GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM EM PROCESSO

COMENTÁRIOS E RECOMENDAÇÕES PEDAGÓGICAS

Subsídios para o
Professor de Matemática

3ª série do Ensino Médio

Prova de Matemática

São Paulo
2° Semestre de 2013

5ª Edição

Avaliação da Aprendizagem em Processo

APRESENTAÇÃO

A *Avaliação da Aprendizagem em Processo* é uma ação desenvolvida de modo colaborativo entre a Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional (CIMA) e a Coordenadoria de Gestão da Educação Básica (CGEB), com a contribuição de um grupo de Professores Coordenadores do Núcleo Pedagógico (PCNP) de diferentes Diretorias de Ensino.

Iniciada no segundo semestre de 2011, a aplicação foi voltada para o 6° ano do Ensino Fundamental e a 1ª série do Ensino Médio. No primeiro e segundo semestres de 2012, as provas abrangeram os 6° e 7° anos do EF e as 1ª e 2ª séries do EM. Em 2013, envolve todos os anos finais do Ensino Fundamental e todas as séries do Ensino Médio.

Essa ação, fundamentada no Currículo Oficial da SEE, dialoga com as habilidades contidas nas Matrizes de Referência para a Avaliação (SARESP, SAEB, ENEM) e tem sido bem avaliada pelos educadores da rede estadual paulista. Propõe o acompanhamento da aprendizagem das turmas e do aluno de forma individualizada, por meio de um instrumento de caráter diagnóstico. Objetiva apoiar e subsidiar os professores de Língua Portuguesa e de Matemática, que atuam nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio da Rede Estadual de São Paulo, na elaboração de estratégias para reverter desempenhos insatisfatórios, inclusive em processos de recuperação.

Além da formulação dos instrumentos de avaliação – na forma de cadernos de provas para os alunos , também foram elaborados documentos específicos de orientação para os professores – Comentários e Recomendações Pedagógicas – contendo o quadro de habilidades, gabaritos, itens, interpretação pedagógica das alternativas, sugestões de atividades subsequentes às análises dos resultados e orientação para aplicação e correção das Produções Textuais. Espera-se que, agregados aos registros que o professor já possui, sejam instrumentos para a definição de pautas individuais e coletivas que, organizadas em um plano de ação, mobilizem procedimentos, atitudes e conceitos necessários para as atividades de sala de aula, sobretudo, aquelas relacionadas aos processos de recuperação da aprendizagem.

Coordenadoria de
Informação, Monitoramento
e Avaliação Educacional

Coordenadoria de Gestão
da Educação Básica

Critérios e composição das Provas de Matemática

As provas dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio foram elaboradas de forma a tornar possível a comparação da progressão do aluno entre o 1º e o 2º semestre desse ano.

Entendemos que as questões apresentadas podem retratar uma parte significativa do que foi previsto no conteúdo curricular de Matemática e poderão permitir a verificação de algumas habilidades que foram ou não desenvolvidas no processo de ensino e aprendizagem.

Composição:

1. Anos/séries participantes:
   Anos finais do Ensino Fundamental;
   Todas as séries do Ensino Médio.

2. Composição das provas de Matemática:
   Todas as provas possuem 10 questões.
   As provas do Ensino Fundamental possuem 7 questões fechadas e 3 abertas, no Ensino Médio são 8 questões fechadas e 2 abertas.

3. Matrizes de referência (habilidades/descritores) para a constituição de itens das provas objetivas:

   - SARESP;
   - SAEB;
   - ENEM

4. Banco de itens:

   - itens constantes de provas já aplicadas (Saresp, Saeb e Enem) que se refiram a habilidades contempladas no Currículo oficial;
   - itens selecionados a partir da avaliação da rede, após aplicação das provas da Avaliação em Processo;
   - itens adaptados/modificados a partir da avaliação da rede, após aplicação das provas da Avaliação em Processo.

Equipe de Matemática

MATRIZ DE REFERÊNCIA PARA A AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DE MATEMÁTICA

3ª SÉRIE - ENSINO MÉDIO

Nº do item	Habilidades
1	Identificar os gráficos de funções polinomiais de 1º e 2º graus, conhecidos os seus coeficientes e vice-versa
2	Reconhecer círculo/circunferência, seus elementos e algumas de suas relações
3	Resolver problemas envolvendo as relações métricas fundamentais em triângulos retângulos
4	Resolver problemas que envolvam equações do 1º grau
5	Resolver problemas que envolvam equações do 2º grau
6	Resolver problemas em diferentes contextos, envolvendo as relações métricas dos triângulos retângulos (Teorema de Pitágoras)
7	Realizar operações simples com polinômios
8	Resolver problemas que envolvam porcentagem em situações relacionadas à análise e a interpretação de diferentes índices estatísticos
9	Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente)
10	Resolver situações-problema por intermédio de sistemas lineares até a 3ª ordem

RPM-3EM-AAP-20130516-1712.indd 4 16/05/2013 17:13:14

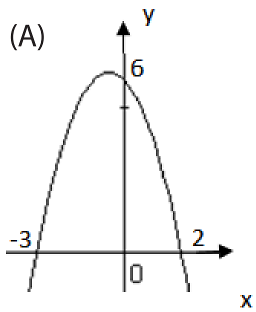
Habilidade:

Identificar os gráficos de funções polinomiais de 1º e 2º graus, conhecidos os seus coeficientes e vice-versa.

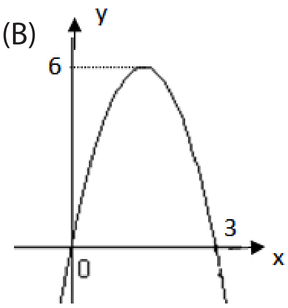
Questão 01

O gráfico que representa a função $y = -x^2 + x + 6$ é:

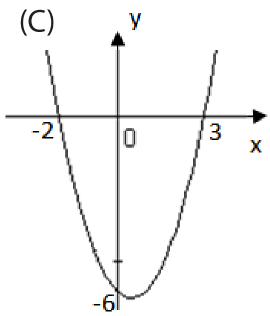
(A)



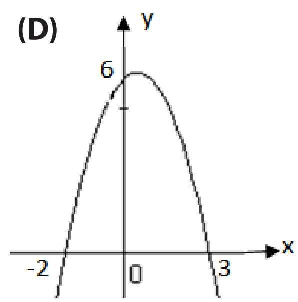
(B)



(C)



(D)



Comentários e recomendações pedagógicas

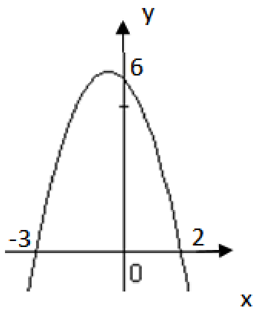
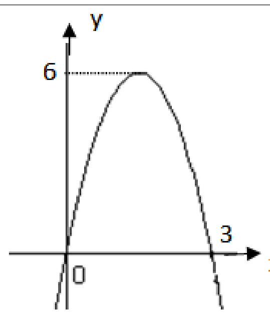
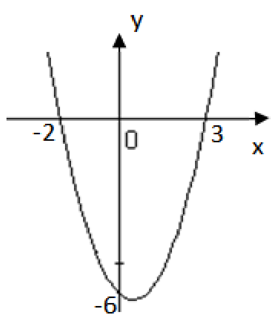
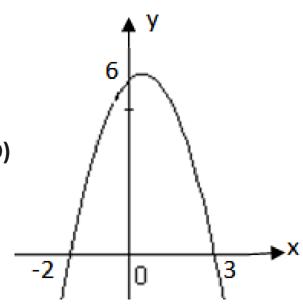
Nesta questão, a partir da leitura do gráfico é possível identificar as características da função, como por exemplo, concavidade, interseção com Oy, raízes, etc.

No Currículo do 9º ano do Ensino Fundamental (Volume 2), a função polinomial do 2º grau é apresentada como a representação de uma proporcionalidade direta entre uma grandeza e o quadrado de outra. É possível também que os alunos já tenham tido um contato inicial com tal função, ao estudarem as equações de 2º grau.

Na 1ª série do Ensino Médio (Volume 2) foram sistematizados os fatos fundamentais relativos a funções polinomiais de 2º grau (gráficos, simetria, interseção com os eixos, coordenadas do vértice, estudo de sinais), além do que, no final da unidade, há diversos problemas envolvendo funções polinomiais de 2º grau, incluindo situações de otimização (máximos e mínimos).

Posteriormente, na 3ª série do Ensino Médio (Volume 3), é realizado uma revisão das principais características das funções, incluindo a função polinomial de 2º grau, onde também é proposto o estudo das variações e das taxas de variação.

Grade de correção:

Alternativas	Justificativas
(A) 	Resposta incorreta. O aluno, possivelmente, percebe que o gráfico deve ter concavidade para baixo e que deve interceptar o eixo y no ponto de ordenada 6, mas inverte os sinais das raízes.
(B) 	Resposta incorreta. O aluno, possivelmente, reconhece que uma das raízes da função é 3, mas confunde a propriedade do termo independente (corte no eixo y) com a ordenada do vértice.
(C) 	Resposta incorreta. O aluno, possivelmente, identifica corretamente as raízes da função, mas não percebe que sua concavidade deve ser voltada para baixo.
(D) 	**Resposta correta**. O aluno identifica corretamente ao gráfico da função polinomial do 2º grau por meio das informações fornecidas pelos coeficientes (concavidade, interseção com os eixos, coordenadas do vértice, raízes da função e as relações entre elas).

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 8ª série/9º ano – Volume 2
   - Situação de Aprendizagem 4 – Representação gráfica de grandezas proporcionais e de algumas não proporcionais.
2. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série – Volume 2
   - Situação de Aprendizagem 3 – Função de 2º grau: significado, gráficos, intersecções com os eixos, vértices, sinais
   - Situação de Aprendizagem 4 – Problemas envolvendo funções de 2º grau em múltiplos contextos; problemas de máximos e mínimos
3. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 3ª série – Volume 3
4. Revista do Professor São Paulo Faz Escola – Recuperação – 1ª e 2ª séries EM
   - Aulas 12 e 13 – Identificando gráficos de funções quadráticas e Identificar uma função quadrática em função de seu gráfico (p.43)
5. Novo Telecurso –Ensino Médio- DVD 4
   - Aula 31 – A função do 2º grau
   - Aula 32 – Máximos e mínimos

Habilidade:

Reconhecer círculo/circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.

Questão 02

Uma piscina foi construída com a forma de um círculo com 30 m de raio. Um nadador que partir de um ponto na borda dessa piscina e nadar em linha reta até outro ponto da borda nadará no máximo a distância de

(A) 30 m.

(B) 60 m.

(C) 94 m.

(D) 188 m.

Comentários e recomendações pedagógicas

Na Situação de Aprendizagem 2 (Volume 4) do 9º ano do Ensino Fundamental há diversas situações, envolvendo atividades de medida de objetos circulares, demonstrações, aproximação do valor de e problemas relacionados ao cálculo de áreas e perímetro de figuras circulares. Temos, dessa forma, que essas situações propiciam um cenário perfeito para investigação dos elementos de uma circunferência/círculo, tais como: lugar geométrico de uma circunferência ou de um círculo, o raio, o diâmetro, a corda, condições para que um ponto pertença à circunferência, distância de dois pontos pertencentes à circunferência (passando pelo centro ou não), entre outros.

Grade de correção:

Alternativas	Justificativas
(A) 30 m	Resposta incorreta. O aluno assume como resposta o valor do raio da circunferência, possivelmente confundindo os conceitos de raio e diâmetro.
(B) 60 m	**Resposta correta**. O aluno reconhece que o diâmetro é a maior corda possível para uma circunferência
(C) 94 m	Resposta incorreta. O aluno, possivelmente, calcula a medida do comprimento da semicircunferência, ou simplesmente multiplica o valor do raio por π, aproximando o resultado.
(D) 188 m	Resposta incorreta. O aluno, possivelmente, calcula a medida do comprimento da circunferência aproximando o resultado, sugerindo não ter compreendido a proposta do exercício.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

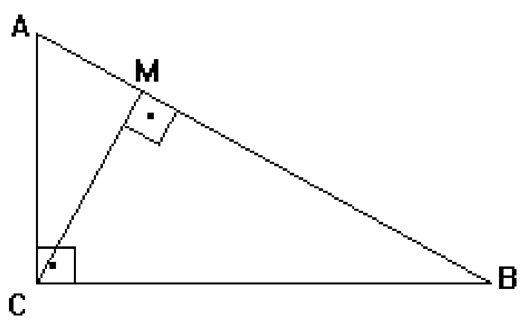
1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 8ª série/9º ano – Volume 4
   - Situação de Aprendizagem 2 – A razão no cálculo do perímetro e da área do círculo
2. Experiências Matemáticas – 6ª série
   - Atividade 02 – Circunferência e ângulos (p.27)
3. Novo Telecurso –– Ensino Fundamental- DVD 5
   - Aula 44 – O círculo e o número

Habilidade:

Resolver problemas envolvendo as relações métricas fundamentais em triângulos retângulos.

Questão 03

Na figura a seguir, o triângulo ABC é retângulo em C. João observou que, para percorrer a distância $\overline{AM}$ teria que dar 4 passos e para percorrer a distância $\overline{AB}$ seriam necessários 20 passos.



Assumindo que a distância percorrida por João em cada passo é sempre a mesma, pode-se dizer que, para ele executar o menor percurso de B até C passando pelo ponto M é necessário que ele dê

(A) 8 passos.

(B) 16 passos.

(C) 24 passos.

(D) 28 passos.

Comentários e recomendações pedagógicas

O conhecimento requerido nessa questão são as relações métricas fundamentais em triângulos retângulos, mais especificamente a relação da altura em função das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, no triângulo ABC dada por $h^2 = m \cdot n$.

O estudo das propriedades associadas a triângulos retângulos são iniciadas no Ensino Fundamental sendo que no 9º ano há um aprofundamento a partir do reconhecimento da semelhança entre dois triângulos.

As relações métricas conhecidas entre as medidas de elementos lineares de triângulos retângulos podem ser obtidas a partir de várias vertentes. A semelhança de triângulos retângulos e a decomposição das figuras envolvidas são duas possibilidades exploradas no caderno do aluno 9º ano EF.

Grade de correção:

Alternativas	Justificativas
(A) 8	Resposta incorreta. Possivelmente, o aluno aplica corretamente a relação métrica $h^2 = m \cdot n$, onde na figura se traduz por $(CM)^2 = (AM) \cdot (BM)$. Assim, $h^2 = 4 \cdot 16 \Rightarrow h = 8$ Mas não conclui a resolução. Deixando de somar esse valor à medida de MB.
(B) 16	Resposta incorreta. O aluno, possivelmente, obtém a medida do segmento MB por 20 – 4 = 16, mas não continua a resolução.
(C) 24	**Resposta correta**. O aluno obtém a medida do segmento MB por 20 – 4 = 16 e aplica corretamente a relação métrica $h^2 = m \cdot n$, onde na figura se traduz por $(CM)^2 = (AM) \cdot (MB)$. Assim, $h^2 = 4 \cdot 16 \Rightarrow h = 8$. Por fim, calcula o comprimento total do percurso fazendo 16 + 8 = 24.
(D) 28	Resposta incorreta. O aluno, possivelmente, obtém a medida do segmento MB por 20 – 4 = 16 e aplica corretamente a relação métrica $h^2 = m \cdot n$, onde na figura se traduz por $(CM)^2 = (AM) \cdot (MB)$. Assim, $h^2 = 4 \cdot 16 \Rightarrow h = 8$. Para obter a medida do percurso, entretanto, faz 20 + 8 = 28, não observando que o problema pede o menor percurso (B - M - C).

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 8ª série/9º ano – Volume 3
   - Situação de Aprendizagem 3 – Relações métricas nos triângulos retângulos; Teorema de Pitágoras

RPM-3EM-AAP-20130516-1712.indd 10 16/05/2013 17:13:15

2. Experiências Matemáticas – 8ª série
   - Atividade 19 – O triângulo retângulo e Pitágoras (p.241)
   - Atividade 20 – As relações métricas nos triângulos retângulos (p.259)
   - Atividade 21 – Problemas (p.285)
3. Novo Telecurso– Ensino Fundamental– DVD 6
   - Aula 54 – O Teorema de Pitágoras

Habilidade:

Resolver problemas que envolvam equações do 1º grau.

Questão 04

Marina dispunha de certa importância em dinheiro e resolveu usá-la para passar alguns dias de suas férias na praia, devendo regressar quando o dinheiro acabasse. Verificou que se gastasse R$ 80,00 por dia poderia permanecer na praia um dia a mais, que se gastasse R$ 90,00. A quantia de que Marina dispunha era

(A) R$ 640,00.

(B) R$ 720,00.

(C) R$ 810,00.

(D) R$ 880,00

Comentários e recomendações pedagógicas

Embora a habilidade requerida no problema seja a resolução de equações do 1º grau, é esperado também que o aluno traduza o problema para a linguagem matemática. A leitura atenta de um problema é o primeiro passo no caminho da transposição para a linguagem algébrica, mas estudos indicam que apenas a boa leitura não é garantia para a transposição correta. Parte significativa do empenho do professor como o parceiro mais experiente do aluno deve ser o de selecionar adequadamente problemas que permitam a maior abrangência de situações passíveis de transposição da linguagem materna para a linguagem algébrica.

Uma forma que o aluno poderia utilizar para resolver a questão é expressar seu gasto de 90 reais por dia como 90 d. Em seguida expressar o gasto de 80 reais por dia, ficando um dia a mais como 80 (d + 1). Igualando então essas expressões ele encontraria a equação que soluciona a questão: $90\,d = 80\,(d + 1)$.

Grade de correção:

Alternativas	Justificativa
(A) R$ 640,00	Resposta incorreta. Provavelmente o aluno monta corretamente a equação e encontra o valor x = 8, mas no momento de calcular a quantia total, faz 80 . 8 = 640.
(B) R$ 720,00	**Resposta correta.** O aluno transpõe corretamente a situação para a linguagem algébrica, obtendo possivelmente, a equação 90 d = 80 (d + 1) e resolve corretamente a equação encontrando o valor 8. Obtém a resposta fazendo 90 . 8 = 720. Ou utilizou outro procedimento que levou à resposta correta.
(C) R$ 810,00	Resposta incorreta. O aluno, provavelmente, monta a equação 90 (d + 1) = 80 d. Resolve-a ignorando o sinal da resposta e encontra o valor x = 9. Obtém como resultado 90 . 9 = 810.
(D) R$ 880,00	Resposta incorreta. Possivelmente o aluno calcula 90 – 80 = 10 faz 10 + 1 = 11 e 80 . 11 = 880, tentando resolver o problema sem montar a equação.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 6ª série/7º ano – Volume 4
    - Situação de Aprendizagem 3 – Equações, Perguntas e Balanças

2. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 7ª série/8º ano – Volume 3
    - Situação de Aprendizagem 1 – Expandindo a Linguagem das Equações

3. Experiências Matemáticas – 7ª série
    - Atividade 3 – Resolução de Equações do 1º Grau com uma Incógnita (p.37)

4. + Matemática – Coletânea de Atividades – Volume 3
    - Atividade 10 – Representações Algébricas (p.45)
    - Atividade 11 – Expressões Algébricas (p.50)
    - Atividade 14 – Equações (p.67)
    - Atividade 15 – Resolução de Equações do 1º Grau com uma Incógnita (p.71)

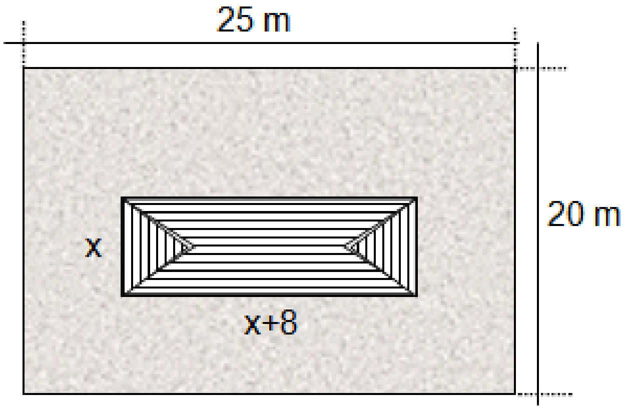
5. Novo Telecurso – Ensino Fundamental - DVD 7
    - Aula 62 – Equação do 1º Grau

Habilidade:

Resolver problemas que envolvam equações do 2º grau.

Questão 05

Uma casa no formato retangular foi construída em um terreno também retangular, conforme mostra a figura. Na área restante do terreno foi plantado 260 m^2 de grama. Sabe-se que o comprimento da casa é 8 metros maior que a largura.



Pode-se dizer que a medida do perímetro da casa é um número compreendido entre

(A) 32 m e 42 m.

(B) 42 m e 52 m.

(C) 62 m e 72 m.

(D) 72 m e 82 m.

Comentários e recomendações pedagógicas

A equação do 2º grau é trabalhada no caderno do 2º bimestre da 8ª série (9º ano). A sugestão do caderno é introduzir as equações do 2º grau por meio de situações-problema e verificar que os métodos anteriores de resolução de equações devem ser ampliados de forma a dar conta de alguns problemas mais elaborados.

Os livros didáticos, em geral, também trabalham esse conteúdo no 9º ano. No caderno da 1ª série do Ensino Médio o aluno trabalha as funções polinomiais do 2º grau e resolve problemas que recaem em equações do 2º grau.

Sendo assim, é esperado que o aluno da 3ª série do Ensino Médio domine a habilidade em resolver problemas envolvendo equações do 2º grau, pois em muitos contextos, sejam matemáticos ou outras disciplinas como Física ou Química, o aluno depara com essas equações, e isso faz parte de sua formação básica auxiliando-o a desenvolver sua competência em compreender os fenômenos ao seu redor.

Grade de correção:

Alternativas	Justificativa
(A) 32 m e 42 m	Resposta incorreta. O aluno pode ter encontrado a equação que está associada ao problema, calculado os valores de 12 m e 20 m para as medidas dos lados da casa, mas em seguida soma esses dois valores, obtendo 32.
(B) 42 m e 52 m	Resposta incorreta. O aluno pode ter encontrado a equação que está associada ao problema, resolve a equação e possivelmente comete erro de sinal na resolução, tomando a resposta negativa, obtendo 20 e 28 para as dimensões da casa e soma esses valores. Ou possivelmente soma as medidas fornecidas dos lados do terreno, obtendo o valor 45.
(C) 62 m e 72 m	**Resposta correta**. O aluno, possivelmente, verifica que a área do terreno é 500 m^2. Se a área gramada é 260 m^2, então a área da casa é 240 m^2. Obtém assim a equação $x (x + 8) = 240$, que resolvida fornece respostas 12 e -20, esta última desprezada. Assim, as dimensões da casa são 12 m e 20 m e o perímetro do retângulo é 64 m.
(D) 72 m e 82 m	Resposta incorreta. O aluno pode ter encontrado a equação que está associada ao problema, e tê-la resolvido incorretamente, ou ter utilizado os valores de forma indevida.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 8ª série/9º ano – Volume 2

- Situação de Aprendizagem 1 – Alguns métodos para resolver equações de 2º grau
- Situação de Aprendizagem 2 – Equações de 2º grau na resolução de problemas
- Situação de Aprendizagem 3 – Representação gráfica de grandezas proporcionais e de algumas não proporcionais

2. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 1ª série – Volume 2

- Situação de Aprendizagem 1 – Funções como relações de interdependência
- Situação de Aprendizagem 3 – Funções do 2º grau: significado, gráficos, intersecções com os eixos, vértices, sinais
- Situação de Aprendizagem 4 – Problemas envolvendo funções do 2º grau em múltiplos contextos; problemas de máximos e mínimos

3. Revista do Professor – São Paulo faz Escola – Recuperação – 1ª série – Ensino Médio

- Aula 7 – Alguns métodos para resolver equações de 2º grau
- Aula 8 – Resolvendo equações de 2º grau
- Aula 9 – Equações de 2º grau na resolução de problemas
- Aula 10 – Mais problemas com equações de 2º grau

4. Experiências Matemáticas – 8ª série
   - Atividade 16 – Equações de 2º grau (p.207)
   - Atividade 17 – Resolução de equações de 2º grau (p.221)
   - Atividade 18 – A fórmula de Bháskara (p.231)
   - Atividade 21 – Problemas (p.265)

5. Novo Telecurso – Ensino Fundamental – DVD 8
   - Aula 73 – Equação do 2º grau
   - Aula 74 – Deduzindo uma fórmula
   - Aula 75 – Equacionando problemas II

6. Novo Telecurso – Ensino Médio – DVD 3
   - Aula 24 – A equação do 2º grau
   - Aula 25 – A fórmula da equação do 2º grau
   - Aula 26 – Problemas do 2º grau

7. Novo Telecurso – Ensino Médio – DVD 4
   - Aula 31 – A função do 2º grau

8. IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada
   - Prof. Elon Lages Lima – Equações e problemas do 2º grau.
     Disponível em <http://video.impa.br/index.php?page=julho-de-2009>. Acesso em: 9 de janeiro de 2012
   - Prof. Elon Lages Lima – Equações do 2º grau.
     Disponível em <http://video.impa.br/index.php?page=julho-de-2011>. Acesso em: 9 de janeiro de 2012
   - Aula 62 – Equação do 1º Grau

Habilidade:

Resolver problemas em diferentes contextos, envolvendo as relações métricas dos triângulos retângulos (Teorema de Pitágoras).

Questão 06

Na figura está representado o dispositivo de rodovias que interliga 5 cidades, com a indicação de algumas distâncias entre elas. Sabe-se também que a distância entre as cidades de Fermat e Euclides é o dobro da distância entre Gauss e Fermat. Assim, um motorista que partir da cidade de Euclides, com destino a Fermat, mas que necessita passar por Pascal e Gauss, deverá percorrer a distância de

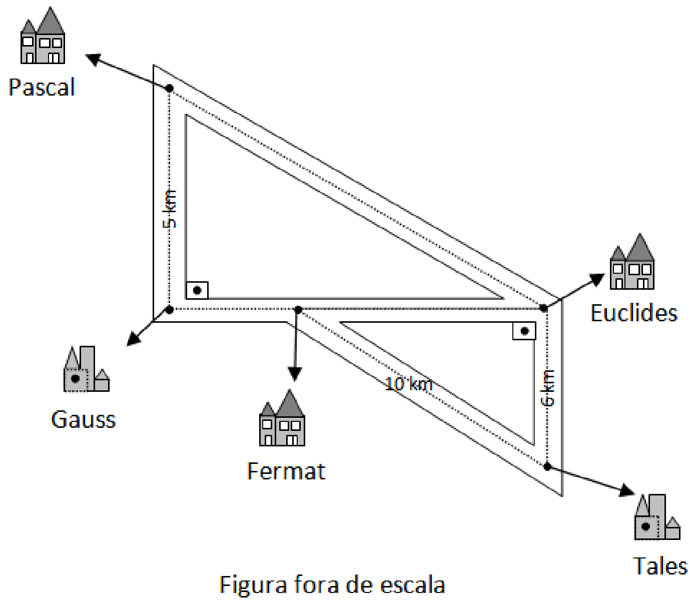


Figura fora de escala

(A) 13 km.

(B) 16 km.

(C) 21 km.

(D) 22 km.

Comentários e recomendações pedagógicas

A questão apresentada tem o objetivo de verificar a aplicação do Teorema de Pitágoras na resolução de problemas. Esse conceito é importantíssimo na matemática, tanto para ser aplicado na resolução de diversos problemas contextualizados quanto para o estudo de outros conteúdos internos à matemática como a trigonometria, a geometria analítica, o estudo da circunferência etc.

Os alunos tomam o primeiro contato com esse conceito no final do 8º ano. Ele é introduzido a partir de um contexto histórico e logo em seguida é mostrada uma verificação da relação do terno pitagórico (3, 4, 5) geometricamente. Daí para frente mostra-se que há outros ternos pitagóricos até que se conclua que a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos.

No problema em questão os triângulos a serem resolvidos correspondem a dois ternos pitagóricos bem conhecidos (6, 8 e 10) e (5, 12 e 13), o que permite a resolução apenas com cálculos mentais.

Grade de correção:

Alternativas	Justificativa
(A) 13 km	Resposta incorreta. Possivelmente o aluno calcula corretamente a medida da hipotenusa do triângulo maior e assume esse valor como resposta sem considerar a proposta do problema.
(B) 16 km	Resposta incorreta. Possivelmente o aluno soma as medidas fornecidas do triângulo menor.
(C) 21 km	Resposta incorreta. O aluno, possivelmente, fornece como resposta a soma de todas as medidas fornecidas na figura.
(D) 22 km	**Resposta correta**. O aluno aplica o teorema de Pitágoras no triângulo menor, descobre a medida não fornecida da hipotenusa, interpreta a informação do problema e descobre a distância entre as cidades de Gauss e Fermat. Com esses dados pode encontrar a medida da hipotenusa do triângulo maior e obter todas as distâncias entre as cidades. Soma as distâncias por onde o motorista irá passar: 13 + 5 + 4 = 22.

Algumas referências

O estudo da temática em questão pode ser complementado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 7ª série/8º ano – Volume 4
    - Situação de Aprendizagem 3 – O Teorema de Pitágoras: padrões numéricos e geométricos

2. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 8ª série/9º ano –Volume 3
    - Situação de Aprendizagem 3 – Relações métricas nos triângulos retângulos: Teorema de Pitágoras

3. Novo Telecurso – Ensino Fundamental – DVD 6
    - Aula 54 – O Teorema de Pitágoras
    - Aula 55 – Aplicação do Teorema de Pitágoras

4. Novo Telecurso – Ensino Médio – DVD 2

- Aula 19 – O Teorema de Pitágoras

5. Software – Tem TOP10
   - Plataforma em flash que disponibiliza aulas sobre o teorema de Pitágoras e possui um quiz com questões sobre Pitágoras e seu teorema.

   Disponível em <http://nautilus.fis.uc.pt/mn/pitagoras/pitflash1.html>. Acesso em: 21 de julho de 2011

6. Experiências Matemáticas – 7ª série
   - Atividade 6 – Relação Pitagórica: uma verificação experimental (p.73)
   - Atividade 20 – Outra vez a relação de Pitágoras (p.227)

Habilidade:

Realizar operações simples com polinômios.

Questão 07

Considere o polinômio $p(x) = x^2 + ax + 3$. Sabe-se que $p(2) = 17$, ou seja, o valor numérico de $p(x)$, para x = 2 é 17. O polinômio $p(x) - (2x^2 - 3x + 1)$ é

(A) $- x^2 + 8x + 2$

(B) $x^2 - 8x + 2$

(C) $- x^2 + 20x +2$

(D) $- x^2 + 5x + 2$

Comentários e recomendações pedagógicas

O trabalho com polinômios inicia-se na 7ª série/8º ano – volume 3 focando a interpretação geométrica de cálculos algébricos proporcionando um trabalho rico por meio da linguagem algébrica e geométrica, no entanto, nesse período escolar não foi priorizado as operações com os polinômios com muitos termos e com mais de duas variáveis. Este conteúdo é retomado e ampliado na 3ª série do Ensino Médio – volume 2. Espera-se que os alunos nesse nível de ensino possam resolver o problema utilizando conhecimentos acumulados nas séries do ensino médio relativos a equações e funções, convergindo às situações relativas aos polinômios.

Grade de correção:

Alternativas	Justificativa
(A) $- x^2 + 8x + 2$	**Resposta correta**. O aluno pode ter percorrido as seguintes etapas: fazendo $p(2) = 17$ obtém $a = 5$. Assim a operação a ser realizada é $x^2 + 5x + 3 - (2x^2 - 3x + 1) = - x^2 + 8x + 2$.
(B) $x^2 - 8x - 2$	Resposta incorreta. O aluno, possivelmente, percorre as seguintes etapas: fazendo $p(2) = 17$ obtém $a = 5$. Assim a operação que realizada indevidamente foi $(2x^2 - 3x + 1) - (x^2 + 5x + 3) = x^2 - 8x - 2$.
(C) $- x^2 + 2x + 4$	Resposta incorreta. O aluno, possivelmente, erra na aplicação da propriedade distributiva invertendo o sinal apenas do primeiro termo do segundo polinômio. Assim, a operação realizada foi $x^2 + 5x + 3 - 2x^2 - 3x + 1 = - x^2 + 2x + 4$
(D) $- x^2 + 5x + 2$	Resposta incorreta. Possivelmente o aluno resolveu assumido que $a = 2$. Assim a operação realizada foi $x^2 + 2x + 3 - (2x^2 - 3x + 1) = - x^2 + 5x + 2$

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental - 7ª série/8º ano – Volume 2
   - Situação de Aprendizagem 2 – Produtos notáveis: significados geométricos
   - Situação de Aprendizagem 3 – Álgebra: fatoração e equações

2. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 3ª série – Volume 2
   - Situação de Aprendizagem 2 – Das formas qualitativas: relações entre coeficientes e raízes.

3. Experiências Matemáticas – 7ª série
   - Atividade 22 – Identificando polinômios (p.251)
   - Atividade 23 – Operando com polinômios (p.261)

4. Novo Telecurso – DVD 7 – Ensino Fundamental e Livro – Volume 2 – Ensino Fundamental
   - Aula 61 – Expressões algébricas. Livro – Volume 2 – Ensino Fundamental – Expressões algébricas (p.138)

Habilidade:

Resolver problemas que envolvam porcentagem em situações relacionadas à análise e a interpretação de diferentes índices estatísticos.

Questão 08

O gráfico abaixo mostra como estão distribuídas as 163 000 toneladas de ouro que já foram extraídas da Terra. Informa também a quantidade de ouro ainda não explorada, que se estima existir na Terra.

Fonte: **Revista Veja** 13/10/2010 – pág 94

Suponha que, do ouro ainda não explorado, fossem retiradas 37 000 toneladas e toda essa quantidade fosse empregada exclusivamente em joalheria, sem alterar as quantidades empregadas em outros usos. Nessa nova situação, o percentual do ouro empregado em joalheria passará a ser, aproximadamente,

(A) 60%.

(B) 62%.

(C) 70%.

(D) 74%.

Comentários e recomendações pedagógicas

Esta questão propõe a resolução de uma situação problema que envolve o cálculo de porcentagem. Este conteúdo é bastante explorado no Ensino Fundamental, desde o 5º ano / 4ª série se estendendo até o Ensino Médio, quer como conteúdo ou como recurso para a resolução de problemas nos diferentes eixos do currículo e outras áreas. Na referida questão os alunos localizam informações no infográfico que se referem a outras áreas do conhecimento.

Grade de correção:

Alternativas	Justificativa
(A) 60%	**Resposta correta.** O aluno calcula o valor 51% de 163 000, que corresponde a 83 130 toneladas. Na nova situação, o total de ouro explorado passaria a ser 163 000 + 37 000 = 200 000 e o percentual empregado em joalheria passaria a ser 83 130 + 37 000 = 120 130. Fazendo 100% corresponder a 200 000, o valor 120 130 corresponderá a aproximadamente 60%.
(B) 62%	Resposta incorreta. Provavelmente o aluno adicionou as 47 000 toneladas à nova situação e não 37 000 como pedido no problema.
(C) 70%	Resposta incorreta. O aluno, provavelmente, observou que 37 000 corresponde a aproximadamente 19% de 200 000 e pode ter somado esse valor a 51%.
(D) 74%	Resposta incorreta. O aluno, provavelmente, observou que 37 000 corresponde a aproximadamente 23% de 163 000 e pode ter somado esse valor a 51%.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 6ª série / 7º ano – Volume 3
   - Situação de Aprendizagem 2 – Razão e Proporção
   - Situação de Aprendizagem 4 – Gráfico de setores e proporcionalidade

2. Experiências Matemáticas – 5ª série
   - Atividade 36 – Porcentagens/Gráficos (p.367)

3. Experiências Matemáticas – 7ª série
   - Atividade 29 – Matemática Comercial (p.325)

4. Novo Telecurso – Ensino Fundamental– DVD 3
   - Aula 27 – Quantos por cento?

5. Novo Telecurso– Ensino Médio– DVD 4
   - Aula 38– À vista ou a prazo?
   - Livro – Volume 2 – Ensino Fundamental – Expressões algébricas (p. 138)

RPM-3EM-AAP-20130516-1712.indd 21 16/05/2013 17:13:16

Habilidade:

Resolver problema que envolva razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente).

Questão 09

Para calcular a medida da largura de um rio, em que uma das margens estava inacessível, um topógrafo realizou as seguintes operações:

- Visualizando uma árvore na margem inacessível (ponto A), marcou no terreno os pontos B e C, numa perpendicular às margens do rio, com BC = 45 m, de forma que o prolongamento de $\overline{BC}$ contenha A.
- Marcou no terreno o ponto D de maneira que $\overline{DC}$ fosse paralela às margens do rio e constatou que os ângulos $A\hat{D}B$ e $B\hat{D}C$ mediam 30°, conforme indicado na figura.

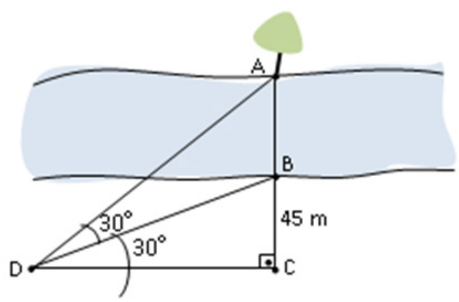


Figura fora de escala

Dados:

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Com base nessas informações, determine a medida do segmento $\overline{AB}$, que corresponde à largura do rio.

Comentários e recomendações pedagógicas

Esta questão possui conteúdo básico do 4º bimestre da 1ª série do Ensino Médio que estabelece a relação entre a Geometria e a Trigonometria com foco no estudo das razões trigonométricas – seno, cosseno e tangente, que já foram estudadas na 8ª série / 9º ano nos Anos Finais do Ensino Fundamental (3º bimestre).

A questão retrata tais ideias, com a contextualização de uma situação prática a fim de definir uma medida inacessível. Essas ideias foram novamente exploradas nessa série.

Grade de correção:

Categorias para análise	Observação
O aluno reconhece a necessidade de cálculo por meio da tangente, sabendo que: **tg α = cateto oposto/cateto adjacente** **Com auxílio da tabela trigonométrica fornecida tem se que:** tg 30º = $\frac{45}{CD} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{45}{CD} \rightarrow CD = 45\sqrt{3}$ m tg 60º = $\frac{AC}{45\sqrt{3}} \rightarrow \sqrt{3} = \frac{AC}{45\sqrt{3}} \rightarrow AC = 135$m AB = AC – BC. Logo AB = 135 – 45 = 90 m	**Resposta correta.** O aluno tem total domínio da habilidade em questão.
tg 30º = $\frac{45}{CD} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{45}{CD} \rightarrow CD = 45\sqrt{3}$ m tg 30º = $\frac{AB}{45\sqrt{3}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{AB}{45\sqrt{3}} \rightarrow AC = 135$m	Provavelmente o aluno reconheceu que relação tangente deve ser aplicada, calculou corretamente o valor de CD, mas não aplicou corretamente a relação no triângulo ACD. A relação foi aplicada no triângulo ABD sem perceber que esse triângulo não é retângulo.
sen 30º = $\frac{45}{CD} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{45}{CD} \rightarrow CD = 90$ m sen 60º = $\frac{AC}{CD} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AC}{90} \rightarrow AC = 45\sqrt{3}$ m AB = $45\sqrt{3}$ - 45 m	O aluno compreende os procedimentos necessários para a solução, mas utiliza o valor do seno na relação $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$
tg 30º = $\frac{45}{CD} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{45}{CD} \rightarrow CD = 45\sqrt{3}$ m sen 30º = $\frac{AB}{45\sqrt{3}} \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AB}{45\sqrt{3}} \rightarrow AB = \frac{45\sqrt{3}}{2}$ m	Provavelmente o aluno reconheceu que relação tangente deve ser aplicada no triângulo BCD e calculou corretamente o valor de CD, mas aplicou a relação seno de forma incorreta no triângulo ABD sem perceber que esse triângulo não é retângulo.
O aluno registrou qualquer valor	O aluno não demonstrou as habilidades necessárias para resolver a questão.
Deixou em branco	O professor pode ter seu diagnóstico a partir de um trabalho individualizado com o aluno.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado ou retomado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental - 8ª série/9º ano – Volume 3

- Situação de Aprendizagem 2 – Triângulos: Um caso especial de semelhança
- Situação de Aprendizagem 3 – Relações métricas nos triângulos retângulos; Teorema de Pitágoras
- Situação de Aprendizagem 4 – Razões Trigonométricas dos Ângulos Agudos

2. Experiências Matemáticas – 8ª série
- Atividade 19 – O Triângulo retângulo e Pitágoras (p.241)
- Atividade 20 – Relações métricas nos triângulos retângulos (p. 259)

3. Revista do Professor: São Paulo faz escola- Recuperação, 1ª e 2ª séries EM –
- aulas: 21, 22 e 23

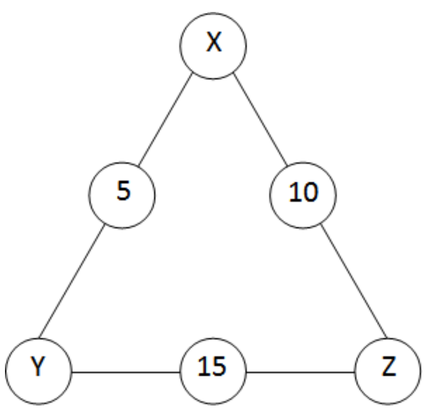
4. Novo Telecurso - Ensino Médio - DVD 4
- aula 40; Livro - volume 2, aula 40

Habilidade:

Resolver situações-problema por intermédio de sistemas lineares até a 3ª ordem.

Questão 10

A figura abaixo é formada por um dispositivo de forma triangular em que, nos vértices e nos pontos médios dos lados, estão representados alguns valores, nem todos conhecidos. Sabe-se que a soma dos valores correspondentes a cada lado do triângulo é sempre 24.



Determine os valores de x, y e z.

Comentários e recomendações pedagógicas

Os sistemas lineares constituem-se em uma ferramenta importante na resolução de situações-problema contextualizadas. A descrição de alguns contextos permite que sejam escritas as equações e que após a resolução do sistema, os valores encontrados para as incógnitas possam ser avaliados à luz do contexto inicialmente proposto.

Para a resolução dos sistemas obtidos a partir de situações-problema contextualizadas, sugerimos que o professor estimule seus alunos a utilizar, inicialmente, os métodos estudados nas séries finais do Ensino Fundamental, isto é, os métodos de adição, substituição ou comparação e, caso o aluno tenha conhecimento de outros métodos, deve procurar aplicá-los.

Salientamos a importância do professor trabalhar as diversas formas de resolução de Sistemas Lineares de maneira que o aluno possa fazer investigações sobre a opção mais conveniente em cada situação.

Grade de correção:

Categorias para análise	Observação
Da leitura do problema obtém-se o sistema $\begin{cases} x+y+5=24 \\ x+z+10=24 \\ y+z+15=24 \end{cases}$ Que é equivalente ao sistema $\begin{cases} x+y=19 \\ x+z=14 \\ y+z=9 \end{cases}$ Resolvendo-o, obtemos os seguintes valores: x = 12, y = 7 e z = 2	**Resposta correta**. O professor pode ampliar tal habilidade trabalhando com outras situações onde está presente a habilidade em questão.
O aluno representa corretamente o sistema a partir das informações disponibilizadas no enunciado da questão, porém erra na sua resolução pelo método da substituição.	O professor pode trabalhar os procedimentos de resolução de sistemas lineares pelos métodos da substituição de variáveis.
O aluno estrutura corretamente o sistema a partir das informações disponibilizadas no enunciado da questão, porém erra na sua resolução pelo método do escalonamento.	O professor pode trabalhar os procedimentos de resolução de sistemas lineares pelos métodos do escalonamento.
O aluno estrutura corretamente o sistema a partir das informações disponibilizadas no enunciado da questão, porém apresenta erros na sua resolução pelo método de Cramer.	O professor pode trabalhar os procedimentos de resolução de sistemas lineares pelos métodos do escalonamento.

O aluno não consegue estruturar o sistema baseado nas informações apresentadas no enunciado da questão	O professor pode trabalhar com o aluno a habilidade de traduzir o problema para a linguagem matemática. Para isso, pode desenvolver atividades de leitura de um problema, que se constituem no primeiro passo no caminho da transposição para a linguagem algébrica.
O aluno demonstra total falta de domínio da habilidade avaliada ou deixou em branco.	O professor pode retomar situações que envolva a habilidade indicada.

Algumas referências:

O estudo da temática em questão pode ser complementado observando as propostas apresentadas nos seguintes materiais:

1. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Fundamental – 7ª série/8º ano – Volume 3
   - Situação de Aprendizagem 3 – Sistemas de Equações Lineares

2. Caderno do Professor: Matemática – Ensino Médio – 2ª série – Volume 2
   - Situação de Aprendizagem 3 – Sistemas Lineares em Situações-Problemas
   - Situação de Aprendizagem 4 - Resolução de Sistemas Lineares: Escalonamento x Cramer

3. Novo Telecurso – Ensino Fundamental – DVD 7
   - Sistema do 1º Grau

4. Novo Telecurso – Ensino Médio – DVD 2
   - Aula 11 – Sistemas Resolvem Problemas

5. Experiência Matemáticas – 7ª série
   - Atividade 27 – Resolvendo Algebricamente um Sistema de Equações do 1º Grau com duas Incógnitas (p.301)

Bibliografia

São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. **Caderno do Professor: Matemática, Ensino Fundamental – 5ª a 8ª séries**. Volumes 1 a 4. Coordenação geral: Maria Inês Fini; equipe, Carlos Eduardo de Souza Granja, José Luiz Pastori, Nilson José Machado, Roberto Pérides Moisés, Rogério Ferreira da Fonseca, Ruy César Pietropaolo, Walter Spinelli. – São Paulo: SEE, 2009.

São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. **Caderno do Professor: Matemática, Ensino Médio – 1ª a 3ª séries**. Volumes 1 a 4. Coordenação geral: Maria Inês Fini; equipe, Carlos Eduardo de Souza Granja, José Luiz Pastori, Nilson José Machado, Roberto Pérides Moisés, Rogério Ferreira da Fonseca, Ruy César Pietropaolo, Walter Spinelli. – São Paulo: SEE, 2009.

São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Experiências Matemáticas: 5ª a 8ª séries**. São Paulo: SE / CENP, 1997.

Novo Telecurso. Matemática – Ensino Fundamental. Aulas em Vídeo: Fundação Roberto Marinho. Disponível em <http://www.telecurso.org.br> acesso em 20/01/2012.

Novo Telecurso. Matemática – Ensino Médio. Aulas em Vídeo: Fundação Roberto Marinho. Disponível em <http://www.telecurso.org.br> acesso em 20/01/2012.

IMPA, INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA. Aulas em Vídeo. Disponível em <http://www.impa.br> acesso em 20/01/2012.

São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. **Revista do Professor: São Paulo Faz Escola: 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental**. Coordenação: Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2008.

São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. **Revista do Professor: São Paulo Faz Escola: 1ª e 2ª séries do Ensino Médio**. Coordenação: Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2009.

São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. **+ Matemática, coletânea de atividades**. Volumes Especial, 2 e 3: Coordenação: Maria Inês Fini. São Paulo: SEE, 2009.

Revista Nova Escola. Atividades. Disponível em <http://revistaescola.abril.com.br> acesso em 17/01/2012.

Avaliação da Aprendizagem em Processo
Comentários e Recomendações Pedagógicas – Matemática
3ª série do ensino médio

Coordenadoria de Gestão da Educação Básica
Coordenadora: Maria Elizabete da Costa

Coordenadoria de Informação, Monitoramento e Avaliação Educacional
Coordenadora: Maria Lucia Barros de Azambuja Guardia

CIMA – Departamento de Avaliação Educacional
Diana Yatiyo Mizoguchi
Maria Julia Filgueira Ferreira
Silvio Santos de Almeida
William Massei

CGEB – Matemática
João dos Santos, Juvenal de Gouveia, Otavio Yamanaka, Patricia de Barros Monteiro, Sandra Maira Zacarias Zen, Vanderlei Aparecido Cornatione

Revisão e leitura crítica – Professores Coordenadores dos Núcleos Pedagógicos das Diretorias de Ensino

Eduardo Granado Garcia; Emerson de Souza Silva; Inês Chiarelli Dias; Ivan Castilho; João Acácio Busquini; Mário José Pagotto; Robson Rossi; Sílvia Mendes Moreira; Zilda Meira de Aguiar Gomes..

Autoria; Leitura e Revisão Crítica.

Angélica da Fontoura Garcia Silva, Juvenal de Gouveia; Marlene Alves Dias, Patricia Monteiro, Raquel Factori Canova.

Revisão de Texto – Professor Coordenador do
Núcleo Pedagógico da Diretoria de Ensino Norte 2
Ademilde Ferreira de Souza