GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

COMENTÁRIOS E RECOMENDAÇÕES PEDAGÓGICAS

Subsídios para o
Professor de Matemática

Prova de Matemática
2ª série do Ensino Médio

São Paulo
1° Semestre de 2015
8ª edição

Avaliação da Aprendizagem em Processo
APRESENTAÇÃO

A Avaliação da Aprendizagem em Processo se caracteriza como ação desenvolvida de modo colaborativo entre a Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional e a Coordenadoria de Gestão da Educação Básica, que também contou com a contribuição de Professores do Núcleo Pedagógico de diferentes Diretorias de Ensino.

Aplicada desde 2011, abrangeu inicialmente o 6º ano do Ensino Fundamental e a 1ª série do Ensino Médio. Gradativamente foi expandida para os demais anos/séries (do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental e 1ª a 3ª série do Ensino Médio) com aplicação no início de cada semestre do ano letivo.

Essa ação, fundamentada no Currículo do Estado de São Paulo, tem como objetivo fornecer indicadores qualitativos do processo de aprendizagem do educando, a partir de habilidades prescritas no Currículo. Dialoga com as habilidades contidas no SARESP, SAEB, ENEM e tem se mostrado bem avaliada pelos educadores da rede estadual. Propõe o acompanhamento da aprendizagem das turmas e do aluno de forma individualizada, por meio de um instrumento de caráter diagnóstico. Objetiva apoiar e subsidiar os professores de Língua Portuguesa e de Matemática que atuam nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio da Rede Estadual de São Paulo, na elaboração de estratégias para reverter desempenhos insatisfatórios, inclusive em processos de recuperação.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação, na forma de cadernos de provas para os alunos, também foram elaborados documentos específicos de orientação para os professores – Comentários e Recomendações Pedagógicas – contendo o quadro de habilidades, gabaritos, itens, interpretação pedagógica das alternativas, sugestões de atividades subsequentes às análises dos resultados e orientação para aplicação e correção das produções textuais.

Espera-se que, agregados aos registros que o professor já possui, sejam instrumentos para a definição de pautas individuais e coletivas que, organizadas em um plano de ação, mobilizem procedimentos, atitudes e conceitos necessários para as atividades de sala de aula, sobretudo, aquelas relacionadas aos processos de recuperação da aprendizagem.

COORDENADORIA DE INFORMAÇÃO, MONITORAMENTOE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

COORDENADORIA DE GESTÃO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Avaliação da Aprendizagem em Processo – Matemática

As questões apresentadas nesta edição foram idealizadas partindo do pressuposto de uma avaliação formativa e processual, tendo como ponto principal o diagnóstico do desenvolvimento de algumas habilidades primordiais na construção e encadeamento do processo de desenvolvimento do conhecimento matemático.

Cada questão está relacionada a uma habilidade destacada no conteúdo curricular de Matemática, sejam elas dos Anos Finais do Ensino Fundamental ou Médio, que já foram desenvolvidas em determinados períodos da trajetória estudantil do educando, visando o estabelecimento de um processo avaliativo que apenas não proporcione a mensuração do conhecimento através de erros e acertos e sim a verificação do processo do desenvolvido de habilidades e competências no ensino e aprendizagem dos conhecimentos matemáticos.

Composição:

1. Séries/Anos participantes:
Ensino Fundamental – Anos Finais: 5ª/6º, 6ª/7º, 7ª/8º e 8ª/9º.
Ensino Médio: 1ª a 3ª séries.

2. Composição das provas de Matemática:
Anos Finais do Ensino Fundamental: 10 questões objetivas e 01 questão aberta.
Ensino Médio: 10 questões objetivas e 01 questão aberta.

3. Matrizes de Referência (habilidades) para a constituição de itens das provas objetivas:
– Currículo do Estado de São Paulo.

4. Banco de questões:
– Questões inéditas e adaptadas, formalizadas a partir das habilidades prescritas no Currículo do Estado de São Paulo.

Equipe Curricular de Matemática-CEFAF

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA
2ª série do Ensino Médio

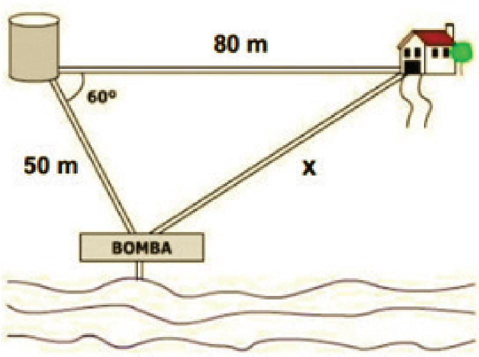
Questão		Habilidade
01	Objetiva	Conhecer algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos.
02	Objetiva	Usar de modo sistemático relações trigonométricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos.
03	Objetiva	Aplicar as propriedades dos polígonos regulares no problema da pavimentação de superfícies.
04	Objetiva	Resolver equações e inequações simples usando propriedades de potências e logaritmos.
05	Objetiva	Conhecer a função exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento.
06	Objetiva	Utilizar em diferentes contextos as funções de 1° e de 2° graus explorando especialmente problemas de máximos e mínimos.
07	Objetiva	Compreender a construção do gráfico de funções de 1° grau sabendo caracterizar o crescimento, o decrescimento e a taxa de variação.
08	Objetiva	Conhecer as características principais das progressões geométricas – expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras –, sabendo aplicá-las em diferentes contextos.
09	Objetiva	Conhecer as características principais das progressões aritméticas - expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras - sabendo aplicá-las em diferentes contextos.
10	Objetiva	Reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens expressando-as matematicamente, quando possível.
11	Aberta	Reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens expressando-as matematicamente, quando possível.

Habilidade:

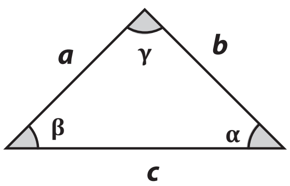
Conhecer algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos.

Questão 1 – Objetiva

Uma bomba d'água é utilizada para transportar água de um rio para outros dois locais: a casa e a caixa d'água, conforme figura abaixo.



Dica:
A Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos são resultados matemáticos que nos ajudam a descobrir medidas desconhecidas num triângulo qualquer. Suas expressões são:



$$\frac{a}{\text{sen}\ \alpha} = \frac{b}{\text{sen}\ \beta} = \frac{c}{\text{sen}\ \gamma}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

O proprietário dessa casa pretende bombear a água do rio diretamente para a casa. Ele terá que construir um encanamento de

(A) 30 metros.

(B) 50 metros.

(C) 70 metros.

(D) 130 metros.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

A Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos representam mais uma ampliação do repertório de resolução de triângulos, duas relações importantes entre os lados e os ângulos de um triângulo qualquer: uma relação de proporcionalidade envolvendo lados e ângulos ou, mais precisamente, os lados e os senos dos ângulos, conhecida como Lei dos Senos; e uma generalização do teorema de Pitágoras, conhecida como Lei dos Cossenos. Naturalmente, tais relações também são válidas para triângulos retângulos e seu aprendizado constitui, portanto, uma ampliação do repertório das relações entre a Geometria e a Trigonometria.

Tal ampliação de horizontes pode ser destacada pelo professor, uma vez que ela contribui para a consciência de que o conhecimento foi aprimorado, por meio da compreensão dessas novas relações.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) 30 metros.	Resposta incorreta. O aluno possivelmente não interpreta corretamente o enunciado do problema, não reconhece a situação onde se utiliza o raciocínio da Lei dos Cossenos, observa os valores apresentados na figura e faz x = 80 - 50 = 30.
(B) 50 metros.	Resposta incorreta. O aluno não interpreta corretamente o enunciado do problema, consequentemente não reconhece a situação onde se utiliza o raciocínio da Lei dos Cossenos. Entretanto, observando o resultado soma os dois lados do triângulo: 50 + 80 = 130, calcula que faltam 50 para a soma dar 180.
(C) 70 metros.	**Resposta correta. – O aluno interpreta corretamente o enunciado do problema, reconhece a situação onde se utiliza o raciocínio da Lei dos Cossenos utilizando corretamente sua fórmula.** $x^2 = 80^2 + 50^2 - 2 \cdot 50 \cdot 80. cos60°$ $x^2 = 6\,400 + 2\,500 - 8\,000.0,5$ $x^2 = 4\,900 => x = 70m$
(D) 130 metros.	Resposta incorreta. O aluno interpreta que a medida do lado maior é igual a soma dos lados menores (x = 50+80).

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio– 1ª série, Volume 2
Situação de Aprendizagem 6 – Dos triângulos à circunferência: vamos dar uma volta?
Situação de Aprendizagem 8 – A hora e a vez dos triângulos não retângulos.

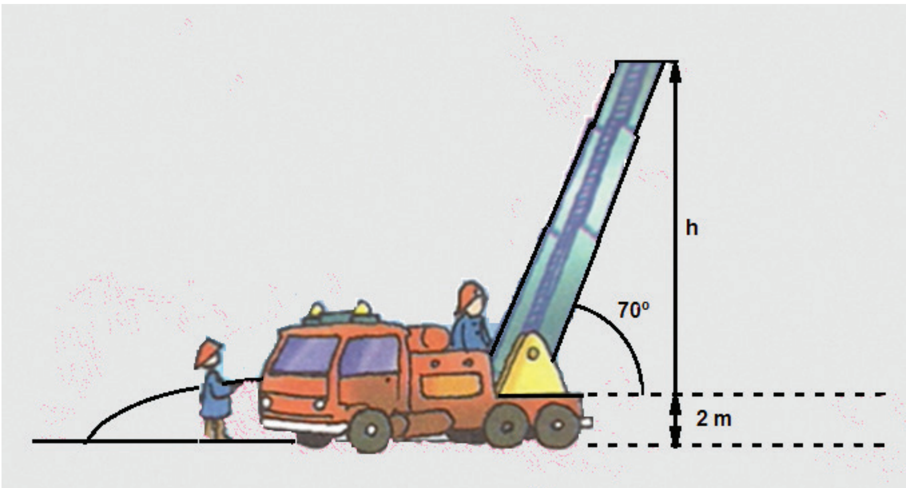
Habilidade

Usar de modo sistemático relações trigonométricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos em diferentes contextos.

Questão 2 – Objetiva

Uma escada de um carro de bombeiros pode se estender até um comprimento máximo de 30 m, quando é levantada até formar um ângulo máximo de 70°.

A base da escada está colocada sobre um caminhão a uma altura de 2 m do solo, conforme indica a figura a seguir.



Qual é a altura aproximada, em relação ao solo, que essa escada poderá alcançar?

Dados: sen 70º = 0,94; cos 70º = 0,34; tg 70º = 2,75

(A) 12 m.

(B) 28 m.

(C) 30 m.

(D) 32 m.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

O estudo das razões trigonométricas tem um grande sentido didático quando tal tem início na fixação da medida do ângulo agudo do triângulo retângulo e da obtenção dos valores de suas razões (seno, cosseno e tangente). Portanto, o foco central é a medida do ângulo, destacando-se que as razões trigonométricas são, prioritariamente, associadas ao ângulo e não às medidas dos lados do triângulo retângulo.

Lembrando que o estudo das razões trigonométricas é de fundamental importância e que a construção conceitual esteja nesse momento, acoplada mais do que nunca a situações do cotidiano dos alunos, evitando-se formalizações excessivas.

Para resolver essa questão, o aluno precisa saber que para obter a altura (h), precisa estabelecer a razão trigonométrica ideal para sua resolução, desta forma, são apresentados o comprimento máximo da escada (30 m) e o ângulo de inclinação da escada com a base do caminhão (70º). A partir destes dados é possível estabelecer hipoteticamente um triângulo retângulo, representado na figura do enunciado. O ângulo reto é determinado pela altura (h) em relação do solo com a extremidade da escada.

Grade de Correção

Alternativa		Observação
(A)	12 m.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente utiliza a razão seno corretamente, porém adota o valor do cosseno de 70º (0,34). $sen70^o = \frac{h}{30} \Rightarrow 0{,}34 = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 30 \cdot (0{,}34) \cong 10m$ Somando os 2 metros que é a distância do chão até a base da escada no caminhão, temos que a altura total é de aproximadamente 12 metros.
(B)	28 m.	**Resposta incorreta.** O aluno aplica corretamente a razão trigonométrica relativa ao cálculo do seno de 70º, porém não adiciona a distância do chão à base do caminhão. $sen\ 70^o = \frac{h}{30} \Rightarrow 0{,}94 = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 30 \cdot (0{,}94) \Rightarrow h \cong 28m$
(C)	**30 m.**	**Resposta correta. O aluno mostra que compreendeu o enunciado do problema, associou corretamente os dados do enunciado e estabeleceu a ligação dos dados com a razão trigonométrica que satisfaz a resolução da seguinte maneira.** $sen70^o = \frac{h}{30} \Rightarrow 0{,}94 = \frac{h}{30} \Rightarrow h = 30 \cdot (0{,}94) \Rightarrow h \cong 28m$ **Adicionando-se 2m referente à distância do chão até a base da escada no caminhão, temos que a altura total é de aproximadamente 30 metros.**
(D)	32 m.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente não compreende o enunciado do problema e soma o comprimento da escada (30m) com a distância do chão até a base da escada no caminhão (2m).

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática- Ensino Fundamental- 9º Ano, Volume 2; Situação de Aprendizagem 4- Razões Trigonométricas dos ângulos agudos; SEE/SP.

2. Aula 16 - Matemática - Ens. Médio- Telecurso, disponível em http://www.telecurso.org.br/matematica/. Acesso em 17/09/2014.

3. Aula 40 - Matemática - Ens. Médio – Telecurso, disponível em http://www.telecurso.org.br/matematica/ acesso em 17/09/2014.

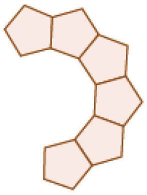
4. Aula 44 - Matemática - Ens. Médio- Telecurso,
disponível em http://www.telecurso.org.br/matematica/ acesso em 17/09/2014

Habilidade

Aplicar as propriedades dos polígonos regulares no problema da pavimentação de superfícies

Questão 3 – Objetiva

O número total de pentágonos regulares necessários para formar a "roda" é



Dica:
Em um polígono de n lados a soma dos ângulos internos é dada por $S_i = (n - 2) . 180°$

(A) 4.

(B) 6.

(C) 8.

(D) 10.

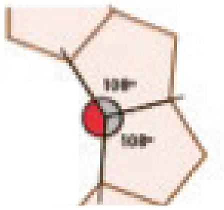
Comentários e Recomendações Pedagógicas

Problemas de pavimentação de superfície por meio de polígonos regulares costumam exigir o conhecimento dos ângulos internos desse tipo de polígono. Em princípio, é necessário saber que num polígono de n lados, a soma dos ângulos internos é dada por $S_i = (n - 2)180°$ e que, portanto,

a medida αi é um ângulo interno desse polígono é dada por

$$\alpha_i = \frac{(n - 2)180°}{n}$$

Nesta questão, conclui-se, com isso, que cada ângulo interno do pentágono regular tem 108°. Assim, vejamos o que acontece num dos vértices internos à “roda”:



Assim, x + 108° + 108° = 360°, donde se conclui que x = 144°. Usando a mesma fórmula, podemos agora descobrir qual é o polígono regular interno à roda:

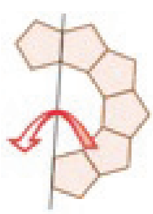
$$144° = \frac{(n - 2)180°}{n}$$

$$144° = 180n - 360$$

$$n = 10$$

Portanto, o polígono regular interno à roda é um decágono e isso significa que são necessários 10 pentágonos regulares para formar a roda.

Porém, há outras abordagens possíveis. O aluno pode estimar o número de pentágonos visualmente por simetria. Se ele percebe o alinhamento entre os lados do segundo e do último pentágono da figura, pode-se concluir diretamente que são necessários 10 pentágonos para formar a roda.



Grade de Correção

Alternativa		Observação
(A)	4.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente tenha interpretado errado o enunciado. 4 é o número de pentágonos que faltam para completar a roda.
(B)	6.	**Resposta incorreta**. Esta alternativa pode indicar um erro de interpretação similar ao da alternativa "a", com o adicional de um erro de visualização da simetria. Como aparecem 6 pentágonos desenhados e a parte já formada da figura está próxima da metade, o aluno pode ter suposto que faltavam mais 6.
(C)	8.	**Resposta incorreta**. Convém investigar se houve alguma hipótese equivocada ou se o aluno assinalou aleatoriamente.
(D)	**10.**	**Resposta correta. O aluno aplica corretamente o teorema da soma das medias dos ângulos internos de um polígono.**

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série, Volume 2
Situação de Aprendizagem 7 – Polígonos e circunferências: regularidades na inscrição e circunscrição

Habilidade

Resolver equações e inequações simples usando propriedades de potências e logaritmos.

Questão 04 – Objetiva

Se $4^x = \frac{1}{32}$, então x é um número

(A) negativo e inteiro.

(B) positivo e inteiro.

(C) negativo e não inteiro.

(D) positivo e não inteiro.

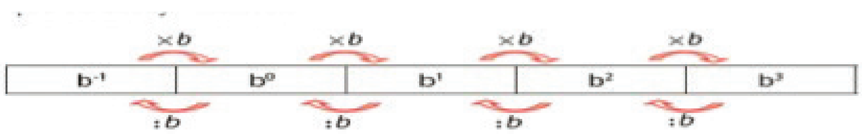
Comentários e Recomendações Pedagógicas

Esta questão é predominantemente procedimental e o objetivo é diagnosticar se o aluno consegue utilizar as definições e propriedades de potência para resolver equações exponenciais simples, cujos membros podem ser reduzidos a potências de mesma base. Por esse motivo, as alternativas não explicitam números, evitando, assim, que o aluno teste as raízes.

O trabalho com as definições e propriedades de potência muitas vezes fica calcado na mera memorização e, se for esse o caso, é importante buscar uma reparação. A compreensão das propriedades bem como a justificativa das definições permitem que o aluno possa apoiar-se em pequenas deduções, em vez de apoiar-se unicamente na memorização de regras que podem lhe parecer arbitrárias. Por exemplo, a definição de potência de expoente negativo não é arbitrária, mas é construída para que possam ser mantidas as boas propriedades que já valiam para expoentes naturais. Vejamos:

Para manter a propriedade $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$, devemos ter $b^{-y} = b^{0-y} = \frac{b^0}{b^y} = \frac{1}{b^y}$

Outro modo de justificar essa mesma definição é por meio da regularidade que se deseja manter:



Há duas dificuldades básicas a serem transpostas na resolução da equação proposta aqui. A primeira é a fração que aparece no segundo membro. É preciso que o aluno saiba que essa fração pode ser escrita como uma potência de expoente negativo. A segunda é que, ainda que o aluno escreva corretamente a potência 2^{-5}, no outro membro não aparece imediatamente uma potência de 2. Assim, o aluno terá de fazer a seguinte transformação: $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$.

Finalmente, como a função exponencial é bijetora, $2^{2x} = 2^{-5}$ implica $2x = -5$. Então, $x = -2,5$.

Grade de Correção

Alternativa		Observação
(A)	negativo e inteiro.	**Resposta incorreta**. O aluno possivelmente calcula: $4^x = 2^{-5}$ e conclui que x = -5. Demonstra não ter conhecimento das propriedades de potência.
(B)	positivo e inteiro	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente calcula $4^x = 2^5$ e conclui que x = 5. Demonstra não ter conhecimento das propriedades de potência.
(C)	**negativo e não inteiro.**	**Resposta correta. O aluno resolveu a equação corretamente aplicando as propriedades e definições de potência.**
(D)	positivo e não inteiro.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente desconhece que para uma potência de 4 igualar-se a uma fração própria, o expoente necessariamente terá de ser negativo.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado, observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série, Volume 2
Situação de Aprendizagem 1 – As potências e o crescimento/decrescimento exponencial: a função exponencial

Situação de Aprendizagem 2 – Quando o expoente é a questão, o logaritmo é a solução, a força da ideia do logaritmo.

Situação de Aprendizagem 3 – As funções com variável no expoente: a exponencial e sua inversa, a logarítmica.

Situação de Aprendizagem 4 – As múltiplas faces das potências e dos logaritmos: problemas envolvendo equações e inequações em diferentes contextos.

Habilidade

Conhecer a função exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento.

Questão 5 – Objetiva

Leia as situações descritas abaixo.

I. Um imóvel valoriza-se 20% a cada ano.

II. Uma colônia de bactérias duplica o número de bactérias a cada hora.

É correto afirmar que

(A) ambas as situações se referem a grandezas que crescem exponencialmente.

(B) apenas a situação I se refere a uma grandeza que cresce exponencialmente.

(C) apenas a situação II se refere a uma grandeza que cresce exponencialmente.

(D) nenhuma das situações se refere a grandezas que crescem exponencialmente.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

O que caracteriza uma função exponencial é o fator de crescimento constante. Num domínio discreto, isso equivale a observar uma PG, em que cada novo termo é o anterior multiplicado pela razão constante, que seria esse tal fator de crescimento.

De modo geral, o domínio de uma função exponencial pode ser todo o conjunto dos números reais, então é possível descrever esse fator de crescimento constante pela razão $\frac{f(x+1)}{f(x)}$, obtida a partir de qualquer valor de x.

Nesta questão, ainda que o aluno desconheça a nomenclatura "fator de crescimento", o que se espera é que ele tenha internalizado a noção de que, se é possível obter f(x+1) multiplicando f(x) por uma constante, então, produz-se uma potência e, por esse motivo, tem-se uma função exponencial:

$f(x+1) = a\, f(x)$

$f(x+2) = a\, f(x+1) = a^2 f(x)$

$f(x+3) = a\, f(x+2) = a^3 f(x)$

...

$f(x+n) = a\, f(x+n-1) = a^n f(x)$

Nesta questão, a situação II apresenta um fator de crescimento constante bastante evidente, já que a cada hora, o número de bactérias fica multiplicado por 2. A função será $f(x) = n \cdot 2^x$, onde n é a quantidade inicial de bactérias, que não foi explicitada, e x é o tempo em horas.

A situação I demanda um pouco mais de elaboração. Se a cada ano o valor do imóvel aumenta 20%, então, a cada ano seu valor anterior deve ser multiplicado por 1,2 (100% mais 20%). Assim, o fator de crescimento da função é constante e é possível escrever $g(x) = v \cdot 1{,}2^x$, onde v é o valor inicial do imóvel, que não foi explicitado, e x é o tempo em anos.

Grade de Correção

Alternativa		Observação
(A)	**ambas as situações se referem a grandezas que crescem exponencialmente.**	**Resposta correta. O aluno identifica corretamente o tipo de crescimento envolvido nas duas situações.**
(B)	apenas a situação I se refere a uma grandeza que cresce exponencialmente.	**Resposta incorreta.** Numa situação de entendimento parcial das funções exponenciais, é pouco esperado que o aluno tenha identificado corretamente a situação I como de crescimento exponencial, mas não a situação II, que tem suas características muito mais evidentes.
(C)	apenas a situação II se refere a uma grandeza que cresce exponencialmente.	**Resposta incorreta:** Esse é um erro relativamente esperado, uma vez que a situação II constitui o tipo básico de exemplo usado para abordar as funções exponenciais e traz suas características muito mais evidenciadas.
(D)	nenhuma das situações se refere a grandezas que crescem exponencialmente.	**Resposta incorreta.** O aluno demonstra falta de familiaridade com os exemplos mais corriqueiros de função exponencial

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série, Volume 2
Situação de Aprendizagem 1 – As potências e o crescimento/decrescimento exponencial: a função exponencial.

Situação de Aprendizagem 3 – As funções com variáveis no expoente: a exponencial e sua inversa, a logarítmica.

Habilidade

Utilizar em diferentes contextos as funções de 1° e de 2° graus explorando especialmente problemas de máximos e mínimos.

Questão 6 – Objetiva

O preço, em reais, de uma pedra preciosa é dado pelo quadrado de sua massa, em gramas. Assim, uma pedra de 7 gramas custa R$ 49,00. Se essa pedra se partisse em dois pedaços de, por exemplo, 1 grama e 6 gramas, haveria um prejuízo de R$12,00, pois o preço que se poderia obter pelos dois pedaços juntos seria calculado assim: $1^2 + 6^2 = 37$.

Desse modo, se a pedra de fato se partir em dois pedaços, o prejuízo máximo que se pode obter é de

(A) R$ 20,00.

(B) R$ 24,00.

(C) R$ 24,50.

(D) R$ 29,50.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

Os problemas de máximos e mínimos são de fundamental importância em diversas aplicações da Matemática, tais como engenharia ou economia. A função quadrática é um modelo que se ajusta bem a muitas dessas aplicações, considerado o domínio adequado.

Nesta questão, a aplicação do modelo pode ser feita "traduzindo" a situação para a linguagem algébrica:

Massa do pedaço 1: x gramas ⇨ Preço: x^2 reais
Massa do pedaço 2: (7 – x) gramas ⇨ Preço: $(7 - x)^2 = 49 - 14x + x^2$ reais

Essa é uma resolução usual, do tipo que consta na maior parte dos materiais didáticos, mas há muitas variações possíveis. O aluno pode, por exemplo, calcular diretamente a ordenada do vértice ou, ao contrário, pode escolher um caminho indireto, calculando as coordenadas do vértice por meio da média das raízes da função (0 e 7). Ou ainda, o aluno pode resolver o problema sem fazer uso da álgebra, mas analisando a variação numericamente:

Pedaço 1	Pedaço 2	Novo preço	Prejuízo
1 grama	6 gramas	1 + 36 = 37	49 – 37 = 12
2 gramas	5 gramas	4 + 25 = 29	49 – 29 = 20
3 gramas	4 gramas	9 + 16 = 25	49 – 25 = 24

A partir daí, se a análise continuar se concentrando em números inteiros, então, a tabela começará a repetir os valores de prejuízo. Isso pode fazer com que o aluno perceba uma tendência, que é: o prejuízo aumenta à medida que as massas dos dois pedaços se aproximam. Como a massa não necessariamente é um número inteiro, o equilíbrio total se dará quando cada novo pedaço tiver 3,5 gramas.

Pedaço 1	Pedaço 2	Novo preço	Prejuízo
3,5 grama	3,5 gramas	12,25 + 12,25 = 24,50	49 – 24,50 = **24,50**

Estratégias como essas devem ser valorizadas e é recomendável que o professor mostre sua relação com a abordagem usual, seu alcance e suas limitações.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) R$ 20,00.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente utiliza um único par de valores para os novos pedaço de pedra, tais como 2 e 5 gramas, de fato, o prejuízo é de 20 reais. Não percebe que as massas dos dois pedaços de pedra são desconhecidos e, portanto, deve analisar outras possibilidades.
(B) R$ 24,00.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente utiliza a estratégia exposta nos comentários, porém sem se atentar para o fato de que a massa não é uma grandeza discreta, de modo que não se pode limitar a análise aos inteiros.
(C) R$ 24,50.	**Resposta correta. O aluno interpreta corretamente a situação problema, quer a estratégia usual, quer uma estratégia pessoal diferente.**
(D) R$ 29,50.	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente associa o maior valor absoluto indicado nas alternativas com a solicitação do prejuízo máximo.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio– 1ª série, Volume 1
Situação de Aprendizagem 6 – Funções polinomiais de 2º grau.
Situação de Aprendizagem 7 – Máximos e Mínimos.
Situação de Aprendizagem 8 – Situações-problema: Modelos Matemáticos.

2. Novo Telecurso- Ensino Médio- Matemática:
Teleaula 32: máximos e mínimos. (duração 11'46")

Habilidade

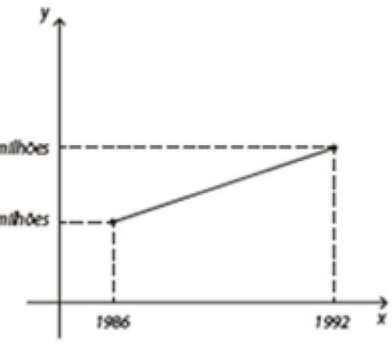
Compreender a construção do gráfico de funções de 1° grau sabendo caracterizar o crescimento, o decrescimento e a taxa de variação.

Questão 7 – Objetiva

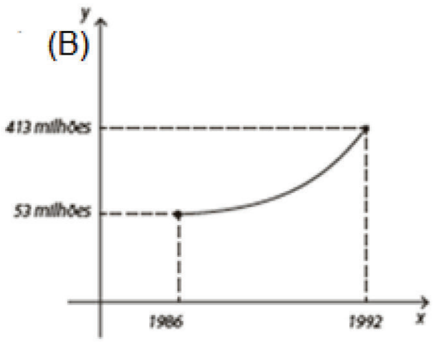
O CD (compact disc) foi inventado em 1979, começou a ser comercializado em 1982 e rapidamente tornou-se muito popular. Para se ter uma ideia, em 1986 o número de vendas chegou a 53 milhões e, a partir daí, foi aumentando cerca de 60 milhões de unidades ao ano até 1992.

O gráfico que melhor representa a venda de CD entre os anos de 1986 e 1992 é

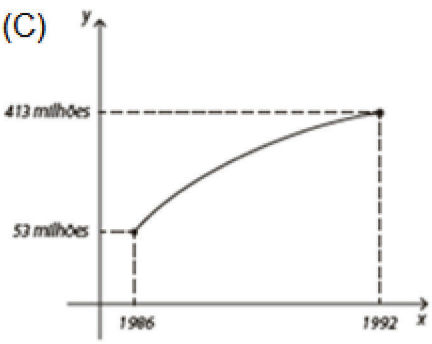
(A)



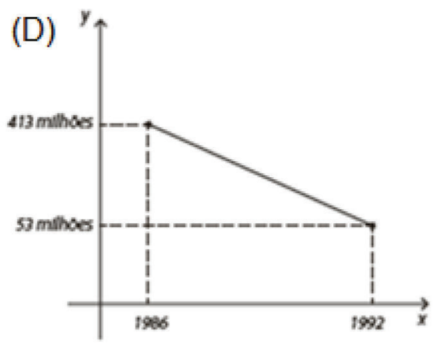
(B)



(C)



(D)



Comentários e Recomendações Pedagógicas

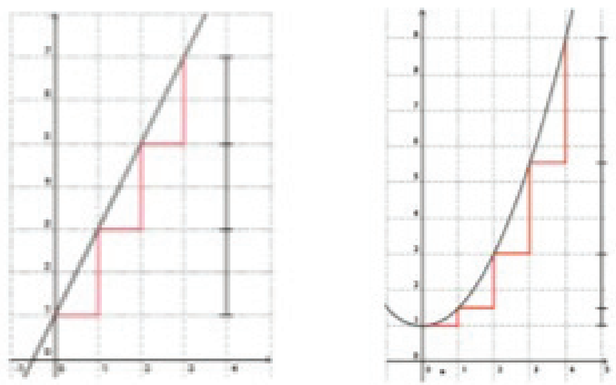
O estudo das funções é um dos assuntos da Matemática que fica mais evidente a necessidade de trabalhar, simultaneamente, com diversos tipos de representação: verbal, numérica, gráfica, algébrica. A verdadeira apreensão do conceito só pode se dar quando ele é cercado por esses diversos tipos de representação.

Uma das mais importantes características de uma função afim é seu crescimento "uniforme". O que caracteriza com exatidão essa propriedade é a taxa média de variação constante:

$$TMV = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = a$$

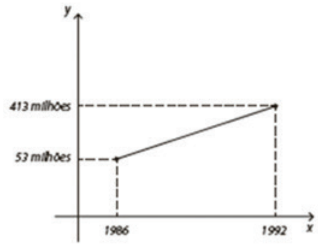
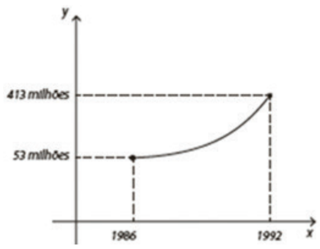
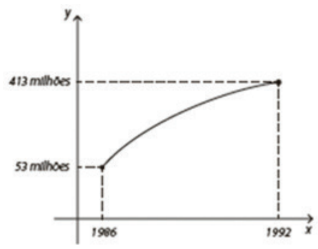
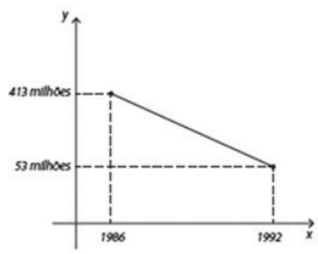
$$TMV = \frac{413 - 53}{1992 - 1986} = 60\text{milhões}$$

Graficamente, isso se expressa por um acréscimo (ou decréscimo) constante em y, a cada unidade que se avança em x. A menos que o gráfico seja uma reta, isso não acontece.



Na situação-problema apresentada, a expressão verbal da taxa média de variação constante é a frase "foi aumentando cerca de 60 milhões de unidades ao ano".

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) 	**Resposta correta. O aluno associou corretamente uma função afim crescente, cujo gráfico é uma reta, à taxa média de variação constante expressa pela frase “foi aumentando cerca de 60 milhões de unidades ao ano”.**
(B) 	**Resposta incorreta:** O aluno compreendeu corretamente o caráter crescente de função que associa o número de vendas de CD ao tempo, expresso em anos. Porém, a informação “foi aumentando cerca de 60 milhões de unidades ao ano” não foi significativa para ele, a ponto de que associasse esse tipo de crescimento a uma função afim expressa graficamente por uma reta.
(C) 	**Resposta incorreta:** Nesta alternativa, pode-se observar o mesmo que na alternativa anterior. Mas ainda há um equívoco adicional de interpretação ao associar os 53 milhões de CD vendidos ao ano de 1982.
(D) 	**Resposta incorreta:** Neste caso, o aluno não identificou o caráter crescente da função que modela a situação proposta ou, se identificou, não sabe qual a expressão gráfica desse crescimento.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

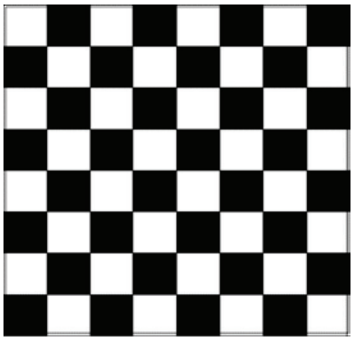
1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série, Volume 1
Situação de Aprendizagem 6 – Funções polinomiais de 1º grau: representação gráfica, proporcionalidade, crescimento e decrescimento.

Habilidade

Conhecer as características principais das progressões geométricas – expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras –, sabendo aplicá-las em diferentes contextos.

Questão 8 – Objetiva

O xadrez é jogado num tabuleiro quadriculado que possui 64 “casas” conforme mostra a figura



Malba Tahan narra a história de um rei que queria presentear seu vizir pelos excelentes serviços prestados. O vizir pediu-lhe que o rei o pagasse com grãos de trigo da seguinte forma: Ele queria receber um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro de xadrez, dois grãos pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta e assim por diante. Sendo assim, até a décima casa o vizir receberia um total de:

(A) 231 grãos.

(B) 512 grãos.

(C) 640 grãos.

(D) 1023 grãos.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

Ao resolver a questão, espera-se que o aluno seja capaz de reconhecer as regularidades numéricas de uma determinada sequência e suas propriedades, em especial com relação à soma dos termos de uma progressão geométrica, sendo capaz de prever resultados para uma dada situação, utilizando a formalização matemática ou outra estratégia qualquer. É importante verificar, através das possibilidades indicadas nas alternativas, o nível de compreensão em que o aluno se encontra realizando intervenções a fim de que ele adquira as habilidades/competências necessárias ao entendimento deste conteúdo.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) 231 grãos	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente registra o oito a cada casa a partir da quarta, de acordo com a consigna do problema, somando todos os grãos de cada casa, dessa forma respondendo incorretamente.
(B) 512 grãos	**Resposta incorreta.** O aluno possivelmente registra o número de grãos que o vizir receberia pela décima casa.
(C) 640 grãos	**Resposta incorreta.** O aluno responde incorretamente, pois possivelmente multiplica o número de casas do tabuleiro pelo número dez, da décima casa como citado no problema.
(D) 1023 grãos	**Resposta correta. O aluno responde corretamente utilizando a equação da soma dos termos de uma P.G. de razão 2 e/ou utiliza outra estratégia, como a de registrar o número de grãos em cada casa do tabuleiro até chegar na décima casa e depois soma tudo ou calcula a quantidade de grãos da 11ª casa (1024) subtraindo o grão correspondente a esta e encontrando 1023 grãos.**

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática - Ensino Médio – 1ª série – Volume 1 – Edição 2014:
Situação de Aprendizagem 1: conjuntos numéricos: regularidades numéricas e geométricas.

Situação de Aprendizagem 2: progressões aritméticas e progressões geométricas.

2. Caderno do Professor: Matemática - 7ªSérie/8ºAno - Ensino Fundamental Volume 1 - Edição 2014:
Situação de Aprendizagem 5: aritmética com álgebra: as letras como números.

Situação de Aprendizagem 8: aritmética e geometria: expressões Algébricas de algumas ideias fundamentais.

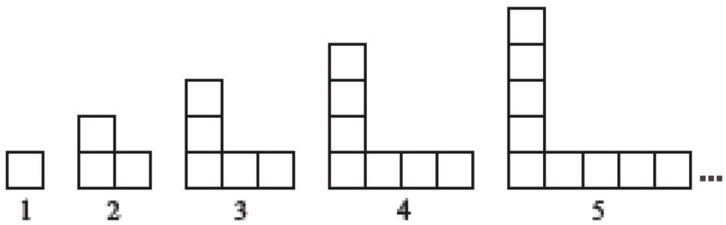
3. Novo Telecurso – Ensino Fundamental - Matemática:
Teleaula 33, 35 e 36

Habilidade

Conhecer as características principais das progressões aritméticas- expressão do termo geral, soma dos n primeiros termos, entre outras sabendo aplicá-las em diferentes contextos.

Questão 9 – Objetiva

Na figura abaixo, cada quadradinho é formado por quatro palitos de comprimentos iguais.



A sequência formada pelas quantidades de palitos necessários para a construção das figuras resulta em uma PA. A alternativa que contempla a fórmula que expressa a quantidade de palitos da figura que ocupa a posição ***n*** nessa sequência é:

(A) $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 6$.

(B) $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 6$.

(C) $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 6$.

(D) $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 6$.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

Destacamos, novamente, a importância de valorizar o raciocínio dos alunos na obtenção do termo geral de uma PA, em detrimento de restringir a resolução dos problemas à utilização das fórmulas obtidas. O professor deverá estar atento e observar quais estratégias de resoluções os alunos estão utilizando a fim de distinguir aqueles que utilizam fórmulas prontas como um mero atalho para a aplicação do conceito que já dominam – e, portanto, podem ser estimulados nesse sentido – daqueles alunos que, sem terem atingido a compreensão desejada buscam adaptar as condições dos problemas às fórmulas, como se eles se questionassem constantemente sobre “qual fórmula devem utilizar”. Casos dessa natureza certamente merecerão maior atenção do professor.

A sequência formada pelas quantidades de palitos é uma PA, pois cada figura tem seis palitos a mais que a precedente: 4, 10, 16, 22, 28, ...

Portanto, a fórmula que expresse a quantidade de palitos da figura que ocupa a posição n nessa sequência é $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 6$.

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 6$.	**Resposta incorreta.** O aluno provavelmente não interpreta corretamente a proposta e anota esta alternativa observando a ordem numérica que aparece nas figuras indicando como sendo a figura 1.
(B) $a_n = 2 + (n - 1) \cdot 6$.	**Resposta incorreta.** O aluno provavelmente observa que cada figura acrescenta dois quadradinhos, logo anota esta alternativa.
(C) $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 6$.	**Resposta incorreta.** O aluno provavelmente não interpreta corretamente a solicitação do problema, indica esta alternativa associada a $a_n = 3$ ao n° 3 indicado na figura.
(D) $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 6$.	**Resposta correta. O aluno interpreta corretamente a proposta do problema identificando a sequência e relacionando-a com a fórmula solicitada.**

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1- Caderno do Professor: Matemática - Ensino Médio – 1ª série – Volume 1 Edição 2014:
Situação de Aprendizagem 1: conjuntos numéricos: regularidades numéricas e geométricas.

Situação de Aprendizagem 2: progressões aritméticas e progressões geométricas.

2. Caderno do Professor: Matemática - 7ªSérie/8ºAno - Ensino Fundamental Volume 1 - Edição 2014:
Situação de Aprendizagem 5: aritmética com álgebra: as letras como números.

Situação de Aprendizagem 8: aritmética e geometria: expressões Algébricas de algumas ideias fundamentais.

Disponível em: http://www.nilsonjosemachado.net/sema20091124.pdf, Acesso em: 19/03/2014

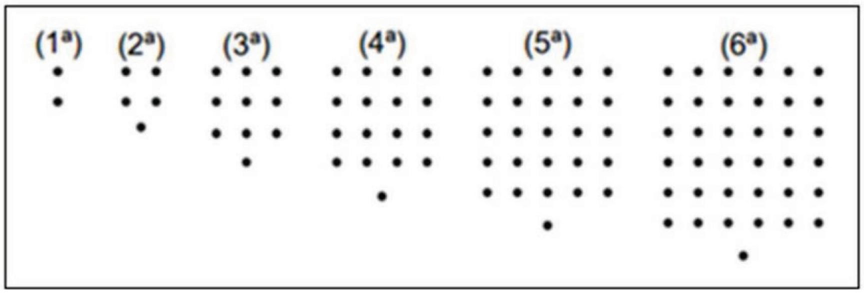
3. Novo Telecurso – Ensino Fundamental - Matemática: Teleaula 33

Habilidade

Reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens expressando-a matematicamente, quando possível.

Questão 10 – Objetiva

As figuras mostradas abaixo estão organizadas dentro de um padrão que se repete. Mantendo essa disposição, qual expressão algébrica representa o número de pontos da figura de ordem n (n = 1, 2,...)?



(Site:http://download.inep.gov.br/educacao_basica/prova_brasil_saeb/menu_do_gestor/exemplos_questoes/M08_Saeb_site_FP.pdf) acesso 19/09/2014 11:59:09

(A) $n + 1$.

(B) $5n + 1$.

(C) $- 2n - 2$.

(D) $n^2 + 1$.

Comentários e Recomendações Pedagógicas

O reconhecimento de regularidades é uma das habilidades mais importantes da matemática e do pensamento humano em geral. É esse reconhecimento que possibilita que façamos generalizações, que possamos categorizar objetos e nomeá-los, etc. Por isso, é desejável que questões de observação de padrões e regularidades sejam trabalhadas sempre que possível.

Para que esse reconhecimento de regularidades aconteça e seja expresso, é necessário dominar e utilizar alguma forma de linguagem. No caso dessa questão, o reconhecimento do padrão e sua expressão algébrica precisam se conjugar para a correta resolução.

Vamos organizar informações por meio de uma tabela para ter um panorama das várias relações que os alunos podem vir a observar na sequência de figuras.

Figura	Quantidade de bolinhas
1	2
2	5
3	10
4	17
5	26
6	37
⋮	⋮
n	n^2+1

Grade de Correção

Alternativa	Observação
(A) $n + 1$	**Resposta incorreta:** É possível que o aluno não tenha compreendido o que foi proposto pela questão.
(B) $5n + 1$	**Resposta incorreta:** Esta alternativa se adéqua perfeitamente à quinta figura da sequência, mas não se ajusta às demais. Eventualmente, tendo percebido essa relação específica, o aluno pode ter se precipitado na generalização.
(C) $-2n - 2$	Resposta incorreta: Esta alternativa pode indicar uma interpretação equivocada do problema proposto, pois a sequência é progressiva.
(D) $n^2 + 1$	**Resposta correta: O aluno percebe o padrão e sabe escrevê-lo algebricamente. Ou, o que também é satisfatório, sabe testar qual das alternativas se encaixa em todas as figuras da sequência.**

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 7ª Série/ 8º Ano, Volume 1
Situação de Aprendizagem 5 – Aritmética com Álgebra: As Letras como números.

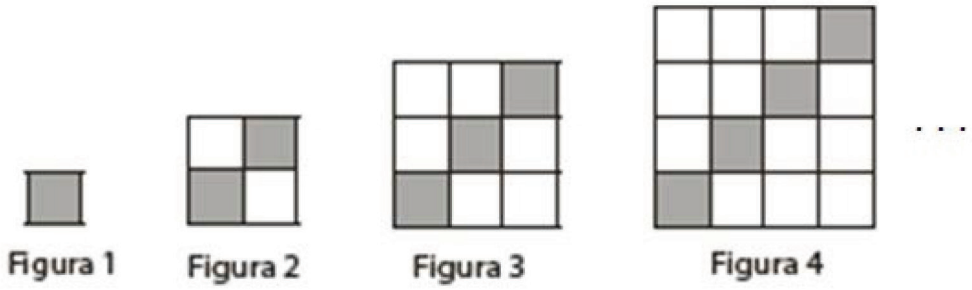
2. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série, Volume 1
Situação de Aprendizagem 1 – Conjuntos numéricos; regularidades numéricas e geométricas

Habilidade

Reconhecer padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens expressando-a matematicamente, quando possível.

Questão 11 – Aberta

Suponha que a sequência de figuras abaixo continue seguindo sempre o mesmo padrão.



De acordo com as figuras apresentadas, determine a expressão que permite o cálculo da quantidade de quadradinhos brancos (b) da enésima figura (Figura ***n***).

Comentários e Recomendações Pedagógicas

O reconhecimento de regularidades é uma das habilidades mais importantes da matemática e do pensamento humano em geral. É esse reconhecimento que possibilita que façamos generalizações, que possamos categorizar objetos e nomeá-los etc. Por isso, é desejável que questões de observação de padrões e regularidades sejam trabalhadas sempre que possível.

Para que esse reconhecimento de regularidades aconteça e seja expressivo, é necessário dominar e utilizar alguma forma de linguagem. No caso dessa questão, o reconhecimento do padrão e sua expressão algébrica precisam se conjugar para a correta resolução.

A sequência só está representada até a quarta figura, mas é natural que se avance mais um pouco para averiguar a compreensão global da regularidade. Esse é um processo não guiado explicitamente pela questão, mas que o professor deve estimular em sala de aula quando trabalhar com questões desse tipo.

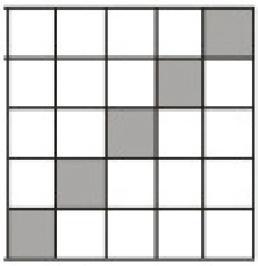


Figura 5

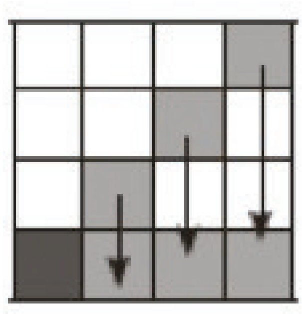
Vamos organizar informações por meio de uma tabela para ter um panorama das várias relações que os alunos podem vir a observar na sequência de figuras.

	posição da figura	quantidade total de quadradinhos	quantidade de quadradinhos cinzas	*b*: quantidade de quadradinhos brancos
Figura 1	1	$1^2 = 1$	1	$1 - 1 = 0$
Figura 2	2	$2^2 = 4$	2	$4 - 2 = 2$
Figura 3	3	$3^2 = 9$	3	$9 - 3 = 6$
Figura 4	4	$4^2 = 16$	4	$16 - 4 = 12$
Figura 5	5	$5^2 = 25$	5	$25 - 5 = 20$
Figura *n*	n	n^2	n	$n^2 - n$

39-AAP-2EM-RPM-2014121-1321.indd 35 12/21/14 1:22 PM

A linha correspondente à figura n, claro, é o objetivo da questão. Mas, para chegar lá, há observações anteriores. Uma primeira constatação é que n, além de indicar a própria posição da figura na sequência, indica também a quantidade de quadradinhos que forma o lado das figuras.

Depois, há que se perceber que a quantidade total de quadradinhos da figura é o lado n ao quadrado. E, por fim, algo que pode ser percebido numérica ou visualmente é que a quantidade de quadradinhos cinzas é igual a n.



A partir daí, é possível concluir que $b = n^2 - n$.

Grade de Correção

Respostas Corretas	**O aluno reconhece o padrão e sabe escrevê-lo algebricamente $b = n^2 - n$**
Respostas parcialmente corretas	O aluno, ao observar a terceira figura, possivelmente identifica a sequência $b = 2n$, mas não se ajusta às demais. Eventualmente, tendo percebido essa relação específica, o aluno pode ter se precipitado na generalização. Expressa b como sendo a quantidade total de quadradinhos da figura e escreve algebricamente que $b = n^2$.
Resposta incorreta	O aluno possivelmente não compreende o que foi proposto pelo problema. Escreve que $b = n$, utiliza b para representar a quantidade de quadradinhos cinzas.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série, Volume 1
Situação de Aprendizagem A – Sequências: padrões e regularidades

Avaliação da Aprendizagem em Processo
Comentários e Recomendações Pedagógicas – Matemática

Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional
Coordenadora: Ione Cristina Ribeiro de Assunção

Departamento de Avaliação Educacional
Diretor: William Massei
Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Aplicação de Avaliações
Diretora: Diana Yatiyo Mizoguchi

Equipe Técnica DAVED participante da AAP
Ademilde Ferreira de Souza, Cristiane Dias Mirasola, Eliezer Pedroso da Rocha, Isabelle Regina de Amorim Mesquita, Juvenal de Gouveia, Patricia de Barros Monteiro, Silvio Santos de Almeida, Soraia Calderoni Statonato

Coordenadoria de Gestão da Educação Básica
Coordenadora: Maria Elizabete da Costa

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão da Educação Básica
Diretor: João Freitas da Silva

Centro do Ensino Fundamental dos Anos Finais, Ensino Médio e Educação Profissional
Diretora: Valéria Tarantello de Georgel

Equipe Curricular CGEB de Matemática
Ivan Castilho, João dos Santos, Otavio Yoshio Yamanaka, Rosana Jorge Monteiro Magni, Sandra Maira Zen Zacarias, Vanderley Aparecido Cornatione

Elaboração do material de Matemática
Equipe Curricular de Matemática CGEB/ CEFAF e PCNP colaboradores: Ana Lucia Nunes Urtado Silva, Anderson Cangane Pinheiro, Carlos Tadeu da Graça Barros,Cibele Zucareli dos Santos, Claudio Galeote Rentas , Daniela Luporini , Dimas Tadeu Celestino dos Santos, Edson Basilio Amorim Filho, Eduardo Granado Garcia, Emerson de Souza Silva, Everaldo José Machado de Lima, Fábio José Paganotti, Fernanda Fornitani Marques, Geverson Ribeiro Machi, Gisley Noemi Barçolobre Manoel, Glaucia Roque Rocha Pio, Graziele Cristina Mantovani Pereira, Juliana Leite Boranelli, Leandro Geronazzo, Lilian Ferolla de Abreu, Lilian Fortuna Clara Fabiani, Luciana Moraes Funada, Maria Dolores Cereijido Bersani, Maria Edite de Camargo Dmitrasinovic, Maria Emilia Pivovar de Azevedo, Maria Helena Silveira, Maria Josélia Silva Bergamo Almeida, Mario José Pagotto, Mariza Antonia Machado de Lima, Mary Silvia Leme Starnini, Meiriele Cristina Calvo, Osvaldo Joaquim dos Santos, Paula Cristina de Faria Veronese, Paula Pereira Guanais, Paulo Henrique Lisboa Zioli, Renata Leandro Terrengue, Renata Serrano Rodrigues Shiratsu, Rita de Cássia Toffanelli Prates, Rodrigo Soares de Sá Roseli Soares Jacomini, Samara Valdo de Oliveira, Samira Camargo Clemente, Sueli Aparecida Gobbo Araujo , Susi Passarete Cardoso , Vitória Raquila Papadopoulos Koki .

Validação, Leitura Crítica

Professores Coordenadores dos Núcleos Pedagógicos das Diretorias de Ensino: Antonia Zumira da Silva, Claudia Xavier da Silva Cavalcante, Cleonice da Silva Menegatto, Cristina Aparecida da Silva, Edson Basilio Amorim Filho, Givanildo Farias da Silva, Lucio Mauro Carnaúba, Marcia Cristine Ayaco Yassuhara Kagaochi, Maria Denes Tavares das Silva, Paula Pereira Guanais, Rebeca Meirelles das Chagas Plibersek, Rosemeire Lepinski, Sandra Regina Soares Clemente, Sérgio Antunes.

Leitura Crítica e Revisão

Equipe Curricular de Matemática – CGEB

Ivan Castilho, João dos Santos, Otavio Yoshio Yamanaka, Rosana Jorge Monteiro Magni, Sandra Maira Zen Zacarias, Vanderley Aparecido Cornatione