GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

Caderno do Professor

3ª série do Ensino Médio

MATEMÁTICA

São Paulo
Agosto de 2015
9ª edição

Gabarito - 3ª Série E.M.				
QUESTÃO	A	B	C	D
01			■	
02			■	
03			■	
04				■
05	■			
06		■		
07		■		
08		■		
09			■	
10	■			
11	■			
12		■		
13			■	
14				■
15	■			
16	■			
17			■	
18		■		
19	■			
20	■			
21		■		
22		■		
23				■
24	■			

Questões Comentadas – Ensino Médio		
Série/Ano	Habilidade	Questão
1ª Série	Identificar a ideia de proporcionalidade direta ou indireta, como relação de interdependência expressando-as por meio de funções.	01
	Identificar e representar graficamente uma função como expressão de uma proporcionalidade direta entre grandezas.	08
2ª Série	Identificar e representar graficamente uma função como expressão de uma proporcionalidade direta entre grandezas.	08
	Resolver sistemas lineares, interpretando os resultados de acordo com o contexto fornecido pela situação-problema.	13
3ª Série	Identificar as raízes de equação algébrica mesmo sem resolvê-la, com base no conhecimento de seus coeficientes.	11
	Expressar o significado dos números complexos por meio do plano de Argand-Gauss.	19

Matriz de Referência para Avaliação de Matemática – 2º Bimestre.

3ª Série – Ensino Médio

Questões	Descrição da habilidade
01 a 06	Relacionar a escrita natural à escrita algébrica referente aos coeficientes e raízes de uma equação algébrica na resolução de problemas.
07 a 12	Identificar as raízes de equação algébrica mesmo sem resolvê-la, com base no conhecimento de seus coeficientes.
13 a 16	Utilização de algoritmos da divisão de polinômios para estabelecer as raízes do mesmo.
17 a 20	Expressar o significado dos números complexos por meio do plano de Argand-Gauss.
21 a 24	Resolver operações com números complexos compreendendo seu significado algébrico e geométrico associados a transformações no plano.

Habilidade	*Relacionar a escrita natural à escrita algébrica referente aos coeficientes e raízes de uma equação algébrica na resolução de problemas.*	**Questões**	01 a 06

01- O perímetro de um piso retangular de cerâmica mede 14m e sua área, 12m².

Assinale a alternativa que mostra a equação cujas raízes são as medidas (comprimento e largura) do piso.

(A) $3x^2 + 12x + 21 = 0$

(B) $3x^2 - 12x + 28 = 0$

(C) $\mathbf{x^2 - 7x + 12 = 0}$

(D) $x^2 + 2x + 16 = 0$

02- Um marceneiro quer construir duas caixas, uma com a forma de um cubo de aresta x, outra com a forma de um paralelepípedo com a base retangular, de lados 3 m e 5 m, e de altura igual a altura do cubo. O valor de x deve ser escolhido de tal forma que o volume do cubo seja 4 m^3 maior que o volume do paralelepípedo.

(A) $x^3 - 15x - 4 = 0$

(B) $x^3 - 60x = 0$

(C) $\mathbf{x^3 + 4x = 0}$

(D) $x^3 + 4 = 0$

03- Dada a equação do 3º grau: $x^3 + 15x^2 + 11x + 7 = 0$, substituindo a incógnita x por y − 5, ou seja, x = y − 5, obtém-se a seguinte equação equivalente:

(A) $y^3 - 189y + 202 = 0$

(B) $y^3 + 86y - 35 = 0$

(C) $y^3 - 64y + 202 = 0$

(D) $16y^2 + 16y - 5 = 0$

04- Se você multiplicar um número real x por ele mesmo e do resultado subtrair 12, você vai obter o quádruplo do número x. Qual é esse número?

(A) x = 7 ou − 12.

(B) x = 4 ou − 12.

(C) x = 12 ou − 12.

(D) **x = 6 ou − 2.**

05- Uma loja de peixes ornamentais utiliza dois tanques para armazenar água. Os níveis de água, A_1 e A_2, em cada tanque, são dados pelas expressões:

$A_1(t) = 150t^2 - 190t + 30$ e $A_2(t) = 50t^2 + 35t + 30$, sendo t o tempo.

Os dois tanques possuem inicialmente o mesmo nível, no instante t=0.

O instante em que os níveis dos aquários serão equivalentes é

(A) 2h 15 min.

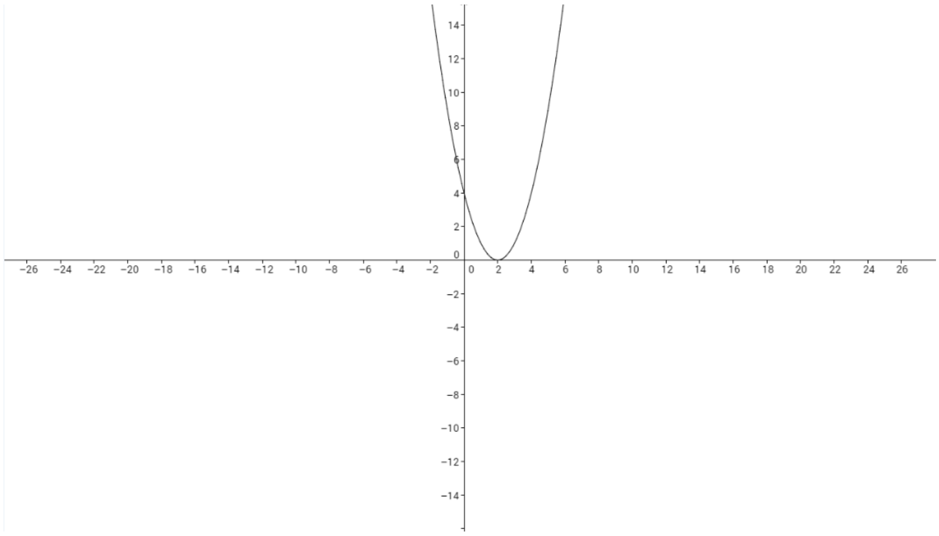
(B) 2h 25 min.

(C) 2h.

(D) 30 min.

06-

Considere a equação $x^2 + ax + b = 0$. Sabendo que ela possui um único valor para suas raízes, conforme o gráfico indicado abaixo



Na equação descrita anteriormente, os valores de a e b serão respectivamente

(A) 1 e 7

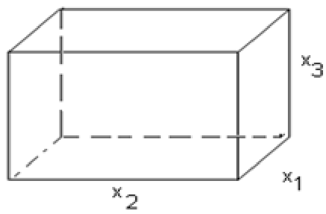
(B) 1 e 4

(C) − 2 e − 2

(D) − 4 e −1

Habilidade	*Identificar as raízes de equação algébrica mesmo sem resolvê-la, com base no conhecimento de seus coeficientes.*	**Questões**	07 a 12

07- As três dimensões x_1, x_2, x_3 de um paralelepípedo reto retângulo são numericamente iguais às raízes da equação algébrica $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$, então o volume desse paralelepípedo mede:



Lembre-se que:

Para uma equação da forma:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$

sendo x_1, x_2 *e* x_3 *as raízes, temos:*

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

(A) 7.

(B) 8.

(C) 14.

(D) 32.

08-

Uma equação do 3º grau tem como raízes os números 2, 3 e -1.

Uma expressão possível para esta equação é:

(A) $(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x-1)=0$

(B) $\mathbf{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x+1)=0}$

(C) $(x-2)\cdot(x+3)\cdot(x-1)=0$

(D) $(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+1)=0$

09- Sabe-se que uma equação de 3º grau $x^3 + bx^2 + cx + d=0$, pode ser escrita na forma $x^3+\frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$ e também que, se essa equação tem como raízes, r_1, r_2, r_3, ela pode ser fatorada e escrita na forma:

(A) $(x + r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x + r_3) = 0$

(B) $(x + r_1) \cdot (x + r_2) \cdot (x + r_3) = 0$

(C) $\mathbf{(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) = 0}$

(D) $(x + r_1) \cdot (x - r_2) = 0$

10-

Considere a equação: $3x^4-12x^3+kx^2-6x+3=0$. As possíveis raízes inteiras da equação são

(A) 1 ou – 1.

(B) -1

(C) 3,6 e 12.

(D) 0, -6, 3 e 12.

11-

Sabe-se que a soma das raízes de uma equação do tipo $ax^2 + bx + c=0$ é dada por $r_1+r_2=-\frac{b}{a}$, e o produto por $r_1 \cdot r_2=\frac{c}{a}$.

Seja a equação $x^2+6x+8=0$, a soma e o produto de suas raízes são respectivamente.

(A) **−6 e 8.**

(B) 6 e −8.

(C) 14 e 48.

(D) −1 e 6.

Comentários

A questão que se apresenta, tem o objetivo de investigar uma outra forma de obtenção de raízes algébricas de equações, neste caso uma equação do segundo grau, porem o algoritmo apresentado no enunciado da questão pode ser estendido para outras equações, portanto a questão aplica a generalização existente entre a relação soma e produto dos termos de uma dada equação, desta forma, encaminha-se nas linhas a seguir um processo de resolução da questão apresentada: $\boldsymbol{x^2+6x+8=0}$

Recomendações Pedagógicas

Outras atividades como essa questão podem ser propostas, mas lembramos que não interessa tanto, nesse caso, a realização de muitos cálculos, quanto, por exemplo, a percepção do fato de que, conhecendo uma raiz da equação, e possível reduzi-la a uma equação mais simples, ou seja, a pesquisa sobre as possíveis raízes inteiras pode resultar na solução da equação. Na Situação de Aprendizagem 7 esse fato será melhor explorado.

Resolução comentada

Da equação $\boldsymbol{x^2+6x+8=0}$, obtem-se:

a=1
b= 6
c=8

Do enunciado da questão tem-se $r_1+r_2=-\frac{b}{a}$, substituído os valores de b e a, temos :

Soma das raízes: $r_1+r_2=-\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{1}}$

Para o produto das raízes $r_1 \cdot r_2=\frac{c}{a}$., substituído os valores de c e a, temos: $r_1 \cdot r_2=\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{1}}$

Logo, a soma e produto das raízes da equação $\mathbf{x^2+6x+8=0}$, são respectivamente -6 e 8.

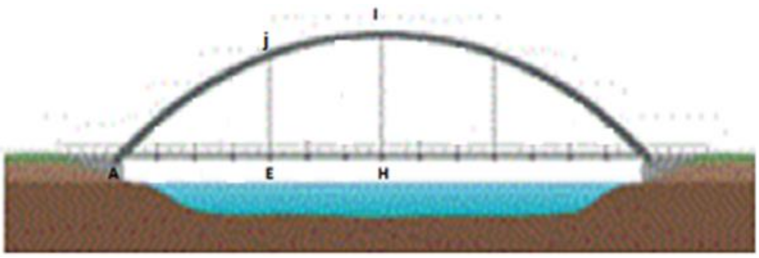
Grade de Correção

Alternativa		Observação
(A)	**-6 e 8**	**Resposta correta.** O aluno compreendeu os aspectos teóricos Apresentados no enunciado e utilizou os coeficientes a, b e c corretamente.
(B)	6 e -8	**Resposta incorreta.** Ao indicar esta alternativa, o aluno indica a soma das raízes como 6 e o produto com -8 invertendo o sinal nos algoritmos de soma e produto.
(C)	14 e 48	**Resposta incorreta.** Ao indicar esta alternativa, o aluno indica a soma das raízes como sendo (6+8) e o produto como sendo (8x6). Não compreendendo assim, o algoritmo apresentado no enunciado do problema.
(D)	-1 e 6	**Resposta incorreta.** Ao indicar esta alternativa, o aluno indica a soma das raízes como sendo o coeficiente **a** da equação e o produto como sendo o coeficiente **b** da equação. Mostrando, assim, não compreender o algoritmo apresentado no enunciado do problema.

Material de apoio pedagógico
O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:
1 - Caderno do Professor: Matemática – 3ª serie – Ensino Médio – Volume 1,Edicao 2014:- Situação de Aprendizagem 6: Das fórmulas à análise qualitativa: relações entre coeficientes e raízes.
3- Plataforma Currículo+ (SEE-SP) disponível em: www.curriculomais.educacao.sp.gov.br
4- Documentos pedagógicos oficiais da SEE-SP disponíveis na Biblioteca da Intranet – Espaço do Servidor CGEB:
http://www.intranet.educacao.sp.gov.br/portal/site/Intranet/biblioteca_CGEB/
CIMA:
http://www.intranet.educacao.sp.gov.br/portal/site/Intranet/biblioteca_CIMA/

12-

A figura a seguir ilustra uma ponte suspensa por estruturas metálicas em forma de arco de parábola.



Fonte:http://grupo2metalica.no.comunidad 1

Os pontos A, E, e H estão no mesmo nível da estrada e a distância entre quaisquer dois consecutivos é 25m. Sabendo-se que os elementos de sustentação são todos perpendiculares ao plano da estrada e que a altura do elemento central HI é 20m, a altura de EJ é:

(A) 10m.
(B) 15m.
(C) 25m.
(D) 45m.

Habilidade	*Utilização de algoritmos da divisão de polinômios para estabelecer as raízes do mesmo.*	**Questões**	13 a 16

13- Dado o polinômio $x^3 - x^2 - 14x + 24$ uma das raízes deste polinômio e o seu quociente são:

(A) 1 e $x^2 - 14x + 10$

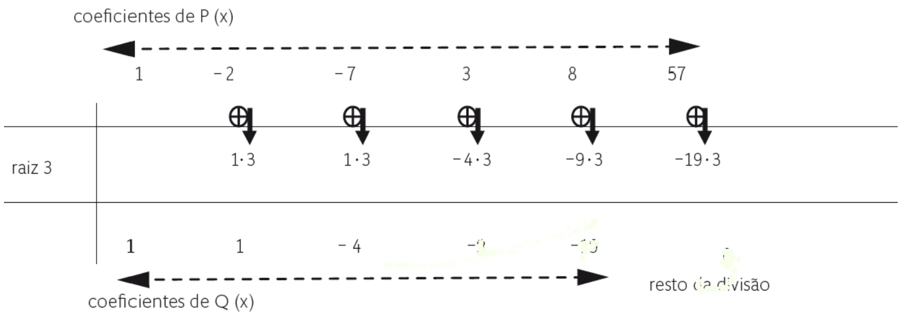
(B) -2 e $x^2 - 4x - 8$

(C) 3 e $x^2 + 2x - 8$

(D) -5 e $x^2 - 6x + 16$

14- Juju, Macula e Ana tinham como trabalho de grupo resolver algumas equações por meio do algoritmo de Briot-Ruffini, porém no dia marcado para resolverem a lista de exercícios, Juju e Macula não puderam estar presentes na casa de Ana e acertaram que cada uma resolvesse os exercícios e enviariam através de e-mail os exercícios, para que Ana providenciasse a escrita final.

Porém ao receber a lista, um exercício foi enviado apenas com a seguinte resolução:



Utilizando as explicações do Professor sobre o Método de Briot - Ruffini, Ana concluiu que o quociente do polinômio é

(A) $Q_x = x^4 + x^3 - 4x^2 - 27x - 19$

(B) $Q_x = x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x - 3$

(C) $Q_x = x^4 + x^3 - 4x^2 - 27x - 3$

(D) $Q_x = x^4 + x^3 - 4x^2 - 9x - 19$

15- O resto da divisão de um polinômio P(x) por (x + 1) é 7 e o resto da divisão de P(x) por (x − 2) é 3. Determine o resto da divisão de P(x) por (x + 1) (x − 2).

(A) $\mathbf{R_{(x)} = -\frac{4}{3}x + \frac{17}{3}}$

(B) $R_{(x)} = \frac{4}{3}x - \frac{17}{3}$

(C) $R_{(x)} = -\frac{3}{4}x + \frac{17}{3}$

(D) $R_{(x)} = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{17}$

16- 

A colheita diária de cachos de bananas por um operário em uma lavoura mecanizada (utiliza além de ganchos e cabos de aço, uma carreta para transporte dos cachos até a área de corte) como mostrado na imagem, é dada por: $P_{(x)}=6x+7x^2-x^3$ unidades, x horas após as 8 horas da manhã, quando começa seu turno.

Qual a produção desse operário durante a quarta hora de trabalho na lavoura de bananas.

(A) 18 cachos de bananas.

(B) 32 cachos de bananas.

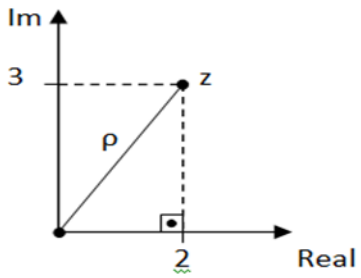
(C) 54 cachos de bananas.

(D) 72 cachos de bananas.

Habilidade	*Expressar o significado dos números complexos por meio do plano de Argand-Gauss.*	Questões	17 a 20

17-

Algebricamente um Número Complexo "z" é dado por "z = a + bi", sendo "a" a parte real desse número e "b" a parte imaginária. Dado o Número Complexo z = 2 + 3i representado no plano ao lado



Podemos dizer que o valor do módulo "ρ" desse número complexo é

(A) 2i
(B) 2 + 3i
(C) $\sqrt{13}$
(D) $\sqrt{a+bi}$

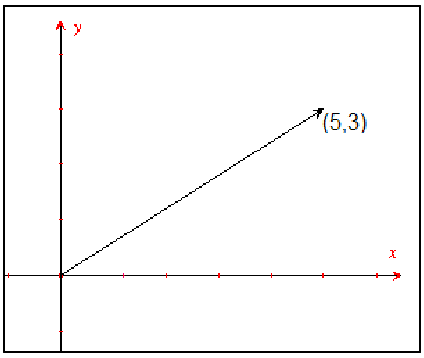
18- Os números complexos 2+3i, 4-3i, -4+3i e -2-3i, quando representados graficamente, formam um

(A) Retângulo.
(B) Paralelogramo.
(C) Quadrado.
(D) Losango.

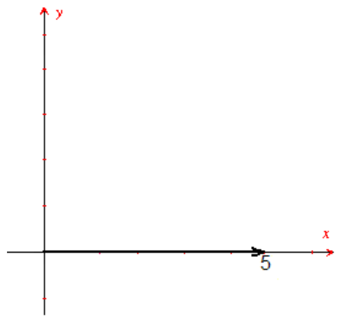
19-

Dados os números complexos: $z_1 = 3$ e $z_2 = 2+3i$ o número $z_1 + z_2$ pode ser representado no plano de Argand-Gauss pelo vetor representado em:

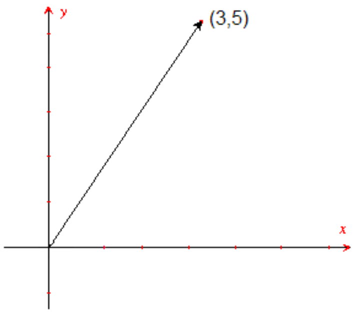
(A)



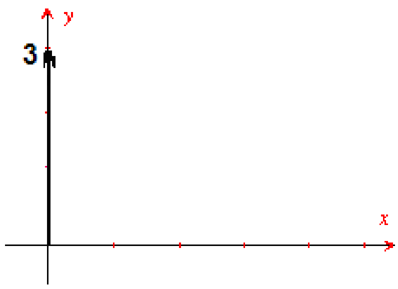
(C)



(B)



(D)



Comentários

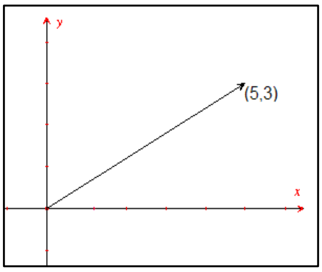
No caso especifico dessa questão, o objetivo central é investigar a compreensão do aluno no que tange a representação dos os números complexos, explorando por meio de sua representação como pontos do plano, com ênfase nas transformações associadas às operações, principalmente o reconhecimento pelo aluno da parte real e imaginaria.

Recomendações Pedagógicas

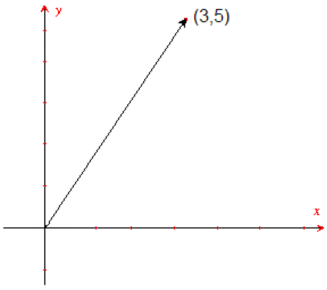
Essa questão não vislumbra “aplicações práticas” diretas, porem, serve de apoio a outros temas próprios da matemática, comportando-se como um tema de ligação entre o que podemos chamar de tema de “apoio” e propriamente a aplicação, tema “apoiado” ambos, requerem estudo e compreensão. Os números complexos e as operações sobre eles futuramente podem ser mais bem explorados com aplicações práticas (em movimentos de translação, de rotação, de ampliação e etc). Tais “aplicações práticas” poderão ser apreciadas pelos alunos, em leituras futuras, ou em trabalhos complementares.

Grade de Correção

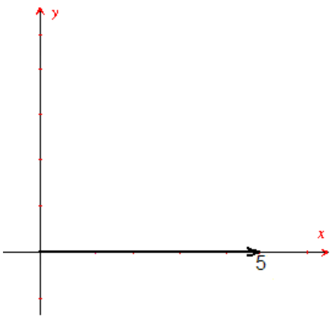
<table>
<tr><th colspan="2">Alternativa</th><th>Observação</th></tr>
<tr><td>(A)</td><td>



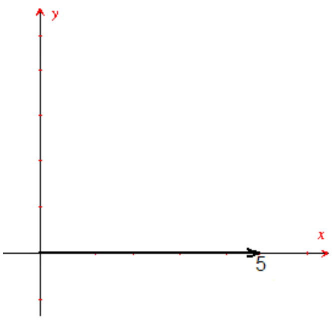
</td><td>Resposta correta. O aluno compreendeu os aspectos teóricos apresentados no enunciado e indicou corretamente o vetor que representa a operação $z_1 + z_2$</td></tr>
<tr><td>(B)</td><td>



</td><td>Resposta incorreta. O aluno pode não compreender a composição de um numero complexo (parte real e imaginaria) e soma 3 parte real de z_1 com 2 parte real de z_2 colocando o resultado como ordenada e, repete o 3 como abscissa.</td></tr>
<tr><td>(C)</td><td>



</td><td>Resposta incorreta. O aluno pode não compreender a composição de um numero complexo (parte real e imaginaria) e soma 3 parte real de z_1 com 2 parte real de z_2 colocando o resultado como abscissa, que é correto, porem, não considera a parte imaginaria e, atribui a ordenada o zero.</td></tr>
<tr><td>(D)</td><td>

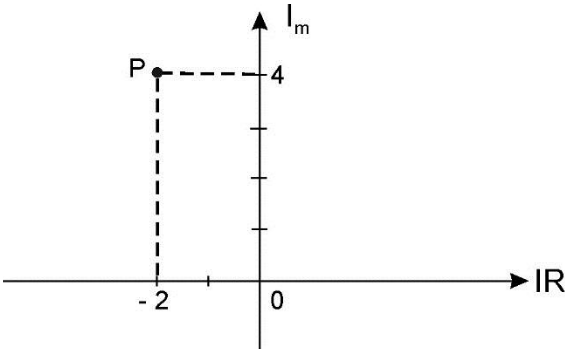


</td><td>Resposta incorreta. O aluno pode não compreender a composição de um numero complexo (parte real e imaginaria), segue o mesmo raciocínio da alternativa anterior (d) invertendo e, atribuindo a abscissa o zero.</td></tr>
</table>

Material de apoio pedagógico
O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:
1 - Caderno do Professor: Matemática – 3ª serie – Ensino Médio – Volume 1,Edicao 2014:- Situação de Aprendizagem 8: - Números Complexos: Representação no plano e significado das operações (translações, rotações, ampliações.)
3- Plataforma Currículo+ (SEE-SP) disponível em: www.curriculomais.educacao.sp.gov.br
4- Documentos pedagógicos oficiais da SEE-SP disponíveis na Biblioteca da Intranet – Espaço do Servidor **CGEB:**
http://www.intranet.educacao.sp.gov.br/portal/site/Intranet/biblioteca_CGEB/
CIMA:
http://www.intranet.educacao.sp.gov.br/portal/site/Intranet/biblioteca_CIMA/

20-

Considere o ponto P no plano de Argand-Gauss.



O ponto P da figura é o afixo do número complexo Z, resultado da operação

(A) (3+2i) − (5−2i)

(B) (3+2i) · (5−2i)

(C) (3+2i) : (5−2i)

(D) (3+2i) + (5−2i)

Habilidade	*Resolver operações com números complexos compreendendo seu significado algébrico e geométrico associados a transformações no plano.*	**Questões**	21 a 24

21- Dados números complexos: $z_1 = 8 + i$ e $z_2 = -7 - 2i$; o resultado do cálculo de $z_1 \cdot z_2$ é

(A) $-54 + 23i$

(B) $-54 - 23i$

(C) $56 + 25i$

(D) $56 - 25i$

22- O número complexo $z = (m^2 - 5m + 6) + (m^2 - 1)\,i$, será um número imaginário puro para

(A) $m = 0$ ou $m = 1$

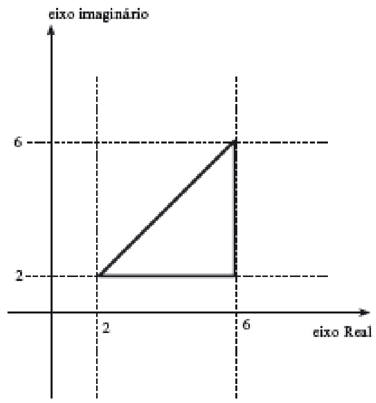
(B) **$m = 2$ ou $m = 3$**

(C) $m = 5$ ou $m = -6$

(D) $m = -1$ ou $m = 1$

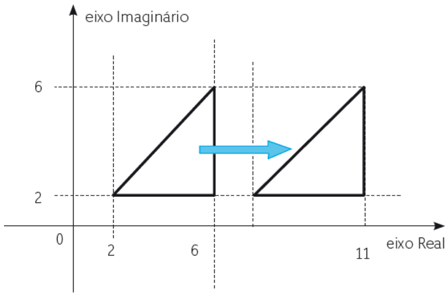
23-

Considere a região do plano complexo indicada na figura a seguir.

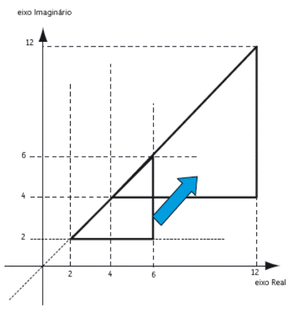


Cada ponto da região é a imagem de um complexo e será objeto de uma transformação de z = 2 + 2i somado a 3i, que será representado graficamente por:

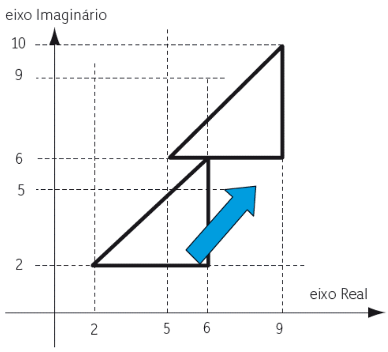
(A)



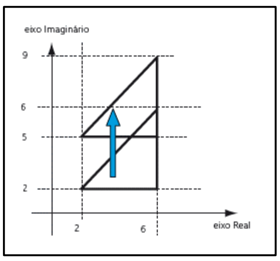
(C)



(B)

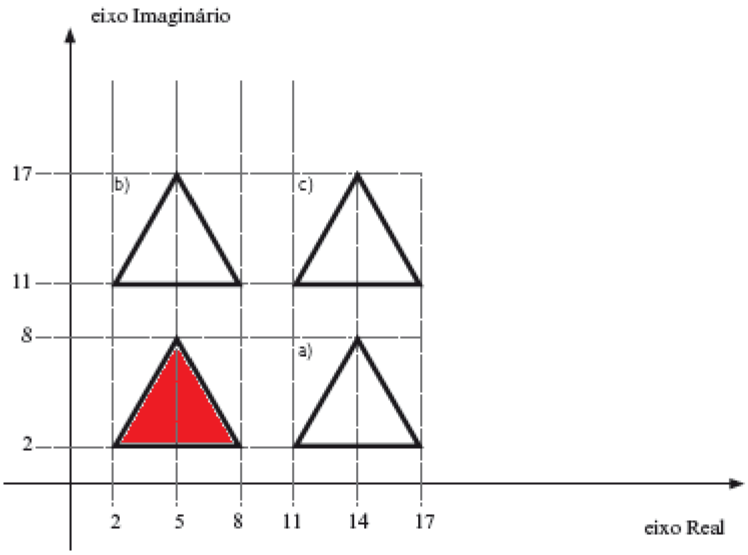


(D)



24-

Considere a região do plano complexo indicada a seguir. Cada ponto da região é a imagem de um complexo e foi objeto de uma transformação da figura pintada em vermelho nas figuras a, b e c



Pode-se afirmar que a representação c) é resultado

(A) da soma com o número complexo 9+9i.

(B) do produto pelo número imaginário 2i.

(C) da soma ao número complexo 9i.

(D) do produto pelo número real 2.

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional

Coordenador: Olavo Nogueira Batista Filho

Departamento de Avaliação Educacional

Diretor: William Massei

Assistente Técnica: Maria Julia Filgueira Ferreira

Centro de Aplicação de Avaliações

Diretora: Cyntia Lemes da Silva

Equipe Técnica DAVED participante da AAP

Ademilde Ferreira de Souza, Cristiane Dias Mirisola, Isabelle Regina de Amorim Mesquita, Juvenal de Gouveia, Patricia Barros Monteiro, Silvio Santos de Almeida, Soraia Calderoni Statonato

Coordenadoria de Gestão da Educação Básica

Coordenadora: Ghisleine Trigo Silveira

Departamento de Desenvolvimento Curricular e de Gestão da Educação Básica

Diretora: Regina Aparecida Resek Santiago

Centro do Ensino Fundamental dos Anos Finais e Ensino Médio - CEFAF

Diretora: Valéria Tarantello de Georgel

Equipe Curricular de Matemática

Djalma de Oliveira Bispo Filho

João dos Santos Vitalino

Otávio Y. Yamanaka

Vanderley Aparecido Cornatione