GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

COMENTÁRIOS E RECOMENDAÇÕES PEDAGÓGICAS

Subsídios para o
Professor de Matemática

Prova de Matemática
3ª série do Ensino Médio

São Paulo
1° Semestre de 2015
8ª edição

Avaliação da Aprendizagem em Processo
APRESENTAÇÃO

A Avaliação da Aprendizagem em Processo se caracteriza como ação desenvolvida de modo colaborativo entre a Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional e a Coordenadoria de Gestão da Educação Básica, que também contou com a contribuição de Professores do Núcleo Pedagógico de diferentes Diretorias de Ensino.

Aplicada desde 2011, abrangeu inicialmente o 6º ano do Ensino Fundamental e a 1ª série do Ensino Médio. Gradativamente foi expandida para os demais anos/séries (do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e 1ª a 3ª série do Ensino Médio) com aplicação no início de cada semestre do ano letivo.

Essa ação, fundamentada no Currículo do Estado de São Paulo, tem como objetivo fornecer indicadores qualitativos do processo de aprendizagem do educando, a partir de habilidades prescritas no Currículo. Dialoga com as habilidades contidas no SARESP, SAEB, ENEM e tem se mostrado bem avaliada pelos educadores da rede estadual. Propõe o acompanhamento da aprendizagem das turmas e do aluno de forma individualizada, por meio de um instrumento de caráter diagnóstico. Objetiva apoiar e subsidiar os professores de Língua Portuguesa e de Matemática que atuam nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio da Rede Estadual de São Paulo, na elaboração de estratégias para reverter desempenhos insatisfatórios, inclusive em processos de recuperação.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação, na forma de cadernos de provas para os alunos, também foram elaborados documentos específicos de orientação para os professores – Comentários e Recomendações Pedagógicas – contendo o quadro de habilidades, gabaritos, itens, interpretação pedagógica das alternativas, sugestões de atividades subsequentes às análises dos resultados e orientação para aplicação e correção das produções textuais.

Espera-se que, agregados aos registros que o professor já possui, sejam instrumentos para a definição de pautas individuais e coletivas que, organizadas em um plano de ação, mobilizem procedimentos, atitudes e conceitos necessários para as atividades de sala de aula, sobretudo, aquelas relacionadas aos processos de recuperação da aprendizagem.

COORDENADORIA DE INFORMAÇÃO, MONITORAMENTOE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

COORDENADORIA DE GESTÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Avaliação da Aprendizagem em Processo – Matemática

As questões apresentadas nesta edição foram idealizadas partindo do pressuposto de uma avaliação formativa e processual, tendo como ponto principal o diagnóstico do desenvolvimento de algumas habilidades primordiais na construção e encadeamento do processo de desenvolvimento do conhecimento matemático.

Cada questão está relacionada a uma habilidade destacada no conteúdo curricular de Matemática, sejam elas dos Anos Finais do Ensino Fundamental ou Médio, que já foram desenvolvidas em determinados períodos da trajetória estudantil do educando, visando o estabelecimento de um processo avaliativo que apenas não proporcione a mensuração do conhecimento através de erros e acertos e sim a verificação do processo do desenvolvido de habilidades e competências no ensino e aprendizagem dos conhecimentos matemáticos.

Composição:

1. Séries/Anos participantes:
Ensino Fundamental – Anos Finais: 5ª/6º, 6ª/7º, 7ª/8º e 8ª/9º.
Ensino Médio: 1ª a 3ª séries.

2. Composição das provas de Matemática:
Anos Finais do Ensino Fundamental: 10 questões objetivas e 01 questão aberta.
Ensino Médio: 10 questões objetivas e 01 questão aberta.

3. Matrizes de Referência (habilidades) para a constituição de itens das provas objetivas:
– Currículo do Estado de São Paulo.

4. Banco de questões:
– Questões inéditas e adaptadas, formalizadas a partir das habilidades prescritas no Currículo do Estado de São Paulo.

Equipe Curricular de Matemática-CEFAF

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA
3ª série do Ensino Médio

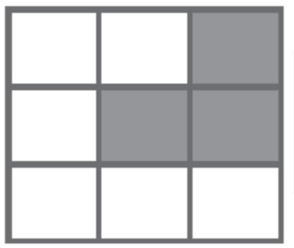
Questão		Habilidade
01	Objetiva	Expressar, por meio de matrizes, situações relativas a fenômenos físicos ou geométricos (imagens digitais, pixels etc.).
02	Objetiva	Calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma, a pirâmide e o cone, utilizando-as em diferentes contextos.
03	Objetiva	Identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-as em diferentes contextos.
04	Objetiva	Saber calcular probabilidades de eventos em diferentes situações problema recorrendo a raciocínios combinatórios gerais sem a necessidade de aplicação de fórmulas especiais.
05	Objetiva	Calcular probabilidades de eventos em diferentes situações-problema, recorrendo a raciocínios combinatórios gerais sem a necessidade de aplicação de fórmulas específicas.
06	Objetiva	Compreender os raciocínios combinatórios aditivo e/ou multiplicativo na resolução de situações-problema de contagem indireta do número de possibilidades de ocorrência de um evento.
07	Objetiva	Reconhecer situações-problema que envolvam sistemas de equações lineares (até a 4ª ordem), sabendo equacioná-los e resolvê-los.
08	Objetiva	Compreender o significado das matrizes e das operações entre elas na representação de tabelas e de transformações geométricas no plano.
09	Objetiva	Reconhecer o gráfico de funções trigonométricas como f (x) = a sen (bx) + c a partir do gráfico de y = sen x, compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes a, b e c.
10	Objetiva	Conhecer algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos.
11	Aberta	Construir o gráfico de funções trigonométricas como f (x) = a sen (bx) + c a partir do gráfico de y = sen x, compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes a, b e c.

Habilidade:

Expressar, por meio de matrizes, situações relativas a fenômenos físicos ou geométricos (imagens digitais, pixels etc.).

Questão 1 – Objetiva

Considere uma matriz formada por elementos que são, ao mesmo tempo, numerais 1 ou 0 e regiões escuras ou claras conforme figura a seguir.



Os quadradinhos escuros correspondem a 1 e os claros a 0.

Das matrizes abaixo, qual delas corresponde as informações apresentadas na figura?

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Comentários e Recomendações Pedagógicas

O significado imediatamente associado às matrizes é o de uma tabela de dupla entrada contendo dados numéricos. Se tal fato não pode ser contestado, visto o contato dos alunos com as tabelas desde praticamente o início de sua escolarização, torna-se importante, no Ensino Médio, interpretar com qualidade os significados associados a cada elemento da matriz.

O conhecimento sobre matrizes é de grande importância visto que suas aplicações ocorrem em diversos campos (computação, engenharia civil, meteorologia, entre outros).

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente não compreende a leitura da informação quanto às cores correspondentes e faz a troca da cor clara pelo número 1 e o zero pela cor escura.
(B) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	**Resposta incorreta.** O aluno demonstra dificuldade em reconhecer a estrutura de uma matriz, inverte coluna pela linha.
(C) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	**Resposta correta. O aluno demonstra domínio da habilidade avaliada.**
(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente demonstra dificuldade em reconhecer a estrutura de uma matriz, e faz a leitura nas linhas da direita para esquerda.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 2ª série, Volume 1, Nova Edição 2014, SEE-SP.
Situação de aprendizagem 5

Habilidade

Calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma, a pirâmide e o cone utilizando-as em diferentes contextos.

Questão 2 - Objetiva

Uma chapa metálica divide um cubo formando dois prismas triangulares idênticos (Figura 1). Um serralheiro decide cortar a chapa metálica na diagonal, retirando uma das partes (Figura 2).

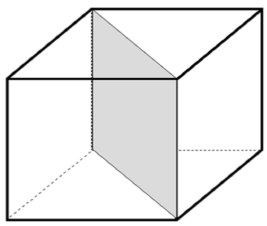


Figura 1

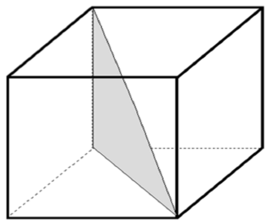


Figura 2

Sabendo que a aresta do cubo é $2\sqrt{2}$ metros, a área da chapa metálica triangular representada na figura 2 será de

(A) 4 m^2

(B) $4\sqrt{2}\,m^2$

(C) 8 m^2

(D) $8\sqrt{2}\,m^2$

Comentários e Recomendações Pedagógicas

O objetivo da questão é verificar se o aluno compreende os elementos característicos de um cubo, como as arestas e suas diagonais, e se consegue relacionar a chapa metálica já recortada à figura do triângulo retângulo, calculando então sua área. É importante que por meio de problemas desse tipo se explore as características e propriedades de poliedros, em particular dos prismas, de bases triangulares, quadradas, pentagonais, etc. Isso remete ao estudo de polígonos e as relações métricas fundamentais.

É frequente a falta de familiaridade com sólidos geométricos e suas características, que são importantes para a percepção do mundo ao redor. O trabalho com materiais concretos e recursos computacionais auxilia o aluno a se apropriar das características das principais figuras geométricas, e observar se a dificuldade do aluno está em interpretar o problema, reconhecer as diagonais do cubo como lados do triângulo ou no cálculo efetivo da área do triângulo. Uma retomada do conceito de área pode ser realizada dando ênfase às situações-problema como esta, na qual os dados fornecidos não permitem calcular diretamente a área do polígono.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) $4\ m^2$	**Resposta incorreta.** O aluno provavelmente calcula a diagonal menor do cubo por meio da relação métrica no triângulo retângulo $d^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2$, obtém, $d = 4m^2$. Outra possibilidade: o aluno considera a medida da aresta igual a medida da diagonal, ou seja, no cálculo da área do triângulo, tanto a base como a altura teriam valores $2\sqrt{2}$, logo, $A = \dfrac{2\sqrt{2}\ x\ \ 2\sqrt{2}}{2} = 4m^2$
(B) $\mathbf{4\sqrt{2}\,m^2}$	**Resposta correta. O aluno calcula a diagonal menor do cubo por meio da relação métrica no triângulo retângulo $d^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2$, obtendo $d = 4$ m. Observa que a chapa triangular é um triângulo retângulo cuja altura corresponde à aresta do cubo. Calcula:** $\mathbf{A = \dfrac{4\ x\ \ 2\sqrt{2}}{2} = \ \ 4\sqrt{2}\,m^2}$
(C) $8\ m^2$	**Resposta incorreta.** O aluno provavelmente calcula a diagonal menor do cubo, obtém $d = 4$ m. Calcula a área do triângulo relativo à chapa metálica, aplica o mesmo valor obtido da diagonal para a altura, fazendo $A = \dfrac{4\ \ x\ 4}{2} = 8m^2$ Outra possibilidade: o aluno multiplica $2\sqrt{2}\ x\ \ 2\sqrt{2}$, obtém a área total da chapa metálica igual a $8\ m^2$; possivelmente não interpreta corretamente o proposto pelo problema (obter a área de um triângulo).
(D) $8\sqrt{2}\,m^2$	**Resposta incorreta.** O aluno provavelmente interpreta que a área da chapa metálica triangular solicitada é a metade do valor da área da chapa metálica inicial. Calcula a área retangular da chapa inicial $A = 2\sqrt{2}\ x\ \ 4 = 8\sqrt{2}$, porém não finaliza o processo (dividir a área por 2).

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

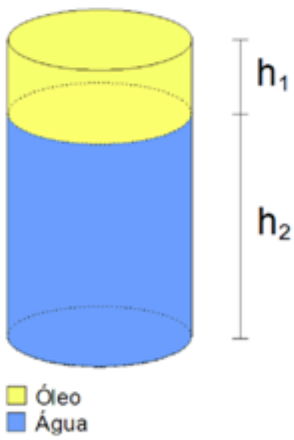
1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 2ª série, Volume 2, 2014, SEE-SP.

Habilidade

Identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-as em diferentes contextos.

Questão 3 – Objetiva

Um copo cilíndrico com área da base igual a 70 cm^2 é preenchido com água e óleo até completar o volume total do copo, 1050 cm^3, conforme indica a figura abaixo.



$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$
$$A_b = \pi \cdot r^2$$

Sabendo que as partes de óleo e de água no copo estão distribuídas respectivamente na razão de 1 para 4 e chamando de h_1 e h_2 as alturas dos líquidos, óleo e água no copo, nessa ordem, o valor de $h_2 - h_1$ é

(A) 15 cm.

(B) 9 cm.

(C) 7,5 cm.

(D) 3 cm.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

O objetivo da questão é verificar se o aluno é capaz de resolver problemas envolvendo o volume de um cilindro. No nosso dia-a-dia encontrarmos situações em que somos motivados a encontrar o volume total ou parcial de recipientes cilíndricos. Nesses casos, nosso interesse pode restringir-se em apenas encontrar o volume total do recipiente, ou simplesmente, o volume do produto que nela se encontra. Na situação-problema proposta, o aluno deve reconhecer a proporção existente entre os volumes dos líquidos para então calcular os respectivos volumes. Caso o aluno apresente dificuldades na compreensão da habilidade, realize a retomada do conceito de razão e do procedimento de cálculo do volume do cilindro. Deve-se focar o desenvolvimento de outras metodologias, principalmente trazendo para a sala de aula objetos cilíndricos que possibilitem realizar medições e comparações entre volumes.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) 15 cm	**Resposta incorreta.** O aluno provavelmente divide os valores do volume (1050 cm^3) pela área da base (70 cm^2), encontra a altura total do cilindro.
(B) 9 cm	**Resposta correta. O aluno provavelmente dividiu os valores do volume (1050 cm^3) pela área da base (70 cm^2), encontrando a altura total do cilindro. Posteriormente, observou que a razão dos volumes dos líquidos (óleo e água) em relação ao volume total é $\frac{1}{5}$ e $\frac{4}{5}$. Estendendo a relação também para as alturas, obteve** $h_1 = \frac{1}{5} \cdot 15 = \frac{15}{5} = 3\text{ cm}$ **e** $h_2 = \frac{4}{5} \cdot 15 = \frac{60}{5} = 12\text{ cm}$ **e chegando em** $h_2 - h_1 = 9\text{ cm}$. **Outra possibilidade é o aluno encontrar inicialmente os volumes do óleo e da água, assim** $V_1 = \frac{1}{5} \cdot 1050 = \frac{1050}{5} = 210\text{ cm}^3$ **e** $V_2 = \frac{4}{5} \cdot 1050 = \frac{4200}{5} = 840\text{ cm}^3$ **e na sequência encontrar os valores para as alturas, conforme segue:** $V_1 = A_{base} \cdot h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{210}{70} = h_1 = 3\text{ cm}$ $V_2 = A_{base} \cdot h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{840}{70} = h_2 = 12\text{ cm}$ **O que nos dá** $h_2 - h_1 = 9\text{ cm}$. **Outra possibilidade, o aluno calcula a altura total da água e óleo, sendo** $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, **obtendo** $h_2 = \frac{1050}{70} = 15$. **Depois o aluno relaciona** $h_1 + h_2 = 15$ **com** $\frac{1}{4} = \frac{h_1}{h_2}$, **achando os valores** $h_1 = 3\text{ cm}$ **e** $h_2 = 12\text{ cm}$, **o que nos dá** $h_2 - h_1 = 9\text{ cm}$.

(C) 7,5 cm	**Resposta incorreta.** O aluno provavelmente relacionou de maneira equivocada as partes de óleo e de água no copo (1 parte de óleo para 4 partes de água) à razão c. Multiplicando essa razão ao volume total (1050 cm^3), obteve 262,5, valor atribuído provavelmente ao volume de óleo do copo. Subtraindo 262,5 de 1050, obteve 787,5, valor atribuído provavelmente ao volume de água do copo. Na sequência, obtém: $V_1 = A_{base} \cdot h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{262,5}{70} = h_1 = 3,75$ cm $V_2 = A_{base} \cdot h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{787,5}{70} = h_2 = 11,25$ cm O que nos dá $h_2 - h_1 = 7,5$ cm.
(D) 3 cm	**Resposta incorreta.** O aluno provavelmente não detém o domínio da habilidade avaliada. Utiliza os números 4 e 1 apresentados no problema e realiza a operação da subtração, 4 – 1 = 3 cm.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 2ª série, Volume 2, 2014 2014, SEE-SP.

Habilidade

Saber calcular probabilidades de eventos em diferentes situações problema recorrendo a raciocínios combinatórios gerais sem a necessidade de aplicação de fórmulas especiais.

Questão 4 – Objetiva

Uma concessionária de automóveis pretende dar um carro novo a um cliente. Para isso, deve atender a uma condição: se este jogar um dado comum e der 6, e também jogar uma moeda três vezes, e nas três vezes der coroa.

Supondo o dado e a moeda não viciados, temos que a probabilidade do cliente ganhar o carro é de uma em

Dica

$$P(A) = \frac{\text{nº de possibilidades de ocorrer A}}{\text{nº de todas as possibilidades existentes}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

(A) 12.

(B) 36.

(C) 48.

(D) 96.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

Para obter a probabilidade, o aluno terá que compreender que, como os eventos são independentes, basta obter a probabilidade de cada evento e multiplicar os resultados. Assim, como a probabilidade de se obter 6 num dado é $\frac{1}{6}$ e de se obter coroa numa moeda é $\frac{1}{2}$, tem-se:

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{48}$$

Outra forma de resolver o problema é apenas pensar em quantos resultados existem. Nesse caso pode-se fazer a contagem utilizando o princípio multiplicativo:

$6 . 2 . 2 . 2 = 48$

O trabalho com probabilidade é rico e possibilita o uso de vários recursos pedagógicos. Podem-se utilizar jogos e atividades em grupo. Os contextos podem ser bem variados e próximos à realidade do aluno.

É interessante trabalhar em conjunto o cálculo de probabilidade e o combinatório, dando ênfase ao raciocínio e não às fórmulas. Por isso é muito importante que se valorize o registro do raciocínio e não apenas a resposta numérica.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) 12.	**Resposta incorreta.** O aluno pode ter entendido corretamente o problema, identificando que para obter 6 no dado há uma possibilidade em 6, para obter coroa em cada moeda há uma possibilidade em 2. Porém, pode ter feito 6+2+2+2=12.
(B) 36.	**Resposta Incorreta.** O aluno pode ter entendido corretamente o problema, identificando que para obter 6 no dado há uma possibilidade em 6; para obter coroa em cada moeda há uma possibilidade em 2. Porém, pode ter feito 6.(3.2) = 36.
(C) 48.	**Resposta correta. O aluno entendeu o problema e obteve a probabilidade de 1/48.**
(D) 96.	**Resposta incorreta.** O aluno pode ter assinalado essa alternativa apenas por achar que deve ser muito difícil ganhar carro, portanto as chances são apenas de 1 em 96.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado, observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

**1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 2ª série,
Volume 2, SEE-SP.**

Habilidade

Calcular probabilidades de eventos em diferentes situações-problema recorrendo a raciocínios combinatórios gerais sem a necessidade de aplicação de fórmulas específicas.

Questão 5 – Objetiva

Observe a tabela com as quantidades de peças de formatos e cores diferentes que foram colocadas em uma caixa.

	Triangulares	Circulares	Retangulares	Total
Brancas	12	10	6	**28**
Pretas	15	11	7	**33**
Amarelas	8	9	2	**19**
Total	**35**	**30**	**15**	**80**

Sorteando uma das peças dessa caixa, qual é a probabilidade de que a peça seja *"triangular"*, *"amarela retangular"*, *"não circular"* e *"não preta"*, respectivamente.

(A) $\mathbf{\frac{35}{80}; \frac{2}{80}; \frac{50}{80}; \frac{47}{80}}$.

(B) $\frac{35}{80}; \frac{2}{15}; \frac{50}{80}; \frac{47}{80}$.

(C) $\frac{35}{80}; \frac{2}{80}; \frac{30}{80}; \frac{47}{80}$.

(D) $\frac{12}{35}; \frac{2}{15}; \frac{30}{80}; \frac{33}{80}$.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A origem organizada do estudo da probabilidade remonta à correspondência trocada entre os matemáticos Blaise Pascal e Pierre de Fermat, que viveram no século XVII, na qual discutiam as chances associadas aos jogos de azar, notadamente aos jogos envolvendo baralhos.

Pode-se afirmar que, por muitos anos, anteriores ao século XIX, o cálculo da probabilidade foi utilizado apenas para prever as chances de determinada aposta sair vencedora em algum jogo. As descobertas da Física, notadamente da Mecânica Quântica, conduziram o estudo das probabilidades a um novo patamar, no qual algumas ocorrências, no mundo do muito pequeno, podem apenas ser previstas com determinada margem de segurança. Todavia, apesar das inúmeras aplicações atuais do cálculo de probabilidades nos mais diversos ramos do conhecimento, como na Economia e na Medicina, não há exagero em associá-lo diretamente aos eventos de um jogo de azar, se queremos, de fato, respeitar suas origens.

A proposta parte das seguintes premissas:

- o desenvolvimento da teoria sobre o cálculo de probabilidades esteve diretamente associado aos jogos de azar;
- quando os eventos para os quais se deseja calcular a probabilidade de ocorrência não envolvem raciocínio combinatório, a fração que expressa a probabilidade pode ser entendida como uma razão entre a parte e o todo, ideia esta com a qual os alunos convivem desde o Ensino Fundamental - Anos Iniciais;
- convém desvincular, inicialmente, os conceitos associados ao cálculo das probabilidades daqueles associados aos problemas de contagem envolvendo raciocínio combinatório;
- a probabilidade de ocorrência de dois ou mais eventos pode ser calculada, em vários casos, pela multiplicação das probabilidades de ocorrência de cada um dos eventos;
- o cálculo das probabilidades associadas à ocorrência de eventos em jogos pedagógicos é quase intuitivamente realizado por crianças e adolescentes, tratando-se, dessa maneira, de processo de formalização de conhecimentos pré-adquiridos com vistas à posterior extrapolação.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) $\mathbf{\frac{35}{80}; \frac{2}{80}; \frac{50}{80}; \frac{47}{80}.}$	**Resposta correta. O aluno demonstra possuir o domínio dos conceitos solicitados para resolução do problema.**
(B) $\frac{35}{80}; \frac{2}{15}; \frac{50}{80}; \frac{47}{80}.$	**Resposta incorreta.** O aluno provavelmente seleciona o número de peças amarelas corretamente, mas comete um equívoco na relação de proporcionalidade em compará-las ao total de peças retangulares e não com o total de peças contidas na caixa.
(C) $\frac{35}{80}; \frac{2}{80}; \frac{30}{80}; \frac{47}{80}.$	**Resposta incorreta.** O aluno provavelmente comete um equívoco em selecionar o número de peças circulares como sendo não circular, mas faz a relação correta ao compará-las ao total de peças contidas na caixa.
(D) $\frac{12}{35}; \frac{2}{15}; \frac{30}{80}; \frac{33}{80}.$	**Resposta incorreta**. O aluno demonstra não ter conhecimentos dos conceitos de probabilidade solicitados para resolução dos problemas.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 2ª série, Volume 2 edição 2014, SEE-SP.

Habilidade

Compreender os raciocínios combinatórios aditivo e/ou multiplicativo na resolução de situações-problema de contagem indireta do número de possibilidades de ocorrência de um evento.

Questão 6 – Objetiva

Carlos, Cláudia e seus três filhos vão ocupar cinco poltronas de um cinema dispostas em sequência, como mostra o esquema.

O número de maneiras diferentes que eles podem fazer isso de modo que nenhum dos três filhos ocupem as poltronas das duas extremidades (1 e 5) é igual a

(A) 6.

(B) 12.

(C) 24.

(D) 120.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A análise combinatória trata dos problemas que envolvem a contagem de casos em situações de agrupamentos de determinado número de elementos, como a situação problema apresentada que exige a mobilização de estratégias de raciocínio semelhantes, envolvendo uma das principais ideias da operação de multiplicação, a saber, o raciocínio combinatório.

É importante não enfatizar a clássica categorização dos problemas em tipos; permutações, arranjos e combinações – e, consequentemente, o uso de fórmulas matemáticas, uma vez que a representação de situações problema por intermédio de desenhos, diagramas e/ou tabelas é um dos comportamentos heurísticos reconhecidos como um dos mais importantes a serem mobilizados pelos estudantes no ensino de análise combinatória e probabilidade.

Esta questão possibilita aplicar os raciocínios combinatórios aditivo e/ou multiplicativo na resolução de situações-problema. De acordo com o enunciado, Carlos e Cláudia devem ocupar as poltronas das duas extremidades: para a 1ª poltrona, teria 2 opções (Carlos ou Claudia), após fixar um deles na 1ª poltrona, sobrará somente uma opção para a 5ª poltrona, logo teremos: 2 x 1 = 2 possibilidades. Para a 2ª poltrona, temos 3 opções: ao fixar um dos três filhos na 2ª poltrona, sobrarão duas opções para a 3ª poltrona. Para a 3ª poltrona: ao fixar um dos outros dois filhos, sobrará somente uma opção, a 4ª poltrona, para fixar o filho que sobrou. Portanto, temos 3 x 2 x 1 = 6 possibilidades.

Logo, temos duas possibilidades de combinação para os pais e seis possibilidades de combinação para os filhos, portanto, temos 2 x 6 = 12 possibilidades diferentes de combinações.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) 6.	**Resposta incorreta:** Possivelmente o aluno posicionou o pai Carlos na 1ª poltrona e a mãe Cláudia na 5ª poltrona, sobrando as três poltronas do meio; na 2ª poltrona ele tem 3 opções, na 3ª poltrona ele tem 2 opções e na 4ª poltrona ele tem 1 opção. Portanto, 3 x 2 x 1 = 6 possibilidades. Provavelmente o aluno fez a multiplicação de 1 x 6 x 1= 6 possibilidades.
(B) 12.	**Resposta correta: O aluno possivelmente realiza a seguinte estrutura de pensamento.** **De acordo com o enunciado, Carlos e Cláudia devem ocupar as poltronas das duas extremidades: para a 1ª poltrona, teria 2 opções (Carlos ou Claudia), após fixar um deles na 1ª poltrona sobrará somente uma opção para a 5ª poltrona, logo teremos: 2 x 1 = 2 possibilidades. Para a 2ª poltrona, temos 3 opções: ao fixar um dos três filhos na 2ª poltrona, sobrarão duas opções para a 3ª poltrona. Para a 3ª poltrona: ao fixar um dos outros dois filhos, sobrará somente uma opção, a 4ª poltrona, para fixar o filho que sobrou. Portanto, temos 3 x 2 x 1 = 6 possibilidades.** **Logo, temos duas possibilidades de combinação para os pais e seis possibilidades de combinação para os filhos, portanto, temos 2 x 6 = 12 possibilidades diferentes de combinações.**

(C) 24.	**Resposta incorreta:** Possivelmente o aluno observa que para a 1ª poltrona teria 2 opções Carlos ou Claudia, e para a 5ª poltrona teria também duas opções, logo, terá 2 x 2 = 4 possibilidades. Sobrando as três poltronas do meio, sendo que na 2ª poltrona ele tem 3 opções, na 3ª poltrona ele tem 2 opções e na 4ª poltrona em tem 1 opção. Portanto, 3 x 2 x 1 = 6 possibilidades. Logo, executou a multiplicação de 4 x 6 = 24 possibilidades.
(D) 120.	**Resposta incorreta:** o aluno possivelmente não entendeu a proposta da obrigatoriedade dos filhos não ocuparem a primeira e a última poltrona, tampouco que os pais teriam que estar na 1ª ou 5ª poltrona. Executou simplesmente o processo de cinco possibilidades para a 1ª poltrona, quatro possibilidades para a 2ª poltrona, três possibilidades para 3ª poltrona, duas possibilidades para a 4ª poltrona e uma possibilidade para a 5ª poltrona, logo, executa a multiplicação de 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120 possibilidades.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 2ª série, Volume 2 edição 2014, SEE-SP.
Situação de aprendizagem 2- Análise Combinatória: Raciocínios aditivo e multiplicativo.

Habilidade

Reconhecer situações-problema que envolvam sistemas de equações lineares (até a 4ª ordem) sabendo equacioná-los e resolvê-los.

Questão 7 – Objetiva

Na escola de Ensino Médio nova do bairro já possui matriculados 107 alunos nas 2ª e 3ª séries, 74 alunos nas 1ª e 2ª série e 91 alunos nas 1ª e 3ª séries.

Quantos alunos há nessa escola?

(A) 198 alunos.

(B) 136 alunos.

(C) 58 alunos.

(D) 272 alunos.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

Para a resolução dos sistemas obtidos a partir de situações-problema, sugerimos que o professor estimule seus alunos a utilizar, inicialmente, os métodos estudados no Ensino Fundamental, isto é, os métodos de adição, substituição ou comparação. Salientamos a importância de o professor priorizar que a resolução dos sistemas seja feita com base nesses métodos, ou por escalonamento, em detrimento do método de Cramer com o uso de determinantes.

O aluno precisa perceber que deve transformar os dados do problema em linguagem algébrica e descobrir que há três incógnitas que devem ser encontradas. Essas incógnitas representam o número de alunos nas 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio da escola citada. Consequentemente, o aluno irá construir um sistema de equações de três incógnitas.

As **incógnitas** são:
- x: para total de alunos da 1ª série;
- y: para total de alunos da 2ª série;
- z: para total de alunos da 3ª série.

$$\begin{cases} x + y = 74 & 1^{\text{a}} \text{ equação} \\ x + z = 91 & 2^{\text{a}} \text{ equação} \\ y + z = 107 & 3^{\text{a}} \text{ equação} \end{cases}$$

O aluno poderá isolar a incógnita x da 1ª equação determinando uma nova equação que será substituída na 2ª equação. Assim, poderá resolver o sistema linear, agora de duas incógnitas, pelo método de adição, obtendo o valor da incógnita z. Utilizando o método da substituição, nas equações 1 e 2, encontrará o valor das incógnitas x e y.

$$x + y = 74 \Rightarrow x = 74 - y$$

$$x + z = 91 \Rightarrow \begin{cases} 74 - \cancel{y} + z = 91 \\ \quad\;\; \cancel{y} + z = 107 \\ \hline \quad 74 + 2z = 198 \Rightarrow z = 62 \end{cases}$$

Portanto, o valor de x será 29 e y será 45. Logo x + y + z = 136.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) 198 alunos.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente monta a Matriz corretamente, compreende a resolução do Determinante, porém equivoca-se e não divide o determinante de D_z, pelo D_T, só divide D_X por D e D_Y por D na soma final fez, $29 + 45 + 124 = 198$
(B) 136 alunos.	**Resposta correta. O aluno demonstra domínio da habilidade avaliada ao determinar as três incógnitas, montar o sistema e resolvê-lo conforme demonstração que segue.** $x + y = 74 \Rightarrow x = 74 - y$ $x + z = 91 \Rightarrow \begin{cases} 74 - \cancel{y} + z = 91 \\ \cancel{y} + z = 107 \\ \hline 74 + 2z = 198 \Rightarrow z = 62 \end{cases}$ **Portanto, o valor de x será 29 e y será 45.** **Logo, x + y + z = 136 alunos é o total de alunos do Ensino Médio desta escola.**
(C) 58 alunos.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente não tem domínio do conceito e efetua a adição das quantidades de 74 alunos da 1ª e 2ª série com os 91 alunos da 1ª e 3ª série subtraindo dos 107 que estavam matriculados na 1ª e 3ª série EM, obtendo 58 alunos.
(D) 272 alunos.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente não tem domínio do conceito e efetua a adição das quantidades de alunos que aparece no enunciado do problema.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor de Matemática – Ensino Fundamental 7ª Série/ 8º ano – Volume 2 – 2014 SEE/SP.
Situação de Aprendizagem 3 – Sistemas de equações lineares

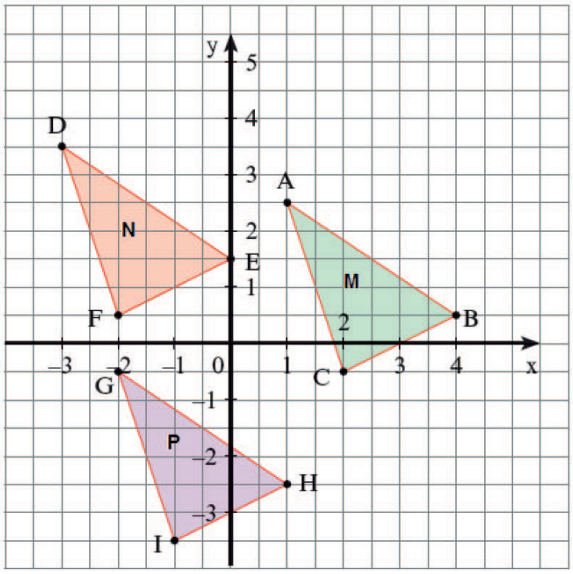
2. Caderno do Professor de Matemática – Ensino Médio 2º Série – Volume 1, 2014, SEE-SP.
Situação de Aprendizagem 7 – Sistemas lineares em situações-problema.

Habilidade

Compreender o significado das matrizes e das operações entre elas na representação de tabelas e de transformações geométricas no plano.

Questão 8 – Objetiva

No plano cartesiano abaixo estão representados os triângulos M, N e P.



As matrizes que representam as coordenadas dos vértices dos triângulos M, N e P são respectivamente

(A) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2{,}5 \\ 4 & 0{,}5 \\ 2 & -0{,}5 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} -3 & 3{,}5 \\ 0 & 1{,}5 \\ -2 & 0{,}5 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} -2 & -0{,}5 \\ 1 & -2{,}5 \\ -1 & -3{,}5 \end{bmatrix}$

(B) $M = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & 4 \\ -0{,}5 & 2 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} 3{,}5 & -3 \\ 1{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & -2 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} -0{,}5 & -2 \\ -2{,}5 & 1 \\ -3{,}5 & -1 \end{bmatrix}$

(C) $M = \begin{bmatrix} -3 & 3{,}5 \\ 0 & 1{,}5 \\ -2 & 0{,}5 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} 1 & 2{,}5 \\ 4 & 0{,}5 \\ 2 & -0{,}5 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} -2 & -0{,}5 \\ 1 & -2{,}5 \\ -1 & -3{,}5 \end{bmatrix}$

(D) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2{,}5 \\ 4 & 0{,}5 \\ 2 & -0{,}5 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} -3 & 3{,}5 \\ 0 & 1{,}5 \\ -2 & 0{,}5 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} -2 & -0{,}5 \\ -1 & -3{,}5 \\ 1 & -2{,}5 \end{bmatrix}$

Comentários e Recomendações Pedagógicas

O significado imediatamente associado às matrizes é o de uma tabela de dupla entrada contendo dados numéricos. Se tal fato não pode ser contestado, visto o contato dos alunos com as tabelas desde praticamente o início de sua escolarização, torna-se importante, no Ensino Médio, interpretar com qualidade os significados associados a cada elemento da matriz.

Para a correta interpretação dos dados numéricos registrados em matrizes é importante criar outras situações de caráter semelhante à questão apresentada que envolvam quadriláteros, pentágonos e hexágonos, estimulando os alunos a associar os vértices dos polígonos a um par ordenado no plano cartesiano.

Grade de Correção

Alternativa		Observação
(A)	$M = \begin{bmatrix} 1 & 2{,}5 \\ 4 & 0{,}5 \\ 2 & -0{,}5 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} -3 & 3{,}5 \\ 0 & 1{,}5 \\ -2 & 0{,}5 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} -2 & -0{,}5 \\ 1 & -2{,}5 \\ -1 & -3{,}5 \end{bmatrix}$	**Resposta correta. O aluno identifica os pares ordenados dos vértices dos polígonos no plano cartesiano e os relaciona à linha e coluna corretamente com as matrizes apresentadas na alternativa.**
(B)	$M = \begin{bmatrix} 2{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & 4 \\ -0{,}5 & 2 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} 3{,}5 & -3 \\ 1{,}5 & 0 \\ 0{,}5 & -2 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} -0{,}5 & -2 \\ -2{,}5 & 1 \\ -3{,}5 & -1 \end{bmatrix}$	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente não identifica as abscissas e as ordenadas dos polígonos no plano cartesiano.
(C)	$M = \begin{bmatrix} -3 & 3{,}5 \\ 0 & 1{,}5 \\ -2 & 0{,}5 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} 1 & 2{,}5 \\ 4 & 0{,}5 \\ 2 & -0{,}5 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} -2 & -0{,}5 \\ 1 & -2{,}5 \\ -1 & -3{,}5 \end{bmatrix}$	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente não identifica a matriz M e a matriz N, conforme solicitado no enunciado, mas identifica corretamente a matriz P.
(D)	$M = \begin{bmatrix} 1 & 2{,}5 \\ 4 & 0{,}5 \\ 2 & -0{,}5 \end{bmatrix}$ $N = \begin{bmatrix} -3 & 3{,}5 \\ 0 & 1{,}5 \\ -2 & 0{,}5 \end{bmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} -2 & -0{,}5 \\ -1 & -3{,}5 \\ 1 & -2{,}5 \end{bmatrix}$	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente identifica corretamente a matriz M e N, mas troca na matriz P os pontos H e I.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 2ª série, Volume 1, 2014 – 2014, SEE-SP.

Situação de Aprendizagem 5 – Matrizes: diferentes significados.

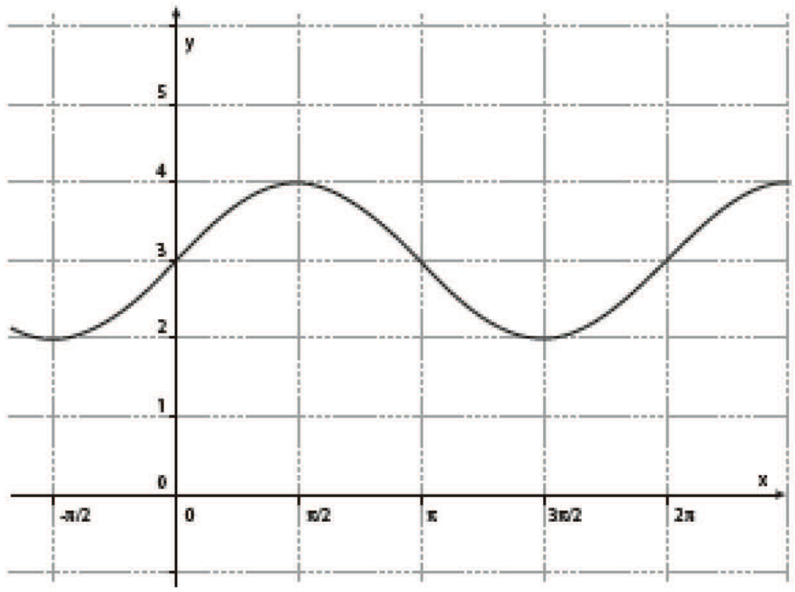
Situação de Aprendizagem 6 – Matriz de codificação: desenhando com matrizes.

Habilidade

Reconhecer o gráfico de funções trigonométricas como f (x) = a sen (bx) + c a partir do gráfico de y = sen x, compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes a, b e c.

Questão 9 – Objetiva

Considere gráfico.



A função trigonométrica que o representa é

(A) f(x) = 3 + sen(x).

(B) f(x) = 3 – sen(x).

(C) f(x) = 3 sen(x).

(D) f(x) = 3 sen(x) + 1.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

É importante que o aluno reconheça as principais características das funções $y = \text{sen}(x)$ e $y = \cos(x)$ para poder compreender o significado de transformações sofridas pelos seus gráficos com inclusão de constantes, identificando, assim, gráficos de funções do tipo $y = a\,\text{sen}(bx) + c$ ou $y = a\cos(bx) + c$.

O uso de programas (softwares) gráficos facilita muito o trabalho com funções, agregando significado a cada transformação.

A questão trata de enfatizar a determinação da expressão de uma função a partir de seu gráfico. É comum que se dê muita ênfase para a representação gráfica de uma função a partir de sua expressão. Para que o aluno tenha compreensão e apreensão de um conceito, é importante que as várias representações do objeto matemático sejam tratadas. Segundo o pesquisador francês Raymond Duval, é somente ao transitar entre os diferentes tipos de representações que se torna possível apreender um conceito. Conforme Duval, "as representações não só são necessárias para fins de comunicação, mas são igualmente essenciais para a atividade cognitiva do pensamento." Assim, ele defende uma abordagem que trabalhe com diversos registros de representação e principalmente que estimule a conversão nos dois sentidos. No caso do conceito de função, devem-se trabalhar as representações algébrica, gráfica, em tabela e em linguagem natural, pois cada tipo de representação é mais adequado para um determinado tipo de procedimento ou evidencia características diferentes.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) f(x) = 3 + sen(x).	**Resposta correta: O aluno reconhece que houve um deslocamento vertical no gráfico da função seno de 3 unidades para cima e que as características da função seno estão presentes.**
(B) f(x) = 3 – sen(x).	**Resposta incorreta**: O aluno pode ter percebido que na função f(0) = 3 e apenas com esta análise ter escolhido este item. Note que este item deve ser descartado, pois f(π/2) = 2, que não corresponde ao valor da função que está representada no gráfico.
(C) f(x) = 3 sen(x).	**Resposta incorreta:** O aluno pode ter escolhido esta alternativa por ter apenas observado que a função representada corta o eixo y no ponto 3 e, então, achar que houve a multiplicação por 3. Nesse caso, é recomendável que o professor retome o assunto com atividade onde o aluno deve identificar principais elementos de gráficos de funções, como as intersecções nos eixos x e y e alguns pontos especiais.
(D) f(x) = 3 sen(x) + 1.	**Resposta incorreta:** Como no caso anterior, é recomendável que o professor trabalhe os principais elementos de gráficos de funções.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 2ª série, Volume 1, SEE-SP.
Situação de Aprendizagem 3 – Gráficos de funções periódicas envolvendo senos e cossenos.

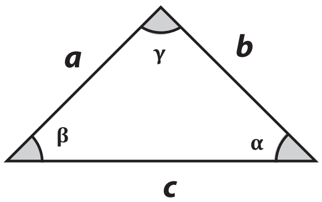
Habilidade

Conhecer algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos.

Questão 10 – Objetiva

A Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos são resultados matemáticos que nos ajudam a descobrir medidas desconhecidas num triângulo qualquer.

Suas expressões são:

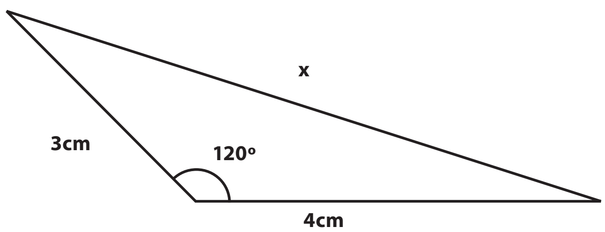


$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

	30º	45º	60º
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

Sabendo disso, no triângulo abaixo, o valor de x, em centímetros, é



(A) $\frac{1}{2}$.

(B) 5 .

(C) $\sqrt{13}$.

(D) $\sqrt{37}$.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos representam mais uma ampliação do repertório de resolução de triângulos. A partir dessas duas leis, será possível relacionar lados e ângulos de triângulos não retângulos.

A passagem delicada e de maior dificuldade nessa ampliação é a atribuição de significado ao seno ou cosseno de um ângulo possivelmente obtuso. Afinal, é natural que o aluno se pergunte: se o seno de um ângulo era o cateto oposto a esse ângulo dividido pela hipotenusa, dentro de um triângulo retângulo, o que significa obter o seno de, por exemplo, 120º? Não há nenhum triângulo retângulo contendo um ângulo de 120º, tampouco catetos ou hipotenusas para dividir.

Por esse motivo, é importante que a passagem das razões trigonométricas para as funções trigonométricas, por meio do ciclo trigonométrico, seja feita com bastante detalhe e cuidado.

Sabemos, entretanto, que, em muitas propostas curriculares e livros didáticos, justamente por sua utilidade, a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos é apresentada antes do estudo do ciclo trigonométrico. Nesse caso, recomenda-se colocar o problema com clareza para o aluno, para que, ao menos, esteja ciente de que existe uma “pendência” de compreensão a respeito do assunto pendência essa que, no caso, só será resolvida mais adiante.

Nesta questão, é necessário aplicar corretamente a Lei dos Cossenos para determinar a medida de um dos lados do triângulo. O lado desconhecido é o lado oposto ao ângulo conhecido, o que costuma facilitar a aplicação da lei, já que a incógnita aparece quase isolada num dos membros da equação:

$$x^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 120°$$
$$x^2 = 25 - 24 \cdot \cos 120°$$

Então, para determinar o cosseno de 120° é preciso conhecer a relação $\cos(180° - x) = -\cos(x)$ ou visualizá-la no ciclo trigonométrico. Assim, conclui-se que $\cos 120° = -\cos 60°$. E, por fim, é preciso conhecer o cosseno de 60°, informado na questão 7, de modo que o aluno mais atento pode concluir a resolução mesmo sem ter memorizado esse valor.

$x^2 = 25 - 24 \cdot \cos 120°$

$x^2 = 25 - 24 \cdot (-0{,}5)$

$x^2 = 25 + 12$

$x = \sqrt{37}$

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) $\frac{1}{2}$	**Resposta incorreta.** É comum que, dependendo do contexto, os alunos troquem a ordem das operações numa expressão numérica. Essa pode ter sido a origem do erro contido nessa questão, pois o aluno pode ter subtraído 24 de 25 antes de multiplicar por cos120°. $x^2 = 25 - 24\cos 120° = 1\cos 120°$ ⇨ Erro. Neste caso, também teria se equivocado quanto ao sinal, ou teria tentado ajustar o erro à situação. Porém, esse erro indica mais um problema: o aluno desconhece ou não fez relação desta questão com a condição de existência de um triângulo. Não é possível que, somando a medida de dois lados, não se alcance a medida do terceiro lado, e 3 + 1/2 < 4.
(B) 5 .	**Resposta incorreta.** Esta alternativa pode indicar que o aluno memorizou o "triângulo pitagórico 3,4,5" e, indiscriminadamente, aplicou este conhecimento aqui, sem atentar para o fato de que o triângulo em questão não é retângulo.
(C) $\sqrt{13}$.	**Resposta incorreta.** Esta alternativa pode indicar um erro de sinal no cosseno de 120°. É interessante notar que, se o aluno conhece o "triângulo pitagórico 3,4,5", ele pode concluir que, abrindo mais os catetos, de modo a aumentar o ângulo reto para 120°, o lado oposto a esse ângulo também deveria aumentar. Mas $\sqrt{13} < 5$ e, assim, ele poderia identificar que cometeu um erro de cálculo.
(D) $\sqrt{37}$ **.**	**Resposta correta. O aluno possivelmente seguiu corretamente todos os passos da resolução.**

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

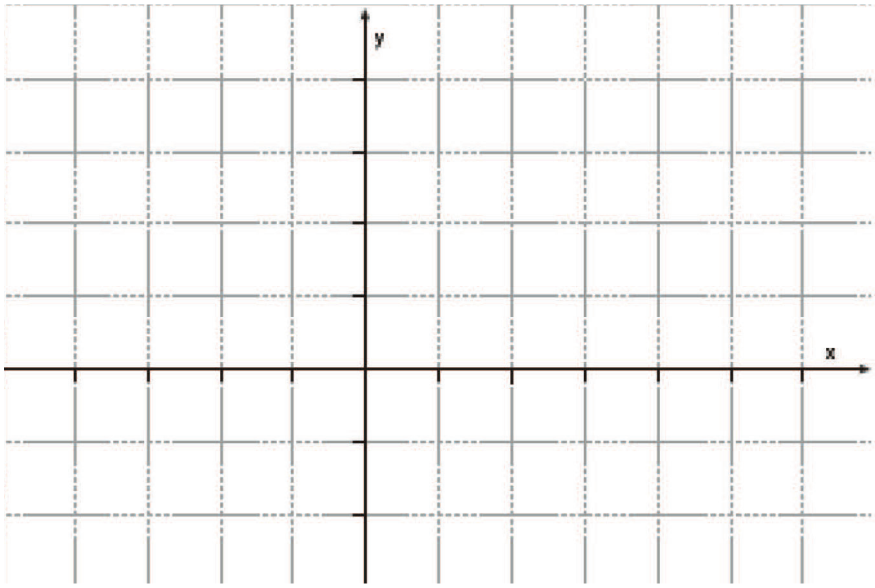
1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio– 1ª série, Volume 2
Situação de Aprendizagem 6 – Dos triângulos à circunferência: vamos dar uma volta?
Situação de Aprendizagem 8 – A hora e a vez dos triângulos não retângulos

Habilidade

Construir o gráfico de funções trigonométricas como f (x) = a sen (bx) + c a partir do gráfico de y = sen x, compreendendo o significado das transformações associadas aos coeficientes a, b e c.

Questão 11

Esboce, no sistema de coordenadas abaixo, o gráfico da função y = 1 + sen (2x).



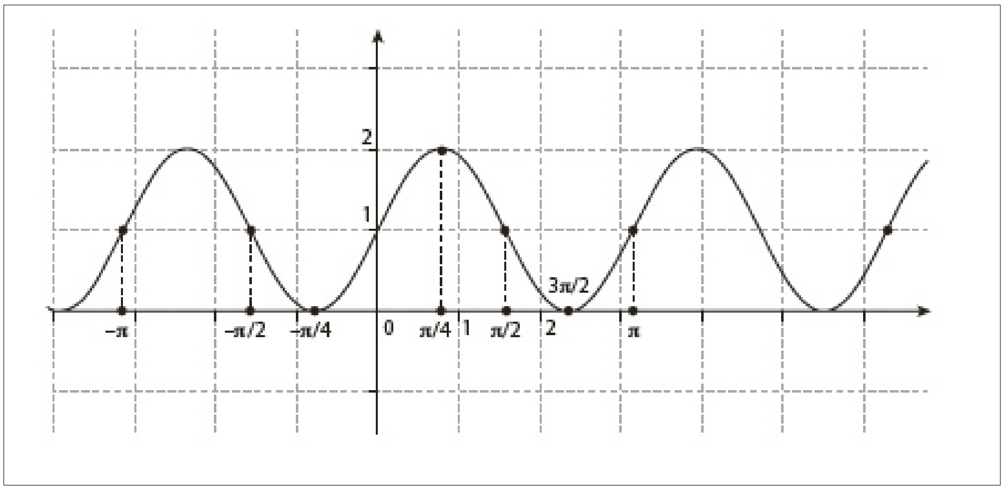
Comentários e Recomendações Pedagógicas

A construção dos gráficos das funções trigonométricas do tipo f(x) = a . sen(bx) + c torna-se relevante quando associada ao estudo das transformações sofridas pelo gráfico de y = sen(x) a partir da influência dos parâmetros a, b e c.

É recomendável que tal abordagem seja feita também com funções do tipo y = ax + b e principalmente quadráticas $y = ax^2 + bx + c$. Nesse caso, pode-se escrever qualquer função quadrática na forma $y = a(x - p)^2 + q$ e assim identificar os movimentos de translação do gráfico de $y = x^2$.

No caso de funções trigonométricas y = a sen (bx) + c ou y = a cos(bx) + c é importante que destaque o efeito da constante b no período da função. O uso de programas (softwares) gráficos facilita bastante o trabalho com tais funções, agregando significado a cada transformação sofrida.

Grade de Correção



O aluno pode acertar parcialmente a questão apenas deslocando para cima de uma unidade o gráfico de y = sen (x). É também possível que o aluno não perceba que o período da função y = sen(2x) é metade do da função y = sen(x) e não o dobro. Porém, se ele fez o gráfico esticando o da função seno, tem pelo menos uma noção parcial do efeito da constante que multiplica a variável x. É importante perceber se o aluno encontra as escalas adequadas para a construção do gráfico, usando a malha quadriculada; é uma boa oportunidade para o professor discutir aproximações. Contudo, devem ser considerados corretos os gráficos com escalas diferentes no eixo x e no eixo y, desde que o período e a amplitude estejam corretos.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 2ª série, Volume 1, SEE-SP.

Situação de Aprendizagem 3 – Gráficos de funções periódicas envolvendo senos e cossenos

Avaliação da Aprendizagem em Processo
Comentários e Recomendações Pedagógicas – Matemática

Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional
Coordenadora: Ione Cristina Ribeiro de Assunção

Departamento de Avaliação Educacional
Diretor: William Massei
Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Aplicação de Avaliações
Diretora: Diana Yatiyo Mizoguchi

Equipe Técnica DAVED participante da AAP
Ademilde Ferreira de Souza, Cristiane Dias Mirasola, Eliezer Pedroso da Rocha, Isabelle Regina de Amorim Mesquita, Juvenal de Gouveia, Patricia de Barros Monteiro, Silvio Santos de Almeida, Soraia Calderoni Statonato

Coordenadoria de Gestão da Educação Básica
Coordenadora: Maria Elizabete da Costa

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão da Educação Básica
Diretor: João Freitas da Silva

Centro do Ensino Fundamental dos Anos Finais, Ensino Médio e Educação Profissional
Diretora: Valéria Tarantello de Georgel

Equipe Curricular CGEB de Matemática
Ivan Castilho, João dos Santos, Otavio Yoshio Yamanaka, Rosana Jorge Monteiro Magni, Sandra Maira Zen Zacarias, Vanderley Aparecido Cornatione

Elaboração do material de Matemática
Equipe Curricular de Matemática CGEB/ CEFAF e PCNP colaboradores: Ana Lucia Nunes Urtado Silva, Anderson Cangane Pinheiro, Carlos Tadeu da Graça Barros,Cibele Zucareli dos Santos, Claudio Galeote Rentas , Daniela Luporini , Dimas Tadeu Celestino dos Santos, Edson Basilio Amorim Filho, Eduardo Granado Garcia, Emerson de Souza Silva, Everaldo José Machado de Lima, Fábio José Paganotti, Fernanda Fornitani Marques, Geverson Ribeiro Machi, Gisley Noemi Barçolobre Manoel, Glaucia Roque Rocha Pio, Graziele Cristina Mantovani Pereira, Juliana Leite Boranelli, Leandro Geronazzo, Lilian Ferolla de Abreu, Lilian Fortuna Clara Fabiani, Luciana Moraes Funada, Maria Dolores Cereijido Bersani, Maria Edite de Camargo Dmitrasinovic, Maria Emilia Pivovar de Azevedo, Maria Helena Silveira, Maria Josélia Silva Bergamo Almeida, Mario José Pagotto, Mariza Antonia Machado de Lima, Mary Silvia Leme Starnini, Meiriele Cristina Calvo, Osvaldo Joaquim dos Santos, Paula Cristina de Faria Veronese, Paula Pereira Guanais, Paulo Henrique Lisboa Zioli, Renata Leandro Terrengue, Renata Serrano Rodrigues Shiratsu, Rita de Cássia Toffanelli Prates, Rodrigo Soares de Sá Roseli Soares Jacomini, Samara Valdo de Oliveira, Samira Camargo Clemente, Sueli Aparecida Gobbo Araujo , Susi Passarete Cardoso , Vitória Raquila Papadopoulos Koki .

Validação, Leitura Crítica

Professores Coordenadores dos Núcleos Pedagógicos das Diretorias de Ensino: Antonia Zumira da Silva, Claudia Xavier da Silva Cavalcante, Cleonice da Silva Menegatto, Cristina Aparecida da Silva, Edson Basilio Amorim Filho, Givanildo Farias da Silva, Lucio Mauro Carnaúba, Marcia Cristine Ayaco Yassuhara Kagaochi, Maria Denes Tavares das Silva, Paula Pereira Guanais, Rebeca Meirelles das Chagas Plibersek, Rosemeire Lepinski, Sandra Regina Soares Clemente, Sérgio Antunes.

Leitura Crítica e Revisão

Equipe Curricular de Matemática – CGEB

Ivan Castilho, João dos Santos, Otavio Yoshio Yamanaka, Rosana Jorge Monteiro Magni, Sandra Maira Zen Zacarias, Vanderley Aparecido Cornatione

o dia a dia, as Grandezas e as Medidas estão presentes em uma boa parte das atividades que realizamos.

O ensino de conteúdos concernentes a Grandezas e Medidas é importante na conexão de campos distintos da Matemática, entre diferentes disciplinas, sendo trabalhado ao longo de toda a escolaridade básica, principalmente na resolução de problemas.

Recomenda-se explorar o aspecto histórico do tema Grandezas e Medidas a fim de que os alunos percebam a necessidade que o homem teve de criar unidades - padrão de medida para se comunicar.

Proponha os alunos situações-problema que permitam a utilização de estratégias pessoais apoiados pela utilização de outros instrumentos de medidas, a saber: fita métrica, balança e recipientes de uso frequente que apresentem unidades de medidas padronizadas. É importante garantir que as discussões dos procedimentos e registros que surgirem entre os alunos se deem de maneira frequente.

Eles precisam perceber que medir é comparar grandezas da mesma natureza: por exemplo, um comprimento com outro comprimento.

Sugere-se propor aos alunos, também, que pesquisem as unidades de medidas de massa ou volume existentes em embalagens de alimentos e bebidas, como latas ou garrafas de refrigerante, saco de arroz, pote de iogurte, lata de tomate e outros, de tal modo que este aluno consiga fazer relações entre o que é ensinado na escola e a importância desse conhecimento fora da escola