estadual. Propõe o acompanhamento da aprendizagem das turmas e do aluno de forma individualizada, por meio de um instrumento de caráter diagnóstico. Objetiva apoiar e subsidiar os professores de Língua Portuguesa e de Matemática que atuam nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio da Rede Estadual de São Paulo, na elaboração de estratégias para reverter desempenhos insatisfatórios, inclusive em processos de recuperação.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação, na forma de cadernos de provas para os alunos, também foram elaborados documentos específicos de orientação para os professores – Comentários e Recomendações Pedagógicas – contendo o quadro de habilidades, gabaritos, itens, interpretação pedagógica das alternativas, sugestões de atividades subsequentes às análises dos resultados e orientação para aplicação e correção das produções textuais.

Espera-se que, agregados aos registros que o professor já possui, sejam instrumentos para a definição de pautas individuais e coletivas que, organizadas em um plano de ação, mobilizem procedimentos, atitudes e conceitos necessários para as atividades de sala de aula, sobretudo, aquelas relacionadas aos processos de recuperação da aprendizagem.

Em 2014 a inovação introduzida a partir da sétima edição é a inclusão de provas e materiais de orientação para os anos dos ciclos de alfabetização e intermediário do Ensino Fundamental – 2º ao 5º - também articulado ao currículo e ao programa Ler e Escrever.

COORDENADORIA DE INFORMAÇÃO, MONITORAMENTO E AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

COORDENADORIA DE GESTÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Avaliação da Aprendizagem em Processo – Matemática

Nesta edição da Avaliação da Aprendizagem em Processo, aplicada em todos anos/séries da Educação Básica (Ensino Fundamental e Médio), as questões foram idealizadas de modo a atender habilidades desenvolvidas durante o primeiro semestre.

As questões apresentadas retratam uma parte significativa do que foi previsto no conteúdo curricular de Matemática e poderão permitir a verificação de algumas habilidades que foram ou não desenvolvidas no processo de ensino e aprendizagem.

Composição:

1. *Participantes:*
   5ª Séries/6º Anos à 8ª Séries/ 9º Anos dos anos finais do Ensino Fundamental e 1ª à 3ª Séries do Ensino Médio.

2. *Composição das provas de Matemática:*
   Anos Finais do Ensino Fundamental = 10 questões objetivas e 03 questões abertas.
   Ensino Médio = 10 questões objetivas e 02 questões abertas.

3. *Matrizes de Referência (habilidades) para a constituição de itens das provas objetivas:*
   – Currículo do Estado de São Paulo.

4. *Banco de questões:*
   – Questões inéditas e adaptadas, formalizadas a partir das habilidades prescritas no Currículo do Estado de São Paulo .

EQUIPE DE MATEMÁTICA

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA

1ª SÉRIE DO ENSINO MÉDIO

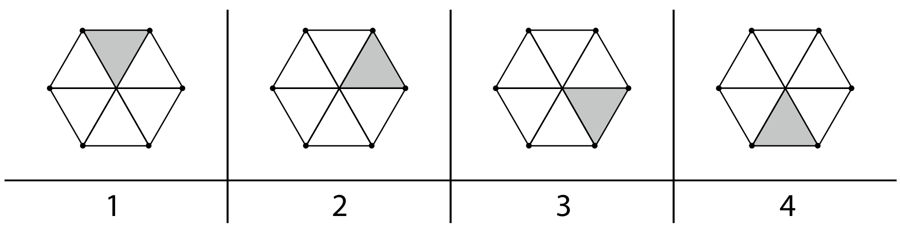
Nº do item	Habilidades
1 - Objetiva	Saber reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens, expressando-as matematicamente, quando possível.
2 - Objetiva	Conhecer as características principais das progressões aritméticas.
3 - Aberta	Compreender a construção do gráfico de funções de 1° grau, sabendo caracterizar o crescimento, o decrescimento e a taxa de variação.
4 - Objetiva	Conhecer as características principais das progressões geométricas.
5 - Objetiva	Saber reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens, expressando-as matematicamente, quando possível.
6 - Aberta	Saber utilizar em diferentes contextos as funções de 1° e de 2° graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos.
7 - Objetiva	Conhecer as características principais das progressões geométricas, expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras, sabendo aplicá-las em diferentes contextos.
8 - Objetiva	Saber reconhecer relações de proporcionalidade direta, inversa, direta com o quadrado, entre outras, representando-as por meio de funções.
9 - Objetiva	Compreender a construção do gráfico de funções de 1° grau, sabendo caracterizar o crescimento, o decrescimento e a taxa de variação.
10 - Objetiva	Compreender a construção do gráfico de funções de 2° grau como expressões de proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado de outra, sabendo caracterizar os intervalos de crescimento e decrescimento, os sinais da função e os valores extremos (pontos de máximo ou de mínimo).
11 - Objetiva	Saber utilizar em diferentes contextos as funções de 1° e de 2° graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos.
12 - Objetiva	Saber utilizar em diferentes contextos as funções de 1º e de 2° graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos.

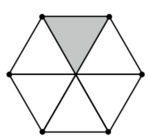
Habilidade:

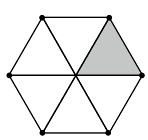
Saber reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens, expressando-as matematicamente, quando possível.

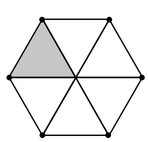
Questão 01 – Objetiva

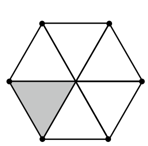
A seguir, é apresentada uma sequência na forma figurativa. Indique a alternativa que representa a 92ª posição.



(A) 

(B) 

(C) 

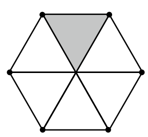
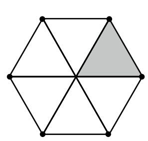
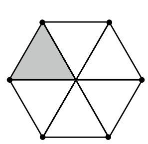
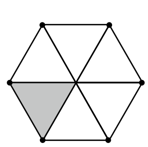
(D) 

Comentários e recomendações pedagógicas

As sequências figurais também podem enriquecer o trabalho com a observação de regularidades e generalização de padrões. No caso da sequência em questão o aluno possivelmente reconhece que existe uma rotação no sentido horário dos triângulos pintados na cor azul e que cada período é formado por seis figuras. A figura representada pela alternativa (C) será a sexta figura da sequência e a oitava figura será representada pela figura da alternativa correta (B), que satisfaz o enunciado da questão. Observa-se que: a 7ª figura é igual a 1ª, a 8ª é igual a 2ª, assim sucessivamente. Cada período é formado por seis figuras consecutivas, portanto, a 92ª figura será igual a 2ª figura da sequência apresentada na questão. Portanto $\frac{92}{6}$ deixa resto 2, contemplando a figura 2 do enunciado da questão.

No item "algumas referências" são oferecidas possibilidades de pesquisas, para o desenvolvimento da habilidade requerida, que possivelmente favorecerá a compreensão da situação-problema apresentada.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) 	**Resposta incorreta.** O aluno não reconhece o padrão estabelecido nas quatro figuras presentes no enunciado da questão, de modo que a 7ª figura é igual a 1ª, que a 8ª é igual a 2ª, sucessivamente. A figura desta alternativa mostra a 91ª posição, o ciclo se completa no sentido horário de seis em seis figuras.
(B) 	**Resposta correta.** O aluno interpreta corretamente o enunciado da questão, realiza a leitura figural buscando em seu repertório conceitos como: "rotação", "sentido horário" e efetua o devido tratamento semiótico da situação apresentada. Reconhece que a 7ª figura é igual a 1ª que a 8ª é igual a 2ª, assim sucessivamente. Cada período é formado por seis figuras, portanto, a 92ª figura será igual a 2ª, pois $\frac{92}{6}$ deixa resto 2, contemplando a figura 2 do enunciado da questão.
(C) 	**Resposta incorreta.** O aluno não reconhece o padrão estabelecido nas quatro figuras presentes no enunciado da questão, de modo que a 7ª figura é igual a 1ª, que a 8ª é igual a 2ª, e assim sucessivamente. A figura desta alternativa mostra a 96ª posição, o ciclo se completa no sentido horário de seis em seis figuras.
(D) 	**Resposta incorreta.** O aluno não reconhece o padrão estabelecido nas quatro figuras presentes no enunciado da questão, de modo que a 7ª figura é igual a 1ª, que a 8ª é igual a 2ª, assim sucessivamente. A figura desta alternativa mostra a 95ª posição, o ciclo se completa no sentido horário de seis em seis figuras.

Algumas referências

1 - Caderno do Professor: Matemática - 1ª Série - Ensino Médio - Volume 1- Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 1: conjuntos numéricos: regularidades numéricas e geométricas.

2 - Caderno do Professor: Matemática - 7ªSérie/8ºAno - Ensino Fundamental - Volume 1 - Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 8: aritmética e geometria: expressões Algébricas de algumas ideias fundamentais.

3 - Artigos Acadêmicos:

- BORRALHO. A.; BARBOSA. E. (2009). Pensamento Algébrico e Exploração de Padrões.
Disponível em: http://www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf ,
Acesso em: 19/03/2014

- MIEKO. A.; CENTURIÓN. M; (2009). Padrões e regularidades nas aulas de Matemática.
Disponível em: http://www.nilsonjosemachado.net/sema20091124.pdf ,
Acesso em: 19/03/2014

- ALVARENGA D.; VALE. I.; (2007). A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico,
Disponível em: http://www.ese.ipvc.pt/padroes/artigos/2007_11.pdf,
Acesso em: 19/03/2014

4 - Objetos Digitais de Aprendizagem:

- Matemática: sequências e padrões "Math - Sequences and Patterns"
Disponível em:
http://www.topmarks.co.uk/maths-games/11-14-years/number
Acesso em: 20/03/2014

- Jogo com números
Disponível em: http://www.imagem.eti.br/jogo_com_numeros/jogo_sequencia_de_numeros.html
Acesso em: 20/03/2014

5 - Vídeo:

- Entendendo o teste de QI-Lógica com imagens e desenhos
Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=QltOLLo--jU
Acesso em: 21/03/2014

Habilidade:

Conhecer as características principais das progressões aritméticas.

Questão 02 – Objetiva

Observe as sequências a seguir.

I) (1, 5, 9, 13, ...).

II) (2, 3, 5, 7, ...).

III) (7, 4, 1, –2, ...).

IV) $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \ldots\right)$.

V) (3, 6, 12, 24, ...).

Podemos afirmar que as Progressões Aritméticas, são:

(A) I, II, III.

(B) I, III, V.

(C) II, IV, V.

(D) I, III, V.

Comentários e recomendações pedagógicas

Esta questão tem como objetivo a investigação da regularidade de uma sequência e consequentemente aferir se realmente ela se refere a uma P.A, identificando uma constante aditiva de regularidade, a razão da P.A, quando se realiza a diferença entre o segundo termo e o primeiro termo, que se repete nos infinitos termos desta progressão.

No item "algumas referências" são oferecidas possibilidades de pesquisas, para o desenvolvimento da habilidade requerida, que possivelmente favorecerá a compreensão da situação-problema apresentada.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) I, II, III.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente identificou que as sequências indicadas se referem a uma P.A, porém não estabeleceu corretamente as respectivas razões.
(B) I, III, IV.	**Resposta correta.** O aluno identifica as razões das sequências apresentadas, verificando que a partir dos dois primeiros termos pode calcular os demais a partir da razão encontrada, ou seja: I – Razão: 4; III – Razão: –3; IV – Razão: 0
(C) II, IV, V.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente não reconhece que as sequências II e a V, não se tratam de Progressões Aritméticas.
(D) I, III, V.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente não reconhece que a sequência V, não representa uma PA.

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática – 1ª Série - Volume 1 - Edição 2014:
- Situação de Aprendizagem 1: conjuntos numéricos: regularidades numéricas e geométricas.
- Situação de Aprendizagem 2: progressões aritméticas e progressões geométricas.

2. Caderno do Professor: Matemática - 7ª Série / 8º Ano - Ensino Fundamental - Volume 1 - Edição 2014:
- Situação de Aprendizagem 8: aritmética e geometria: expressões Algébricas de algumas ideias fundamentais.

3. Artigos Acadêmicos:
- BORRALHO. A.; BARBOSA. E. (2009). Pensamento Algébrico e Exploração de Padrões.
Disponível em: http://www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf ,
Acesso em: 19/03/2014
- MIEKO. A.; CENTURIÓN. M; (2009). Padrões e regularidades nas aulas de Matemática.
Disponível em: http://www.nilsonjosemachado.net/sema20091124.pdf ,
Acesso em: 19/03/2014

- ALVARENGA D.; VALE. I.; (2007). A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico,
Disponível em: http://www.ese.ipvc.pt/padroes/artigos/2007_11.pdf,
Acesso em: 19/03/2014

4. Objetos Digitais de Aprendizagem:

- Matemática: sequências e padrões "Math - Sequences and Patterns"
Disponível em:
http://www.topmarks.co.uk/maths-games/11-14-years/number
Acesso em: 20/03/2014
- Jogo com números
Disponível em: http://www.imagem.eti.br/jogo_com_numeros/jogo_sequencia_de_numeros.html
Acesso em: 20/03/2014
- Calculadora de Progressão Aritmética
Disponível em: http://www.calculadoraonline.com.br/progressao-aritmetica
Acesso em: 22/03/2014

5. Sites:

- Progressão aritmética
Disponível em: http://www.matematicadidatica.com.br/ProgressaoAritmetica.aspx
Acesso em: 22/03/2014

6. Novo Telecurso – Ensino Fundamental - Matemática:

- Teleaula 33: progressão aritmética. (duração: 14'26")

7. Vídeos:

- Entendendo o teste de QI-Lógica com imagens e desenhos
Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=QltOLLo--jU
Acesso em: 21/03/2014
- Professor do curso Pré-Enem, da Abril Educação, mostra como assunto pode ser abordado na avaliação federal:
Disponível em: http://veja.abril.com.br/noticia/educacao/enem-2013-videoaula-sobre-progressao-aritmetica-e-geometrica
Acesso em: 22/03/2014

Habilidade:

Compreender a construção do gráfico de funções de 1° grau, sabendo caracterizar o crescimento, o decrescimento e a taxa de variação.

Questão 03 – Aberta

Considerando C(x) o custo total da produção de um número x de produtos, CF(x) o custo fixo e CV(x) o custo variável, podemos escrever que C = CF + CV. Suponha que, para uma fotocopiadora, o custo por cópia reproduzida seja de 5 centavos e que o custo fixo de seu negócio seja de R$ 2 mil.

Escreva a sentença que relaciona C e x. Justifique sua resposta.

Comentários e recomendações pedagógicas

As funções de custos simples para um negócio consistem em duas partes: o custo fixo, cujo valor é independente de quantas unidades de certo produto são produzidas (exemplo: aluguel), e os custos variáveis, que dependem do número de produtos produzidos. Para escrever a sentença que relaciona **C** e **x**, existe a necessidade de se escrever a expressão algébrica relativa ao custo fixo, CF e a sentença que relaciona CV e x. Logo a sentença que expressa o custo fixo será **CF = 2000, isto é, y = 2000** e a que expressa à sentença que relaciona **CV** e **x** será **CV(x) = 0,05x**, isto é, **y = 0,05x**, portanto com estes dados temos a sentença que relaciona **C** e **x** que é **C(x) = 0,05x + 2000** ou **C(x) = 2000 + 0,05x, isto é, y = 2000 + 0,05x**, que é a proposta da questão.

No item "algumas referências" são oferecidas possibilidades de pesquisas, para o desenvolvimento da habilidade requerida, que possivelmente favorecerá a compreensão da situação-problema apresentada.

Grade de Correção

Resposta correta
Ao representar a expressão **C(x) = 2000 + 0,05x**, o aluno mostra que compreendeu perfeitamente o enunciado da questão, relacionando corretamente o conceito de função, apresentando assim a formalização da habilidade descrita nesta questão.

Resposta parcialmente correta
O aluno resolve esta questão substituindo na fórmula que se segue.
C = CF + CV achando os valores de CF e CV escreve a sentença que relaciona **C** e **x**, CF = 2000, isto é, y = 2000 e a que expressa a sentença que relaciona **CV** e **x** será CV(x) = 0,05x, isto é, y = 0,05x, não observando que com estes dois dados seriam necessários para concluir o exercício, provavelmente ele não entendeu a proposta do problema.

Respostas incorretas
O aluno substitui na fórmula C = CF + CV os valores apresentados no enunciado do problema.
C = 2 + 5 => C = 7 ou C(x) = 2 + 5x ou C(x) = 2x + 5.

Algumas referências

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série – Volume 1 – Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 6: funções polinomiais de 1º grau: significado, gráficos, crescimento, decrescimento e taxas.

2. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 8ª série/ 9º ano – Volume 1 – Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 7: grandezas proporcionais: estudo funcional, significados e contextos.

3. + Matemática - Coletânea de Atividades - Volume 3:

- Atividade 18: interdependência de grandezas, (p.66);
- Atividade 19: grandezas proporcionais, (p.69).

4. Experiências Matemáticas – 7ª série:

- Atividade 8 interdependência de grandezas.
. Parte 1: as contas de luz do Paulinho, (p.97);
. Parte 2: descobrindo a relação, (p.100);
. Parte 3: analisando a variação, (p.101).
- Atividade 9: grandezas proporcionais.
. Parte 1: analisando a variação, (p.113);
. Parte 2: analisando gráficos, (p.115);
. Parte 3: exercitando, (p.116);
. Parte 4: mais problemas, (p.116);
. Parte 5: experimentando para responder, (p.120).

5. Novo Telecurso – Ensino Médio – Matemática:

- Teleaula 30: função do 1º grau, (duração: 12’00”)

6. Novo Telecurso – Ensino Fundamental:

-Teleaula 49: proporção inversa, (duração: 13’16”).

7. Revista Nova Escola:

- Rosilene Anevan Fagundes: A professora de Pinhais, PR, orientou a turma de 8º ano na investigação da interdependência entre grandezas representadas por um tipo específico de função: acesso em: 22/02/2014.

8. Brasil Escola:

Funções

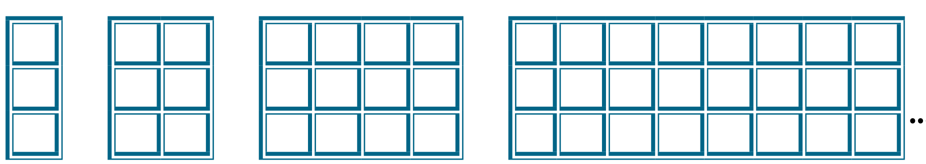
Disponível em:
http://www.brasilescola.com/matematica/funcoes.htm
Acesso em 08/03/2014.
Proporcionalidade entre grandezas
Disponível em:
http://www.brasilescola.com/matematica/proporcionalidade-entre-grandezas.htm
Acesso em: 09/03/2014
9. Currículo+:
As verdadeiras proporções do Homem Vitruviano
Disponível em:
http://curriculomais.educacao.sp.gov.br/as-verdadeiras-proporcoes-do-homem-vitruviano/
Acesso em: 09/03/2014.

Habilidade:

Conhecer as características principais das progressões geométricas.

Questão 04 – Objetiva

Dada a sequência de figuras abaixo:



1 2 3 4 ...

Pode-se dizer que:

(A) A sequência representa uma PG de razão 2 e o quinto termo é 24.

(B) A sequência representa uma PG e a soma dos quatro primeiros termos é 10.

(C) A sequência representa uma PG de razão 3 e a fórmula do termo geral é: $a_n = 3 . 2^{n-1}$.

(D) A sequência representa uma PG de razão 2 e a figura 5 tem 48 quadradinhos.

Comentários e recomendações pedagógicas

Esta questão além de verificar se o aluno assimilou o conceito de Progressão Geométrica, utilizará como eixo condutor do seu raciocínio o conceito de área dos retângulos apresentados na figura e a partir deste pensamento montar a sequência que representa as áreas das quatro figuras iniciais, e chegará na sequência: (3, 6, 12, 24, ...) que é uma PG, pois cada termo a_n é obtido a partir da multiplicação do termo anterior a_{n-1} por 2.

Este item também pode ajudar o aluno a construir implicitamente a fórmula do termo geral, como mostra a tabela.

Posição de um termo na sequência	Cálculo	Quantidade de quadradinhos
1	3	3
2	$3 . 2 = 3 . 2^1$	6
3	$6 . 2 = 3 . 2 . 2 = 3 . 2^2$	12
4	$12 . 2 = 3 . 2 . 2. 2 = 3 . 2^3$	24
...	...	a_{n-1}
n	$(a_{n-1}) . 2 = 3 . 2^{n-1}$	$a_n = (a_{n-1}) . 2 = 3 . 2^{n-1}$

No item "algumas referências" são oferecidas possibilidades de pesquisas, para o desenvolvimento da habilidade requerida, que possivelmente favorecerá a compreensão da situação-problema apresentada.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) A sequência representa uma PG de razão 2 e o quinto termo é 24.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente identifica a razão da PG, porém não percebe que o quarto termo é composto por 24 "quadradinhos" e não o quinto termo.
(B) A sequência representa uma PG e a soma dos quatro primeiros termos é 10.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente calcula a soma dos números que representam a posição das figuras (1 + 2 + 3 + 4 = 10).
(C) A sequência representa uma PG de razão 3 e a fórmula do termo geral é: $a_n = 3. 2^{n-1}$.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente identifica a regularidade existente nas figuras, porém não formaliza matematicamente o seu raciocínio, detectando de forma incorreta a razão e a expressão do termo geral.

(D) A sequência representa uma PG de razão 2 e o quinto termo é 48.	**Resposta Correta.** O aluno reconhece a sequência e a identifica como sendo uma Progressão Geométrica de (razão 2), e a partir deste ponto obtém a fórmula do termo geral: $a_n = 3 . 2^{n-1}$.

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série – Volume 1 – Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 1: conjuntos numéricos: regularidades numéricas e geométricas.
- Situação de Aprendizagem 2: progressões aritméticas e progressões geométricas.

2. Caderno do Professor: Matemática - 7ªSérie/8ºAno - Ensino Fundamental - Volume 1 - Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 8: aritmética e geometria: expressões Algébricas de algumas ideias fundamentais.

3. Artigos Acadêmicos:

- BORRALHO. A.; BARBOSA. E. (2009). Pensamento Algébrico e Exploração de Padrões.
Disponível em: http://www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf ,
Acesso em: 19/03/2014

- MIEKO. A.; CENTURIÓN. M; (2009). Padrões e regularidades nas aulas de Matemática.
Disponível em: http://www.nilsonjosemachado.net/sema20091124.pdf ,
Acesso em: 19/03/2014

- ALVARENGA D.; VALE. I.; (2007). A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico,
Disponível em: http://www.ese.ipvc.pt/padroes/artigos/2007_11.pdf,
Acesso em: 19/03/2014

4. Objetos Digitais de Aprendizagem:

- Matemática: sequências e padrões "Math - Sequences and Patterns"
Disponível em:
http://www.topmarks.co.uk/maths-games/11-14-years/number
Acesso em: 20/03/2014

- Jogo com números
Disponível em: http://www.imagem.eti.br/jogo_com_numeros/jogo_sequencia_de_numeros.html

Acesso em: 20/03/2014

- Calculadora de Progressão Aritmética

Disponível em: http://www.calculadoraonline.com.br/progressao-aritmetica

Acesso em: 22/03/2014

- Calculadora de Progressão Geométrica

Disponível em: http://www.calculadoraonline.com.br/progressao-geometrica

Acesso em: 22/03/2014

5. Sites:

- Progressão aritmética

Disponível em: http://www.matematicadidatica.com.br/ProgressaoAritmetica.aspx

Acesso em: 22/03/2014

- Progressão geométrica

Disponível em: http://www.somatematica.com.br/emedio/pg.php

Acesso em: 23/02/2014

- Progressão geométrica

Disponível em: http://www.matematicadidatica.com.br/ProgressaoGeometrica.aspx

Acesso em: 23/02/2014

6. Novo Telecurso – Ensino Fundamental - Matemática:

- Teleaula 33: progressão aritmética. (duração: 14'26")
- Teleaula 35: progressão geométrica. (duração: 12'36")

7. Vídeos:

- Entendendo o teste de QI-Lógica com imagens e desenhos

Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=QltOLLo--jU

Acesso em: 21/03/2014

- Professor do curso Pré-Enem, da Abril Educação, mostra como assunto pode ser abordado na avaliação federal:

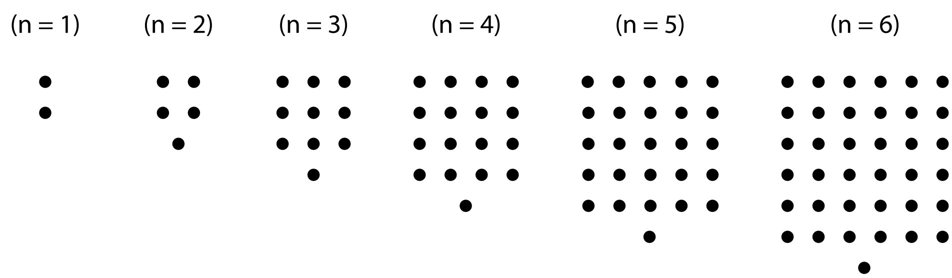
Disponível em: http://veja.abril.com.br/noticia/educacao/enem-2013-videoaula-sobre-progressao-aritmetica-e-geometrica

Acesso em: 22/03/2014

Habilidade:
Saber reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens, expressando-as matematicamente, quando possível.

Questão 05 – Objetiva

Observe o padrão de regularidade da sequência de figuras a seguir:



A expressão do termo geral da sequência acima é:

(A) n = 1.

(B) $n^2 - 1$.

(C) 2n + 1.

(D) $n^2 + 1$.

Comentários e recomendações pedagógicas

As atividades com sequências pode favorecer a compreensão da álgebra, uma vez que um dos processos de ensino e aprendizagem de álgebra diz respeito a generalização de regularidades. É a partir da observação de casos particulares, que o aluno poderá descobrir regularidades, padrões e, a partir deles, levantar hipóteses, fazer conjecturas etc. Favorecendo o desenvolvimento do raciocínio dedutivo.

Desta forma, essa poderá ser uma forma de generalizar quantidades indicadas por figuras, mesmo que estas estejam inacessíveis. Essa estratégia permite trabalhar conceitos de variáveis e até de incógnitas, desde que seja solicitado indicar a posição em que determinada figura deve aparecer.

Lembramos que o caderno do Professor, 6ª série (7º ano), volume 4, apresenta essa estratégia, iniciando com padrões geométricos e passando, em seguida, a padrões numéricos.

A chave dessa situação de aprendizagem é determinar a lei de formação da sequência, assim como a exigida nesta questão.

No item "algumas referências" são oferecidas possibilidades de pesquisas, para o desenvolvimento da habilidade requerida, que possivelmente favorecerá a compreensão da situação-problema apresentada.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) $n + 1$.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente percebe o valor constante somado a cada termo da sequência, mas não consegue associar o valor n ao restante dos pontinhos de cada termo. O aluno demonstra não possuir a habilidade solicitada.
(B) $n^2 - 1$.	**Resposta incorreta.** O aluno, possivelmente, percebe uma regularidade na sequência, mas não consegue traduzir o valor constante somado a cada termo em uma expressão algébrica. O aluno demonstra não possuir a habilidade solicitada.
(C) $2n + 1$.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente percebe o valor constante somado a cada termo da sequência, mas não consegue associar que o restante dos pontinhos representa o quadrado de n, possível confusão com a expressão 2n.
(D) $n^2 + 1$.	**Resposta correta.** O aluno possivelmente percebe o valor constante somado a cada termo da sequência, e assimila que a constante dos pontinhos representa o quadrado de n, apresentando o termo geral correto. O Professor pode mostrar outras maneiras de chegar a mesma fórmula utilizando estratégias diferenciadas.

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática - 1ª Série - Ensino Médio – Volume 1 - Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 1: conjuntos numéricos: regularidades numéricas e geométricas.

2. Caderno do Professor: Matemática - 7ª Série/ 8º Ano - Ensino Fundamental - Volume 1 - Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 8: aritmética e geometria: expressões Algébricas de algumas ideias fundamentais.
- Situação de Aprendizagem 5: aritmética com álgebra: as letras como números.

3. Artigos Acadêmicos:

- **BORRALHO. A.; BARBOSA. E.** (2009). Pensamento Algébrico e Exploração de Padrões.

Disponível em: http://www.apm.pt/files/_Cd_BorralhoBarbosa_4a5752d698ac2.pdf

Acesso em: 19/03/2014

- **MIEKO. A.; CENTURIÓN. M;** (2009). Padrões e regularidades nas aulas de Matemática.
Disponível em: http://www.nilsonjosemachado.net/sema20091124.pdf ,
Acesso em: 19/03/2014
- **ALVARENGA D.; VALE. I.;** (2007). A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico,
Disponível em: http://www.ese.ipvc.pt/padroes/artigos/2007_11.pdf,
Acesso em: 19/03/2014

4. Objetos Digitais de Aprendizagem:

- Matemática: sequências e padrões “Math - Sequences and Patterns”
Disponível em:
http://www.topmarks.co.uk/maths-games/11-14-years/number
Acesso em: 20/03/2014
- Jogo com números
Disponível em: http://www.imagem.eti.br/jogo_com_numeros/jogo_sequencia_de_numeros.html
Acesso em: 20/03/2014

5. Novo Telecurso – Ensino Fundamental - Matemática:

- Teleaula 33: progressão aritmética, (duração: 14’26”)
- Teleaula 35: progressão geométrica, (duração: 12’36”)

6. Vídeo:

- Entendendo o teste de QI-Lógica com imagens e desenhos
Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=QltOLLo--jU
Acesso em: 21/03/2014

7. Livro:

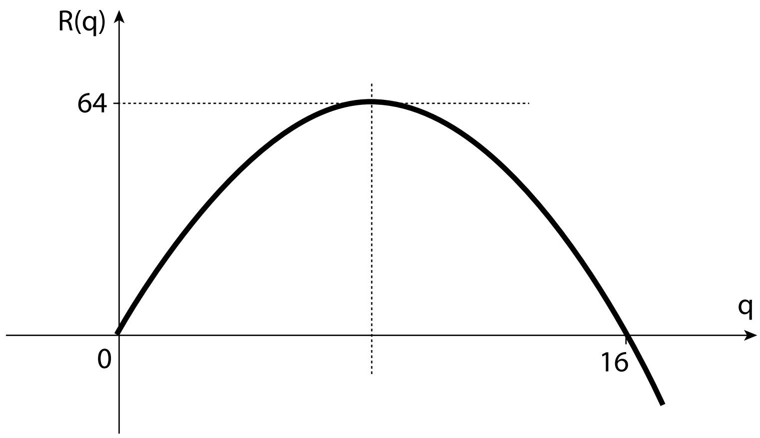
- DANTE, L. R. Matemática, volume único: livro do professor. Ática 1º ed. 2005. São Paulo.

Habilidade:

Saber utilizar em diferentes contextos as funções de 1° e de 2° graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos.

Questão 06 – Aberta

O gráfico a seguir representa o rendimento bruto ***R(q)*** de uma empresa em função da quantidade ***q*** de produtos fabricados mensalmente. Os valores de ***R*** são expressos em milhares de reais, e a quantidade produzida ***q***, em milhares de unidades. Sabe-se que a curva representada é uma parábola.



A partir das informações contidas no gráfico, responda:

(A) Qual é a expressão algébrica da função ***R(q)*** e a quantidade produzida que maximiza o rendimento bruto da empresa?

Comentários e recomendações pedagógicas

Professor para se determinar a expressão algébrica da função ***R(q),*** sabendo-se que a curva é uma parábola, escrevemos: $\boldsymbol{R(q) = aq^2 + bq}$, pois o valor correspondente de ***c*** é zero, uma vez que a curva intercepta o eixo vertical na origem. Como $\boldsymbol{R(16) = 0}$, temos que $\boldsymbol{a.16^2 + b.16 = 0 \Rightarrow 16(a.16 + b) = 0}$, então temos que, $\boldsymbol{16a + b = 0}$.

Em razão da simetria da parábola, concluímos que o valor de ***q*** no vértice é o ponto médio do segmento de 0 a 16, ou seja, é igual a 8. Como vemos que $\boldsymbol{R(8) = 64}$, temos: $\boldsymbol{a \,.\, 8^2 + b \,.\, 8 = 64}$, ou seja, $\boldsymbol{8a + b = 8}$

Resolvendo o sistema formado pelas equações

$\begin{cases} 16a + b = 0 \\ 8a + b = 8 \end{cases}$ => multiplicando a 2ª equação por –1 temos $\begin{cases} 16a + b = 0 \\ -8a - b = -8 \end{cases}$ =>

obtemos: $a = -1$ e $b = 16$, ou seja, $R(q) = -q^2 + 16q$

O valor de $\boldsymbol{q}$ que conduz ao rendimento máximo é $\boldsymbol{q = 8}$, ou seja, é a produção de 8 mil unidades.
No item "algumas referências" são oferecidas possibilidades de pesquisas, para o desenvolvimento da habilidade requerida, que possivelmente favorecerá a compreensão da situação-problema apresentada.

Grade de Correção

Respostas corretas

O aluno reconhece que a curva é uma parábola, escreve a função:
$R(q) = aq^2 + bq$, pois o valor correspondente de **c** é zero, uma vez que a curva intercepta o eixo vertical na origem. Como **$R(16) = 0$**, temos que

$a.16^2 + b.16 = 0 \Rightarrow 16(a.16 + b) = 0$, então temos que,
$16a + b = 0$.

Em razão da simetria da parábola, concluímos que ele reconhece o valor de **q** no vértice é o ponto médio do segmento de 0 a 16, ou seja, é igual a 8. Como vemos que **$R(8) = 64$**, temos: **$a \cdot 8^2 + b \cdot 8 = 64$**, ou seja, **$8a + b = 8$**.
Resolvendo o sistema formado pelas equações

$$\begin{cases} 16a + b = 0 \\ 8a + b = 8 \end{cases} \Rightarrow \text{multiplicando a 2ª equação por } -1 \text{ temos}$$

$$\begin{cases} 16a + b = 0 \\ -8a - b = -8 \end{cases} \Rightarrow \text{obtemos: } a = -1 \text{ e } b = 16, \text{ ou seja, } \mathbf{R(q) = -q^2 + 16q}$$

O valor de **q** que conduz ao rendimento máximo é **$q = 8$**, ou seja, é a produção de 8 mil unidades, que também poderá ser obtida calculando as coordenadas do vértice de uma parábola:

$$X_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-16}{2(-1)} = 8$$

Respostas parcialmente corretas

O aluno possivelmente reconhece que a curva é uma parábola, escreve a função:
$R(q) = aq^2 + bq$, pois o valor correspondente de **c** é zero, uma vez que a curva intercepta o eixo vertical na origem. Como **$R(16) = 0$**, temos que
$a \cdot 16^2 + b \cdot 16 = 0 \Rightarrow 16\,(a.16 + b) = 0$, então temos que,
$16a + b = 0$. Resolve o sistema encontra os valores de $a = -1$ e $b = 16$ escreve a função solicitada **$R(q) = q^2 + 16q$**, mas não observou que a questão envolve o cálculo do valor de máximo da parábola, portanto a parábola está com a concavidade para baixo logo o coeficiente **a** teria que ser negativo.

Respostas incorretas
O aluno possivelmente escreve a função $R(q) = aq^2 + 16q + 64$ e não contempla a 1ª pergunta e a 2ª que é a quantidade produzida que maximiza o rendimento bruto da empresa. Logo se observa que ele não contempla a habilidade solicitada.

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série – Volume 1 – Edição 2014:
- Situação de Aprendizagem 5: funções como relações de interdependência.
- Situação de Aprendizagem 6: funções polinomiais de 1º grau: significado, gráficos, crescimento, decrescimento e taxas.
- Situação de Aprendizagem 7: funções do 2º grau: significado, gráficos, intersecção com os eixos, vértices, sinais.
- Situação de Aprendizagem 8: Problemas envolvendo funções de 2º grau em múltiplos contextos; problemas de máximos e mínimos.

2. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 8ª série/ 9º ano – Volume 1 – Edição 2014:
- Situação de Aprendizagem 3 – Grandezas proporcionais: estudo funcional, significados e contextos.
- Situação de Aprendizagem 8: representação gráfica de grandezas proporcionais e de algumas não proporcionais.

3. + Matemática – Coletânea de Atividades – Volume 3
- Atividade 18: interdependência de grandezas, (p.66);
- Atividade 19: grandezas proporcionais, (p.69).

4. Experiências Matemáticas – 7ª série:
- Atividade 8 interdependência de grandezas.
. Parte 1: as contas de luz do Paulinho, (p.97);
. Parte 2: descobrindo a relação, (p.100);
. Parte 3: analisando a variação, (p.101).
- Atividade 9: grandezas proporcionais.
. Parte 1: analisando a variação, (p.113);
. Parte 2: analisando gráficos, (p.115);
. Parte 3: exercitando, (p.116);
. Parte 4: mais problemas, (p.116);
. Parte 5: experimentando para responder, (p.120).

5. Novo Telecurso – Ensino Fundamental - Matemática:
-Teleaula 49: proporção inversa, (duração: 13’16”).

6. Novo Telecurso – Ensino Médio - Matemática:

-Teleaula 27: a noção de função, (duração: 14’15”)

-Teleaula 30: a função y = ax + b, (duração: 12’00”)

-Teleaula 31: a função do 2º grau, (duração:11’46”)

-Teleaula 32: máximos e mínimos, (duração: 11’46”)

7. Revista Nova Escola:

- Rosilene Anevan Fagundes: A professora de Pinhais, PR, orientou a turma de 8º ano na investigação da interdependência entre grandezas representadas por um tipo específico de função: acesso em: 22/02/2014.

8. Brasil Escola:

- Funções

Disponível em:

http://www.brasilescola.com/matematica/funcoes.htm

Acesso em 08/03/2014.

- Proporcionalidade entre grandezas

Disponível em:

http://www.brasilescola.com/matematica/proporcionalidade-entre-grandezas.htm

Acesso em: 09/03/2014

9. Currículo+:

- As verdadeiras proporções do Homem Vitruviano

Disponível em:

http://curriculomais.educacao.sp.gov.br/as-verdadeiras-proporcoes-do-homem-vitruviano/

Acesso em: 09/03/2014.

10. IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada:

- Prof. Eduardo Wagner – Funções Quadráticas

Disponível em: http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2010

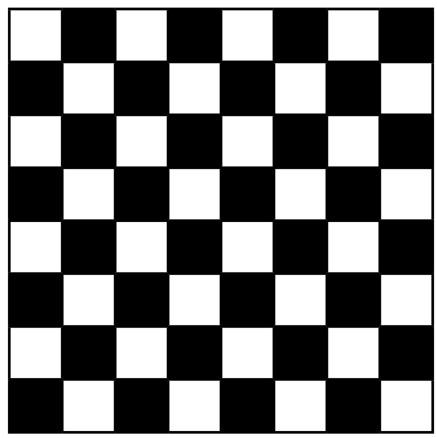
Acesso em: 23/03/2014

Habilidade:

Conhecer as características principais das progressões geométricas – expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras, sabendo aplicá-las em diferentes contextos.

Questão 07 – Objetiva

O xadrez é jogado num tabuleiro quadriculado que possui 64 “casas” conforme mostra a figura abaixo:



Malba Tahan narra a história de um rei que queria presentear seu vizir pelos excelentes serviços prestados. O vizir pediu-lhe que o rei o pagasse com grãos de trigo da seguinte forma: Ele queria receber um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro de xadrez, dois grãos pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta e assim por diante. Sendo assim, até a décima casa o vizir receberia um total de:

(A) 231 grãos.

(B) 512 grãos.

(C) 640 grãos.

(D) 1023 grãos.

Comentários e recomendações pedagógicas

Nesta etapa, espera-se que o aluno seja capaz de reconhecer as regularidades numéricas de uma determinada sequência e suas propriedades, em especial com relação à soma dos termos de uma progressão geométrica, sendo capaz de prever resultados para uma dada situação, utilizando a formalização matemática ou outra estratégia qualquer. É importante verificar, através das possibilidades indicadas nas alternativas, o nível de compreensão em que o aluno se encontra realizando intervenções a fim de que ele adquira as habilidades/competências necessárias ao entendimento deste conteúdo.

No item "algumas referências" são oferecidas possibilidades de pesquisas, para o desenvolvimento da habilidade requerida, que possivelmente favorecerá a compreensão da situação-problema apresentada.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) 231.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente registra o oito a cada casa a partir da quarta, de acordo com a consigna do problema, somando todos os grãos de cada casa, dessa forma respondendo incorretamente.
(B) 512.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente registra o número de grãos que o vizir receberia pela décima casa.
(C) 640.	**Resposta incorreta.** O aluno responde incorretamente, pois possivelmente multiplica o número de casas do tabuleiro pelo número dez, da décima casa como citado no problema.
(D) 1023.	**Resposta correta.** O aluno responde corretamente utilizando a equação da soma dos termos de uma P.G. de razão 2 e/ou utiliza outra estratégia, como a de registrar o número de grãos em cada casa do tabuleiro, até chegar na décima casa e depois soma tudo ou calcula a quantidade de grãos da 11ª casa (1024) subtraindo o grão correspondente a esta, encontrando 1023 grãos.

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática - Ensino Médio – 1ª série – Volume 1 – Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 1: conjuntos numéricos: regularidades numéricas e geométricas.

- Situação de Aprendizagem 2: progressões aritméticas e progressões geométricas.

2. Caderno do Professor: Matemática - 7ªSérie/8ºAno - Ensino Fundamental - Volume 1 - Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 5: aritmética com álgebra: as letras como números.

- Situação de Aprendizagem 8: aritmética e geometria: expressões Algébricas de algumas ideias fundamentais.

3. Artigos Acadêmicos:

- **BORRALHO. A.; BARBOSA. E.** (2009). Pensamento Algébrico e Exploração de Padrões.

Disponível em: http://www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf ,
Acesso em: 19/03/2014

- **MIEKO. A.; CENTURIÓN. M;** (2009). Padrões e regularidades nas aulas de Matemática.
Disponível em: http://www.nilsonjosemachado.net/sema20091124.pdf ,
Acesso em: 19/03/2014

- **ALVARENGA D.; VALE. I.;** (2007). A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico,
Disponível em: http://www.ese.ipvc.pt/padroes/artigos/2007_11.pdf,
Acesso em: 19/03/2014

4. Objetos Digitais de Aprendizagem:

- Matemática: sequências e padrões "Math - Sequences and Patterns"
Disponível em:
http://www.topmarks.co.uk/maths-games/11-14-years/number
Acesso em: 20/03/2014

- Jogo com números
Disponível em: http://www.imagem.eti.br/jogo_com_numeros/jogo_sequencia_de_numeros.html
Acesso em: 20/03/2014

5. Novo Telecurso – Ensino Fundamental - Matemática:

- Teleaula 33: progressão aritmética, (duração: 14'26")
- Teleaula 35: progressão geométrica, (duração: 12'36")
- Teleaula 36: somando os termos das progressões geométricas, (duração: 14'33")

6. Vídeo:

- Entendendo o teste de QI-Lógica com imagens e desenhos
Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=QltOLLo--jU
Acesso em: 21/03/2014

7. Livro:

- DANTE, L. R. Matemática, volume único: livro do professor. Ática 1ª ed. 2005. São Paulo.

8. Revista Nova Escola

- Multiplicação e progressão geométrica com base no filme "A Corrente do Bem"
Objetivos: Aproximar-se do conceito de progressão e desenvolver a capacidade de analisar numericamente uma situação.
http://revistaescola.abril.com.br/fundamental-2/multiplicacao-progressao-geometrica-corrente-bem-639067.shtml

Habilidade:

Saber reconhecer relações de proporcionalidade direta, inversa, direta com o quadrado, entre outras, representando-as por meio de funções.

Questão 08 – Objetiva

As tabelas a seguir relacionam pares de grandezas. Indique a alternativa nas quais as grandezas são proporcionais

(A)

Produção de automóveis e produção de tratores (anual, em milhares).

Países	Automóveis	Tratores
A	100	8
B	150	12
C	200	16
D	225	18
E	250	20
F	300	24
G	350	28
H	400	32
I	450	36

(B)

Área destinada à agricultura e área destinada à pecuária (em 1000 km^2).

Países	Agricultura	Pecuária
A	80	60
B	100	70
C	110	80
D	120	98
E	150	100
F	160	124
G	180	128
H	200	132
I	250	136

Produto Interno bruto (PIB, em milhões de dólares) e Índice de Desenvolvimento Humano (IDH).

(C)

Países	PIB	IDH
A	300	0,90
B	400	0,92
C	510	0,80
D	620	0,88
E	750	0,78
F	760	0,89
G	880	0,91
H	1000	0,80
I	1100	0,86

Expectativa de vida (em anos) e índice de analfabetismo (percentual da população).

(D)

Países	Expectativa de vida	Índice de analfabetismo
A	67	11
B	68	10
C	69	9
D	70	8
E	71	7
F	72	6
G	73	5
H	74	4
I	75	3

Comentários e recomendações pedagógicas

Professor o objetivo das tabelas é apenas apresentar exemplos de duas grandezas que podem crescer ou decrescer conjuntamente, ou então podem variar em sentidos opostos (quando uma cresce, a outra decresce) sem que haja proporcionalidade direta ou inversa. Apenas no exemplo do item a, a grandeza da primeira coluna é diretamente proporcional à grandeza da segunda coluna, sendo a constante de proporcionalidade igual a 12,5; nos outros casos, nem a razão entre as grandezas é constante, nem o produto delas o é, ou seja, em cada um dos pares, não há proporcionalidade direta, nem inversa. Logo justificando a alternativa (A), a produção de automóveis cresce simultaneamente com a produção de tratores; ou seja, ela é diretamente proporcional à produção de tratores.

A apresentação desta proposta em forma de tabela é um facilitador para apropriação do conceito oportunizando no aluno o desenvolvimento da habilidade solicitada.

No item "algumas referências" são oferecidas possibilidades de pesquisas, para o desenvolvimento da habilidade requerida, que possivelmente favorecerá a compreensão da situação-problema apresentada.

Grade de Correção

<table>
<tr><th>Alternativa</th><th>Observação</th></tr>
<tr><td>

(A) Produção de automóveis e produção de tratores (anual, em milhares).

Países	Automóveis	Tratores
A	100	8
B	150	12
C	200	16
D	225	18
E	250	20
F	300	24
G	350	28
H	400	32
I	450	36

</td><td>

Resposta correta. O aluno domina e contempla a habilidade e competência, acertando o problema confirmando sua observação que a produção de automóveis cresce simultaneamente com a produção de tratores, ou seja, ela é diretamente proporcional à produção de tratores.

</td></tr>
<tr><td>

(B) Área destinada à agricultura e área destinada à pecuária (em 1000 km²).

Países	Agricultura	Pecuária
A	80	60
B	100	70
C	110	80
D	120	98
E	150	100
F	160	124
G	180	128
H	200	132
I	250	136

</td><td>

Resposta incorreta. O aluno possivelmente observa que a área destinada à agricultura cresce simultaneamente em relação à área destinada à pecuária, mas não identifica a proporcionalidade entre essas grandezas, que não são proporcionais.

</td></tr>
<tr><td>

(C) Produto Interno bruto (PIB, em milhões de dólares) e Índice de Desenvolvimento Humano (IDH).

Países	PIB	IDH
A	300	0,90
B	400	0,92
C	510	0,80
D	620	0,88
E	750	0,78
F	760	0,89
G	880	0,91
H	1000	0,80
I	1100	0,86

</td><td>

Resposta incorreta. O aluno possivelmente não identifica que as grandezas envolvidas não são proporcionais. Pois não há uma relação de proporcionalidade entre o PIB e o IDH.

</td></tr>
<tr><td>

(D) Expectativa de vida (em anos) e índice de analfabetismo (percentual da população).

Países	Expectativa de vida	Índice de analfabetismo
A	67	11
B	68	10
C	69	9
D	70	8
E	71	7
F	72	6
G	73	5
H	74	4
I	75	3

</td><td>

Resposta incorreta. O aluno possivelmente identifica a existência de crescimento e decrescimento entre as grandezas e verifica que quando o índice de analfabetismo diminui, a expectativa de vida aumenta, e vice-versa, porém não chega a conclusão de que as grandezas não são proporcionais.

</td></tr>
</table>

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série – Volume 1 – Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 5: funções como relações de interdependência.

2. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 8ª série/ 9º ano – Volume 1 – Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 8: representação gráfica de grandezas proporcionais e de algumas não proporcionais.

3. + Matemática – Coletânea de Atividades – Volume 3

- Atividade 18: interdependência de grandezas, (p.66);
- Atividade 19: grandezas proporcionais, (p.69).

4. Experiências Matemáticas – 7ª série:

- Atividade 8 interdependência de grandezas.

. Parte 1: as contas de luz do Paulinho, (p.97);

. Parte 2: descobrindo a relação, (p.100);

. Parte 3: analisando a variação, (p.101).

- Atividade 9: grandezas proporcionais.

. Parte 1: analisando a variação, (p.113);

. Parte 2: analisando gráficos, (p.115);

. Parte 3: exercitando, (p.116);

. Parte 4: mais problemas, (p.116);

. Parte 5: experimentando para responder, (p.120).

5. Novo Telecurso – Ensino Fundamental - Matemática:

-Teleaula 49: proporção inversa, (duração: 13’16”).

6. Novo Telecurso – Ensino Médio - Matemática:

-Teleaula 27: a noção de função, (duração: 14’15”)

-Teleaula 30: a função y = ax + b, (duração: 12’00”)

7. Revista Nova Escola:

- Rosilene Anevan Fagundes: A professora de Pinhais, PR, orientou a turma de 8º ano na investigação da interdependência entre grandezas representadas por um tipo específico de função: acesso em: 22/02/2014.

8. Brasil Escola:

- Funções

Disponível em:

http://www.brasilescola.com/matematica/funcoes.htm

Acesso em 08/03/2014.

- Proporcionalidade entre grandezas

Disponível em:
http://www.brasilescola.com/matematica/proporcionalidade-entre-grandezas.htm
Acesso em: 09/03/2014

9. Currículo+:

- As verdadeiras proporções do Homem Vitruviano

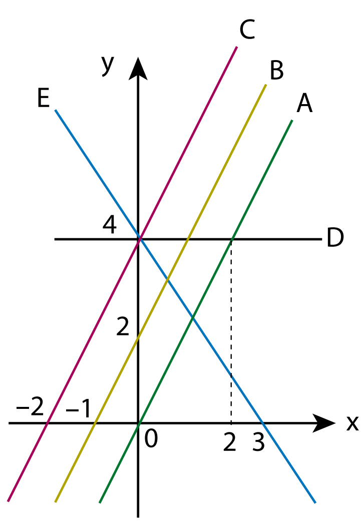
Disponível em:
http://curriculomais.educacao.sp.gov.br/as-verdadeiras-proporcoes-do-homem-vitruviano/
Acesso em: 09/03/2014.

Habilidade:

Compreender a construção do gráfico de funções de 1° grau, sabendo caracterizar o crescimento, o decrescimento e a taxa de variação.

Questão 09 – Objetiva

As retas A, B, C, D e E são os gráficos de funções do tipo *f* (x) = ax + b, cada um dos cinco casos apresentados indicam e representam a variação de grandezas diretamente proporcionais. Qual das funções representa a reta E.



(A) $f(x) = 2x$.

(B) $f(x) = 2x + 2$.

(C) $f(x) = 4$.

(D) $\boldsymbol{f(x) = -\frac{4}{3}x + 4}$**.**

Comentários e recomendações pedagógicas

Professor sempre que expressamos por meio de variáveis uma situação de interdependência envolvendo duas grandezas diretamente proporcionais, chegamos a uma função de 1º grau. De modo geral, uma função de 1º grau é expressa por uma fórmula do tipo $f(x) = ax + b$, onde a e b são constantes, sendo $a \neq 0$. Convém ressaltar que uma função de 1º grau em que b = 0 representa uma proporcionalidade direta entre $f(x)$ e x, pois $f(x) = ax$. Quando $b \neq 0$, a diferença $f(x) - b$ é diretamente proporcional a x, pois $f(x) - b = ax$. As retas A, B, C, D e E são os gráficos de funções do tipo $f(x) = ax + b$. Logo a reta E corta o eixo y no ponto de ordenada 4; logo, b = 4. Temos, então, $f(x) = ax + 4$. Como a reta passa pelo ponto (3, 0), temos $f(3) = 0$, ou seja, $0 = a \cdot 3 + 4$. Daí obtemos $a = -\frac{4}{3}\cdot$ Logo como o coeficiente **a** é negativo temos a função decrescente

$$f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$$

No item "algumas referências" são oferecidas possibilidades de pesquisas, para o desenvolvimento da habilidade requerida, que possivelmente favorecerá a compreensão da situação-problema apresentada.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) $f(x) = 2x$.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente identifica corretamente que a reta A passa pela origem, o coeficiente b é igual a zero. Todos os seus pontos (x,y) são tais que $\frac{y}{x}$ é igual a 2 (há proporcionalidade direta entre y e x). Segue, portanto, que $f(x) = 2x$, (a = 2 e b = 0), mas não entendeu que na proposta do problema a informação solicitada se refere à função da reta E.
(B) $f(x) = 2x + 2$.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente identifica corretamente observando que as retas A e B são paralelas, ou seja, o coeficiente **a** é comum a ambas. Como B corta o eixo **y** no ponto de ordenada 2, temos **b** = 2, ou seja, $f(x) = 2x + 2$, no caso da reta B, mas não entendeu que proposta do problema solicitava a função da reta E.
(C) $f(x) = 4$.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente observa que a reta E corta o eixo y no ponto de ordenada 4, mas não identifica o coeficiente **a** que é negativo.

(D) $\boldsymbol{f}\mathbf{(x) = -\frac{4}{3}x + 4}$.	**Resposta correta.** O aluno domina e contempla a habilidade e competência acertando o problema confirmando sua observação que a reta E corta o eixo y no ponto de ordenada 4; logo, b = 4. Temos, então, $f(x) = ax + 4$. Como a reta passa pelo ponto (3, 0), temos $f(3) = 0$, ou seja, $0 = a \cdot 3 + 4$. Daí obtemos a = $-\frac{4}{3}$. Logo como o coeficiente **a** é negativo temos a função decrescente $f(x) = -\frac{4}{3}x + 4$.

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série – Volume 1 – Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 5: funções como relações de interdependência.
- Situação de Aprendizagem 6: funções polinomiais de 1º grau: significado, gráficos, crescimento, decrescimento e taxas.

2. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 8ª série/ 9º ano – Volume 1 – Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 8: representação gráfica de grandezas proporcionais e de algumas não proporcionais.

3. + Matemática – Coletânea de Atividades – Volume 3

- Atividade 18: interdependência de grandezas, (p. 66);
- Atividade 19: grandezas proporcionais, (p. 69).

4. Experiências Matemáticas – 7ª série:

- Atividade 8 interdependência de grandezas.

. Parte 1: as contas de luz do Paulinho, (p. 97);
. Parte 2: descobrindo a relação, (p. 100);
. Parte 3: analisando a variação, (p. 101).

- Atividade 9: grandezas proporcionais.

. Parte 1: analisando a variação, (p. 113);
. Parte 2: analisando gráficos, (p. 115);
. Parte 3: exercitando, (p. 116);
. Parte 4: mais problemas, (p. 116);
. Parte 5: experimentando para responder, (p.120).

5. Novo Telecurso – Ensino Fundamental - Matemática:

-Teleaula 49: proporção inversa, (duração: 13’16”).

6. Novo Telecurso – Ensino Médio – Matemática:

-Teleaula 27: a noção de função, (duração: 14'15")

-Teleaula 30: a função y = ax + b, (duração: 12'00")

7. Revista Nova Escola:

- Rosilene Anevan Fagundes: A professora de Pinhais, PR, orientou a turma de 8º ano na investigação da interdependência entre grandezas representadas por um tipo específico de função: acesso em: 22/02/2014.

8. Brasil Escola:

- Funções

Disponível em:

http://www.brasilescola.com/matematica/funcoes.htm

Acesso em 08/03/2014.

- Proporcionalidade entre grandezas

Disponível em:

http://www.brasilescola.com/matematica/proporcionalidade-entre-grandezas.htm

Acesso em: 09/03/2014

9. Currículo+:

- As verdadeiras proporções do Homem Vitruviano

Disponível em:

http://curriculomais.educacao.sp.gov.br/as-verdadeiras-proporcoes-do-homem-vitruviano/

Acesso em: 09/03/2014.

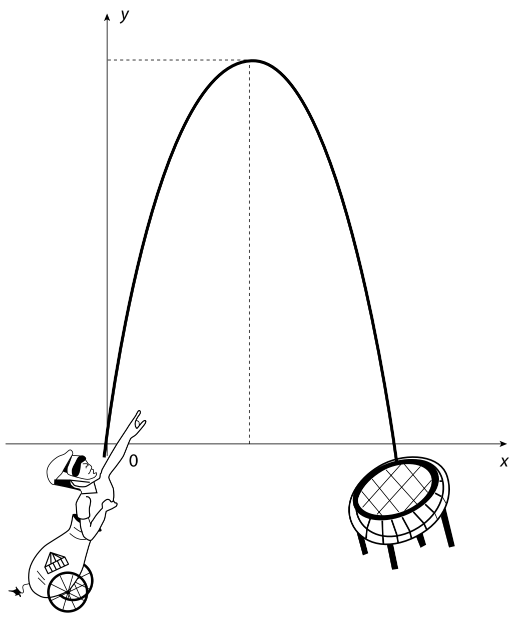
Habilidade:

Compreender a construção do gráfico de funções de 2° grau como expressões de proporcionalidade entre uma grandeza e o quadrado de outra, sabendo caracterizar os intervalos de crescimento e decrescimento, os sinais da função e os valores extremos (pontos de máximo ou de mínimo).

Questão 10 – Objetiva

O circo da Matemática colocou em seu espetáculo uma nova atração, o homem bala que é arremessado de um canhão. Preocupada com a estreia a equipe contratou um matemático que descreveu a trajetória do homem, segundo a parábola de função $f(x) = 12x - 2x^2$.

A altura máxima atingida pelo homem bala será de



(A) 3 m.

(B) 6 m.

(C) 12 m.

(D) 18 m.

Fonte da Figura

Essa figura foi produzida pela equipe de Matemática do Núcleo Pedagógico da Diretoria de Ensino Região de Franca, representada pelos PCNP Eduardo Granado Garcia e Emerson de Souza Silva, com a colaboração do PCNP de Física Leonardo Granado Garcia, sendo que as caricaturas não foram retiradas de nenhum site, portanto criação própria do grupo

Comentários e recomendações pedagógicas

O estudo de funções é iniciado no 9º ano, mais especificamente no 2º bimestre, quando é feita uma construção mais significativa da sua forma gráfica. De início, é dada bastante ênfase à relação de proporcionalidade entre as variáveis y = *f* (x) e x da forma "*f* (x) – h = kx (h e k constantes), ao se tratar de funções do 1º grau e à relação de proporcionalidade entre as variáveis y = *f* (x) e o quadrado de x da forma "$y = kx^2$", quando se trata de função do 2º grau.

É importante o aluno ter compreensão da variação da função do 2º grau e interpretar seu gráfico, reconhecendo pontos de máximo ou mínimo, raízes, coeficientes, etc. A correta interpretação desses fatores permitirá que ele reconheça que há situações em que a relação entre as variáveis não é sempre direta, além de que os problemas que envolvem funções do 2º grau, como áreas, produção, equações de movimentos, etc., podem ser mais bem compreendidos e analisados a partir desses fatores.

Na questão apresentada o aluno deve saber que o problema trata de uma função polinomial do 2º grau e observar que, se a concavidade está voltada para baixo, então a função tem um ponto de máximo, daí o fato da questão solicitar a altura máxima.

Um possível caminho para o aluno resolver o problema é utilizar o método de completar quadrados em uma função quadrática, assim o aluno deve aplicar o método na função, conforme se observa na sequência.

$f(x) = 12x - 2x^2$

$f(x) = -2(x - 6x)$

$f(x) = -2(x - 3)^2 + 2(9)$

É importante observar que no desenvolvimento $f(x) = -2(x - 3)^2 + 2(9)$ obtemos $f(x) = -2x^2 + 12x - 18 + 18 = -2x^2 + 12x$, que representa a função dada inicialmente.

Portanto, chegamos à função $f(x) = -2(x - 3)^2 + 18$ que é equivalente à função dada inicialmente $f(x) = 12x - 2x^2$, com o recurso de completar quadrados pode-se visualizar as coordenadas do ponto do vértice, que de acordo com o Caderno do Professor Volume 2 – 1ª Série do Ensino Médio – p. 37 (Secretaria de Educação do Estado de São Paulo) a função pode ser escrita por $f(x) = k(x - h)^2 + v$, onde **h** representa a abscissa e **v** a ordenada, coordenadas do vértice da parábola. Ao comparar **v** e **h** na função $f(x) = -2(x - 3)^2 + 18$, tem **v** = 3 e **h** = 18, sendo que **h** representa a altura máxima procurada.

Outro modo de resolução é a determinação do vértice da parábola por meio da substituição dos valores dos coeficientes **a**, **b** e **c** do cálculo do Δ (com $f(x)=0$) na função $f(x) = ax^2 + bx + c$. A abscissa do vértice, que denominaremos de $\mathbf{x_v}$, é dada por $\frac{-b}{2a}$ e a ordenada do vértice $\mathbf{y_v}$ por $\frac{-\Delta}{4a}$. Dessa forma o aluno ao observar a função $f(x) = 12x - 2x^2$, encontra os coeficientes **a** e **b** substituindo na expressão $\frac{-b}{2a}$, obtendo $\frac{-(12)}{2(-2)} = 3$, que quando substituído na $f(x) = 12x - 2x^2$ determina o $\mathbf{y_v}$, que nesse caso é igual a 18m, portanto, a altura máxima procurada.

Outro possível entendimento para determinar a solução é o aluno observar que a parábola da função apresenta um eixo de simetria, com as raízes da função ocupando a mesma distância em relação à abscissa $\mathbf{x_v}$ do vértice. Como as raízes são 0 e 6, temos que à abscissa do vértice ocupa a posição x = 3. Substituindo na função $f(x) = 12x - 2x^2$, temos $f(3) = 12(3) - 2(3)^2 = 36 - 18 = 18$, ou seja, o valor da altura máxima procurada.

No item "algumas referências" são oferecidas possibilidades de pesquisas, para o desenvolvimento da habilidade requerida, que possivelmente favorecerá a compreensão da situação-problema apresentada.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) 3 m.	**Resposta incorreta.** Possivelmente o aluno compreende parcialmente a habilidade avaliada, pois reconhece a expressão matemática da abscissa do vértice, $\mathbf{x_v}$, que é dada por $\frac{-b}{2a}$, porém não observa que a altura máxima procurada é obtida, substituindo x por $\mathbf{x_v}$ na função.
(B) 6 m.	**Resposta incorreta.** Possivelmente o aluno não compreende a habilidade avaliada. Para justificar sua resposta, o aluno recorre aos valores numéricos representados na função, realizando uma divisão do número 12 pelo número 2, obtendo o valor 6 como resultado.
(C) 12 m.	**Resposta incorreta.** Provavelmente o aluno não compreende a habilidade avaliada. O aluno possivelmente relacionou o número 12 representado na função como resultado para sua resposta.
(D) 18 m.	**Resposta correta.** O aluno compreende a habilidade avaliada, e aplica corretamente uma das possibilidades de resolução apresentadas no comentário pedagógico, descrito anteriormente.

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série – Volume 1 – Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 5: funções como relações de interdependência.
- Situação de Aprendizagem 6: funções polinomiais de 1º grau: significado, gráficos, crescimento, decrescimento e taxas.

2. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 8ª série/ 9º ano – Volume 1 – Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 3 – Grandezas proporcionais: estudo funcional, significados e contextos.
- Situação de Aprendizagem 8: representação gráfica de grandezas proporcionais e de algumas não proporcionais.

3. + Matemática – Coletânea de Atividades – Volume 3

- Atividade 18: interdependência de grandezas, (p.66);
- Atividade 19: grandezas proporcionais, (p.69).

4. Experiências Matemáticas – 7ª série:

- Atividade 8 interdependência de grandezas.

. Parte 1: as contas de luz do Paulinho, (p.97);
. Parte 2: descobrindo a relação, (p.100);
. Parte 3: analisando a variação, (p.101).
- Atividade 9: grandezas proporcionais.
. Parte 1: analisando a variação, (p.113);
. Parte 2: analisando gráficos, (p.115);
. Parte 3: exercitando, (p.116);
. Parte 4: mais problemas, (p.116);
. Parte 5: experimentando para responder, (p.120).

5. Novo Telecurso – Ensino Fundamental - Matemática:

-Teleaula 49: proporção inversa, (duração: 13’16”).

6. Novo Telecurso – Ensino Médio - Matemática:

-Teleaula 27: a noção de função, (duração: 14’15”)
-Teleaula 30: a função y = ax + b, (duração: 12’00”)

7. Revista Nova Escola:

- Rosilene Anevan Fagundes: A professora de Pinhais, PR, orientou a turma de 8º ano na investigação da interdependência entre grandezas representadas por um tipo específico de função: acesso em: 22/02/2014.

8. Brasil Escola:

- Funções
Disponível em:
http://www.brasilescola.com/matematica/funcoes.htm
Acesso em 08/03/2014.
- Proporcionalidade entre grandezas
Disponível em:
http://www.brasilescola.com/matematica/proporcionalidade-entre-grandezas.htm
Acesso em: 09/03/2014

9. Currículo+:

- As verdadeiras proporções do Homem Vitruviano
Disponível em:
http://curriculomais.educacao.sp.gov.br/as-verdadeiras-proporcoes-do-homem-vitruviano/
Acesso em: 09/03/2014.

10. IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada:

- Prof. Eduardo Wagner – Funções Quadráticas
Disponível em: http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2010
Acesso em: 23/03/2014

Habilidade:

Saber utilizar em diferentes contextos as funções de 1° e de 2° graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos.

Questão 11 – Objetiva

Um criador de gado tem um bezerro de determinada raça para vender. Esse bezerro pesa atualmente 200 quilos e engorda 2 quilos por dia. Inicialmente, o criador acha que, quanto mais tempo esperar para vender o bezerro, melhor será, pois o bezerro ganhará mais peso. Entretanto, um de seus funcionários lembra o criador de que o preço de venda, que hoje é 50 reais por quilo, está caindo 40 centavos por dia. Com base nas informações fornecidas, mantida a situação atual, a função que expressa a melhor data pra vender este bezerro a partir de hoje obtendo o lucro máximo será:

(A) $f(x) = 0{,}80x^2 + 20x + 10\,000$.

(B) $f(x) = -\,0{,}80x^2 + 20x + 10\,000$.

(C) $y = (200 + 2x) \cdot (50 + 0{,}40x)$.

(D) $y = (200 - 2x) \cdot (50 - 0{,}40x)$.

Comentários e recomendações pedagógicas

Professor para que possamos contemplar a proposta solicitada na habilidade temos que levar em consideração que a escolha da melhor data para vender o bezerro depende, então, de duas variáveis: a engorda diária e a queda nos preços pagos por quilo. Com base nas informações fornecidas, mantida a situação atual teremos uma função do 2º grau: $f(x) = -\,0{,}80x^2 + 20x + 10000$, em se tratando de uma arrecadação máxima a parábola será com concavidade para baixo.

Sugestão: Nossa incógnita é o valor **x** de dias, contados a partir de hoje, após os quais o bezerro deve ser vendido, de modo a gerar o maior retorno **y** possível, em reais.

Para encontrar o valor de **y**, devemos multiplicar o peso p (massa) em quilos do bezerro pelo valor **v** pago por quilo: $y = p \cdot v$.

O enunciado informa que o peso **p** aumenta 2 quilos por dia, a partir do valor inicial 200 quilos, ou seja, $p = 200 + 2x$, em que **x** é o número de dias decorridos até a venda.

O valor **v** de cada quilo, no entanto, decresce à razão de 40 centavos por dia, a partir do valor inicial de 50 reais; temos, então, que $v = 50 - 0{,}40x$.

Logo, o valor arrecadado será igual a y = p . v , ou seja,

$y = (200 + 2x) . (50 – 0{,}40x) = –0{,}80x^2 + 20x + 10000$

O valor a ser arrecadado é, portanto, uma função do 2º grau:

$f(x) = – 0{,}80x^2 + 20x + 10000$

Determinar a melhor data para vender o bezerro corresponde a buscar o valor de x para o qual $f(x)$ assume seu valor máximo.

De fato, a função tem o coeficiente a negativo (a = –0,80) e, portanto, apresenta um valor máximo. Tal valor máximo ocorre exatamente no vértice do gráfico de $f(x)$. Calculando o valor de $\mathbf{x_v}$, obtemos:

$$X_v = \frac{-b}{2a} = -\frac{20}{-1{,}60} = 12{,}5$$

Concluímos, então, que, mantidas as condições atuais, a melhor data para vender o bezerro é daqui a 12,5 dias, ou seja, entre o 12º e o 13º dia.

No item “algumas referências” são oferecidas possibilidades de pesquisas, para o desenvolvimento da habilidade requerida, que possivelmente favorecerá a compreensão da situação-problema apresentada.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) $f(x) = 0{,}80x^2 + 20x + 10000$.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente domina e contempla a habilidade e competência demonstrando compreensão do enunciado, mas erra ao montar a função, pois em se tratando de valor de máximo o valor do coeficiente **a** terá que ter o sinal negativo.
(B) $\boldsymbol{f(x) = -0{,}80x^2 + 20x + 10000}$.	**Resposta correta.** O aluno domina e contempla a habilidade e competência demonstrando domínio dos processos do enunciado montando a função correta, pois em se tratando de valor de máximo o valor do coeficiente **a** terá que ter o sinal negativo, e o gráfico desta função terá concavidade para baixo.

(C) y = (200 + 2x) . (50 + 0,40x).	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente utiliza de conceitos que demonstra o conhecimento de como construir uma função, mas erra quando da colocação dos sinais não observando ser uma função de máximo.
(D) y = (200 – 2x) . (50 – 0,40x).	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente utiliza de conceitos que demonstra o conhecimento de como construir uma função, mas erra quando da colocação dos sinais não observando ser uma função de máximo.

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série – Volume 1 – Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 5: funções como relações de interdependência.
- Situação de Aprendizagem 6: funções polinomiais de 1º grau: significado, gráficos, crescimento, decrescimento e taxas.
- Situação de Aprendizagem 8: Problemas envolvendo funções de 2º grau em múltiplos contextos; problemas de máximos e mínimos.

2. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 8ª série/ 9º ano – Volume 1 – Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 3 – Grandezas proporcionais: estudo funcional, significados e contextos.
- Situação de Aprendizagem 8: representação gráfica de grandezas proporcionais e de algumas não proporcionais.

3. + Matemática – Coletânea de Atividades – Volume 3

- Atividade 18: interdependência de grandezas, (p.66);
- Atividade 19: grandezas proporcionais, (p.69).

4. Experiências Matemáticas – 7ª série:

- Atividade 8 interdependência de grandezas.

. Parte 1: as contas de luz do Paulinho, (p.97);
. Parte 2: descobrindo a relação, (p.100);
. Parte 3: analisando a variação, (p.101).

- Atividade 9: grandezas proporcionais.

. Parte 1: analisando a variação, (p.113);
. Parte 2: analisando gráficos, (p.115);

. Parte 3: exercitando, (p.116);
. Parte 4: mais problemas, (p.116);
. Parte 5: experimentando para responder, (p.120).

5. Novo Telecurso – Ensino Fundamental - Matemática:

-Teleaula 49: proporção inversa, (duração: 13'16").

6. Novo Telecurso – Ensino Médio - Matemática:

-Teleaula 27: a noção de função, (duração: 14'15")
-Teleaula 30: a função y = ax + b, (duração: 12'00")
-Teleaula 31: a função do 2º grau, (duração:11'46")
-Teleaula 32: máximos e mínimos, (duração: 11'46")

7. Revista Nova Escola:

- Rosilene Anevan Fagundes: A professora de Pinhais, PR, orientou a turma de 8º ano na investigação da interdependência entre grandezas representadas por um tipo específico de função: acesso em: 22/02/2014.

8. Brasil Escola:

- Funções
Disponível em:
http://www.brasilescola.com/matematica/funcoes.htm
Acesso em 08/03/2014.
- Proporcionalidade entre grandezas
Disponível em:
http://www.brasilescola.com/matematica/proporcionalidade-entre-grandezas.htm
Acesso em: 09/03/2014

9. Currículo+:

- As verdadeiras proporções do Homem Vitruviano
Disponível em:
http://curriculomais.educacao.sp.gov.br/as-verdadeiras-proporcoes-do-homem-vitruviano/
Acesso em: 09/03/2014.

10. IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada:

- Prof. Eduardo Wagner – Funções Quadráticas
Disponível em: http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2010
Acesso em: 23/03/2014

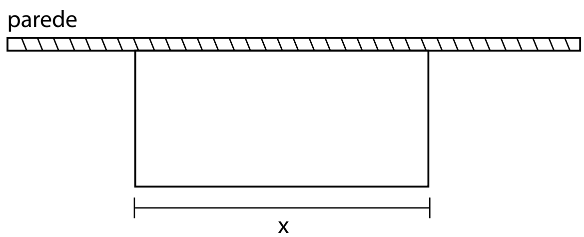
Habilidade:

Saber utilizar em diferentes contextos as funções de 1º e de 2° graus, explorando especialmente problemas de máximos e mínimos.

Questão 12

Dona Bete, uma dona de casa, deseja circundar com uma malha de arame uma região retangular junto a uma parede em seu jardim para plantio de algumas hortaliças. Sabe-se que as medidas das possíveis áreas da região retangular são encontradas a partir da função $f(x) = 10x - \frac{x^2}{2}$, sendo **x** a medida em metros da base da região retangular, conforme indica a figura a seguir.

Observe.



Podemos afirmar que a quantidade de arame que dispõe dona Bete para circundar a região retangular é de

(A) 9,5 m.

(B) 10 m.

(C) 18 m.

(D) 20 m.

Comentários e recomendações pedagógicas

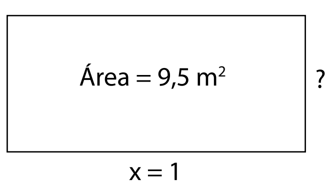
O estudo de funções é iniciado no 9º ano, mais especificamente no 2º bimestre, quando é feita uma construção mais significativa da sua forma gráfica. De início, é dada bastante ênfase à relação de proporcionalidade entre as variáveis y e x da forma "$y - h = kx$" (h e k constantes), ao se tratar de funções do 1º grau e à relação de proporcionalidade entre as variáveis y e o quadrado de x da forma "$y = kx^2$", quando se trata de função do 2º grau.

É importante o aluno ter compreensão da variação da função do 2º grau e interpretar seu gráfico, reconhecendo pontos de máximo ou mínimo, raízes, coeficientes, etc. A correta interpretação desses fatores permitirá que ele reconheça que há situações em que a relação entre as variáveis não é sempre direta, além de que os problemas que envolvem funções do 2º grau, como áreas, produção, equações de movimentos, etc., podem ser mais bem compreendidos e analisados a partir desses fatores.

Na questão apresentada, o aluno por meio da função do 2º grau, que expressa a área da região retangular, deve encontrar o valor da medida perimetral de arame que circunda os três lados do retângulo da figura (o outro lado não será circundado pela malha, pois pertence à parede da casa). Suponhamos que é o perímetro de arame disponível. Como uma das medidas da base é conhecida e vale x, as outras duas medidas (lados congruentes e opostos do retângulo) valem $\frac{p-x}{2}$. Multiplicando base vezes a altura, ou seja, $x.\left(\frac{p-x}{2}\right)$ obtém-se $\frac{px}{2} - \frac{x^2}{2}$. Comparando com a expressão da função dada $10x - \frac{x^2}{2}$ temos que $\frac{p}{2} = 10$, ou seja, o perímetro de arame é igual a 20m.

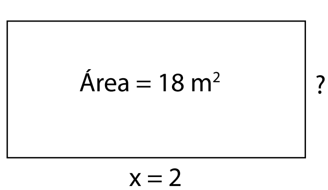
Outro modo de chegar à solução é atribuir valores a x na função dada conforme indicamos abaixo:

Para $x = 1$, então Área $= f(1) = 10(1) - \frac{1^2}{2} = \frac{19}{2} = 9{,}5$



Como a área é igual a 9,5 m² e um dos lados mede 1 m, e sabendo a área do retângulo obtemos pela multiplicação da base e da altura, chegamos à altura de 9,5 m. Portanto o perímetro procurado (quantidade de arame) é 9,5 m + 9,5 m + 1 m igual a 20 m.

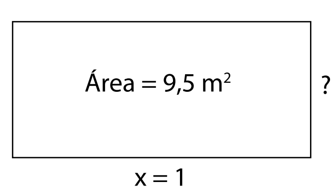
Tomando outro valor para x, por exemplo, 2, temos:

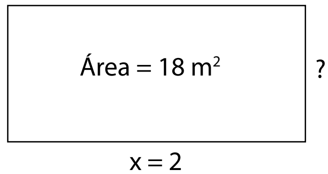


Como a área é igual a 18 m² e um dos lados mede 2 m e operando de maneira análoga a anterior, temos que a altura deve ser igual a 9 m. Portanto o perímetro (quantidade de arame) é 9 m + 9 m + 2 m = 20 m.

No item “algumas referências” são oferecidas possibilidades de pesquisas, para o desenvolvimento da habilidade requerida, que possivelmente favorecerá a compreensão da situação-problema apresentada.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) 9,5 m.	**Resposta incorreta.** Possivelmente o aluno não compreende a habilidade avaliada, pois substitui $x = 1$ na função, obtendo o valor para $f(1) = 9{,}5$. Não observa a relação da função com a área do retângulo, associa tal valor à medida perimetral de arame procurada.
(B) 10 m.	**Resposta incorreta.** Possivelmente o aluno não compreende a habilidade avaliada. Para compor sua resposta, ele recorre à função dada tomando o número 10 como resposta do problema, valor associado a variável x.
(C) 18 m.	**Resposta incorreta.** Possivelmente o aluno não compreende a habilidade avaliada. O aluno possivelmente substituiu $x = 2$ na função, obtendo o valor para $f(2) = 18$. Não observa a relação da função com a área do retângulo, associa tal valor à medida perimetral de arame procurada.
(D) 20 m.	**Resposta correta.** O aluno compreende a habilidade avaliada. Possivelmente apresente a seguinte compreensão: “Como uma das medidas da base é conhecida e vale x, as outras duas medidas (lados congruentes e opostos dos retângulos) valem $\frac{p-x}{2}$. Multiplicando base vezes a altura, ou seja, $x.\left(\frac{p-x}{2}\right)$ obtém-se $\frac{px}{2} - \frac{x^2}{2}$. Comparando com a expressão da função dada $10x - \frac{x^2}{2}$ temos que $\frac{p}{2} = 10$, ou seja, o perímetro de arame é igual a 20m. Outro modo de chegar à solução é atribuir valores a x na função dada conforme indicamos abaixo:  Para $x = 1$, então Área $= f(1) = 10(1) - \frac{1^2}{2} = \frac{19}{2} = 9{,}5$ Como a área é igual a 9,5 m² e um dos lados mede 1 m, e sabendo a área do retângulo obtemos pela multiplicação da base e da altura, chegamos a altura de 9,5 m. Portanto o perímetro procurado (quantidade de arame) é 9,5 m + 9,5 m + 1 m igual a 20 m.

(D) 20 m.	Tomando outro valor para x, por exemplo, 2, temos: Área = $f(2) = 10(2) - \dfrac{2^2}{2} = 18$  Como a área é igual a 18 m^2 e um dos lados mede 2 m e operando de maneira análoga a anterior, temos que a altura deve ser igual a 9 m. Portanto o perímetro (quantidade de arame) é 9 m + 9 m + 2 m igual a 20 m.

Algumas referências

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série – Volume 1 – Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 5: funções como relações de interdependência.
- Situação de Aprendizagem 6: funções polinomiais de 1º grau: significado, gráficos, crescimento, decrescimento e taxas.
- Situação de Aprendizagem 7: funções do 2º grau: significado, gráficos, intersecção com os eixos, vértices, sinais.
- Situação de Aprendizagem 8: Problemas envolvendo funções de 2º grau em múltiplos contextos; problemas de máximos e mínimos.

2. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 8ª série/ 9º ano – Volume 1 – Edição 2014:

- Situação de Aprendizagem 3 – Grandezas proporcionais: estudo funcional, significados e contextos.
- Situação de Aprendizagem 8: representação gráfica de grandezas proporcionais e de algumas não proporcionais.

3. + Matemática – Coletânea de Atividades – Volume 3:

- Atividade 18: interdependência de grandezas, (p.66);
- Atividade 19: grandezas proporcionais, (p.69).

4. Experiências Matemáticas – 7ª série:

- Atividade 8 interdependência de grandezas.

. Parte 1: as contas de luz do Paulinho, (p.97);

. Parte 2: descobrindo a relação, (p.100);

. Parte 3: analisando a variação, (p.101).

- Atividade 9: grandezas proporcionais.

. Parte 1: analisando a variação, (p.113);
. Parte 2: analisando gráficos, (p.115);
. Parte 3: exercitando, (p.116);
. Parte 4: mais problemas, (p.116);
. Parte 5: experimentando para responder, (p.120).

5. Novo Telecurso – Ensino Fundamental - Matemática:
-Teleaula 49: proporção inversa, (duração: 13’16”).

6. Novo Telecurso – Ensino Médio - Matemática:
-Teleaula 27: a noção de função, (duração: 14’15”)
-Teleaula 30: a função y = ax + b, (duração: 12’00”)
-Teleaula 31: a função do 2º grau, (duração:11’46”)
-Teleaula 32: máximos e mínimos, (duração: 11’46”)

7. Revista Nova Escola:
- Rosilene Anevan Fagundes: A professora de Pinhais, PR, orientou a turma de 8º ano na investigação da interdependência entre grandezas representadas por um tipo específico de função: acesso em: 22/02/2014.

8. Brasil Escola:
- Funções
Disponível em:
http://www.brasilescola.com/matematica/funcoes.htm
Acesso em 08/03/2014.
- Proporcionalidade entre grandezas
Disponível em:
http://www.brasilescola.com/matematica/proporcionalidade-entre-grandezas.htm
Acesso em: 09/03/2014

9. Currículo+:
- As verdadeiras proporções do Homem Vitruviano
Disponível em:
http://curriculomais.educacao.sp.gov.br/as-verdadeiras-proporcoes-do-homem-vitruviano/
Acesso em: 09/03/2014.

10. IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada:
- Prof. Eduardo Wagner – Funções Quadráticas
Disponível em: http://video.impa.br/index.php?page=janeiro-de-2010
Acesso em: 23/03/2014

Avaliação da Aprendizagem em Processo
Comentários e Recomendações Pedagógicas – Matemática

Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional
Coordenadora: Ione Cristina Ribeiro de Assunção

Departamento de Avaliação Educacional
Diretor: William Massei
Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Aplicação de Avaliações
Diretora: Diana Yatiyo Mizoguchi

Equipe Técnica DAVED participante da AAP
Ademilde Ferreira de Souza, Cyntia Lemes da Silva Gonçalves da Fonseca, Eliezer Pedroso da Rocha, Juvenal de Gouveia, Patricia Barros Monteiro, Silvio Santos de Almeida

Coordenadoria de Gestão da Educação Básica
Coordenadora: Maria Elizabete da Costa

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão da Educação Básica
Diretor: João Freitas da Silva

Centro do Ensino Fundamental dos Anos Finais, Ensino Médio e Educação Profissional
Diretora: Valéria Tarantello de Georgel

Equipe Curricular CGEB de Matemática
Carlos Tadeu da Graça Barros, Ivan Castilho, João dos Santos, Otavio Yoshio Yamanaka, Rosana Jorge Monteiro Magni, Sandra Maira Zen Zacarias, Vanderley Aparecido Cornatione

Elaboração do material de Matemática
Equipe Curricular de Matemática CGEB/ CEFAF e PCNP das Diretorias de Ensino da SEE

Validação, Leitura Crítica
Professores Coordenadores dos Núcleos Pedagógicos
Ana Lúcia Nunes Urtado Silva, Arlete Aparecida de Oliveira Almeida, Azenaide Sousa da Silva, Cleonice da Silva Menegatto, Edson Basilio Amorim Filho, Fabiana C. Gonçalves Frank, Lúcio Mauro Carnaúba, Marcia Cristine Ayaço Yassuhara Kagaochi, Maria Denes Tavares da Silva, Maria Edite de Camargo Dmitrasinovic, Paula Pereira Guanais, Rebeca Moralles das Chagas Plibersek, Rosemeire Lepinski, Sandra Regina Soares Clemente.