CONSTRUINDO CAIXAS

"Existe uma enorme diferença entre reconhecerem o direito de uma pessoa à instrução e obrigarem-na a ter uma instrução que não deseja e de que não precisa. E que, além disso, a impede de aprender a trabalhar."

Paulo Geraldo

Objetivos

- Definir paralelismo e perpendicularismo entre retas e segmentos.
- Definir retângulos.
- Trabalhar a construção de retângulos.
- Trabalhar o conceito de área e volume de retângulo.
- Verificar a presença de números irracionais em situações reais.
- Trabalhar o conceito de função.
- Trabalhar gráficos de funções dos 2º e 3° graus e algumas de suas propriedades.

Conteúdos

- Quanto cabe? Conceito de volume.
- Gráficos para a área e para o volume.
- A função das funções. Expressões gráficas para área e volume.

Público-Alvo

Alunos de 1ª, 2ª e 3ª séries do Ensino Médio.

Duração

8 aulas.

Material

- Tesoura
- Cola
- Fita crepe
- Tinta preta para impressora
- Xerox
- Lápis preto
- Lápis de cor
- Borracha
- Caneta
- Papel sulfite
- Papel-cartão
- Papel vegetal
- Transferidor
- Esquadros 45° e 30°/60°
- Régua
- Papel milimetrado
- Material dourado
- Fita adesiva

Introdução

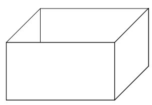
A construção de caixas pode ser uma atividade muito rica no desenvolvimento de conteúdos de matemática para os alunos do Ensino Médio, na medida em que o professor envolve diversos conceitos a serem explorados na construção desses artefatos. Desde a geometria plana, passando pela álgebra e atingindo a geometria analítica, os conteúdos vão sendo apresentados nas diversas etapas dessa construção.

O simples fato de cortar, dobrar, colar etc. alivia a tensão provocada pela aula tradicional da sala de aula e o aluno vai aprendendo sem precisar saber que está sendo ensinado.

As tarefas incluem trabalho com régua e esquadros, senso espacial e raciocínio geométrico, além da manipulação de papel milimetrado para a construção de gráficos. Fórmulas de área de paralelogramo e volume de paralelepípedo serão verificadas e aplicadas. Funções de segundo grau explorando ponto de máximo e raízes serão tratadas.

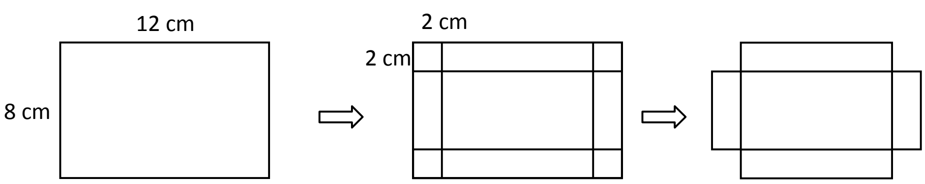
1ª Tarefa: Quanto cabe?
Tempo estimado: 3 aulas

O primeiro trabalho desta tarefa é construir caixas com papel sulfite com o objetivo de conceituar volume como a medida de unidades que podem ser preenchidas no interior do objeto. As caixas a serem construídas serão bastante simples. Sua planificação será desenhada numa folha de sulfite, que deverá ser recortada, dobrada e colada ou presa com fita adesiva. As caixas deverão, após montadas, ter o formato de uma "caixa de sapato sem a tampa", ou seja, um paralelepípedo sem a parte superior.



A turma poderá se organizar em grupos de quatro ou cinco alunos. Cada grupo recebe algumas folhas de sulfite, esquadros, tesoura, fita adesiva e cubinhos do material dourado.

A primeira caixa a ser montada deve ser iniciada com a construção de um retângulo de lados 12 cm por 8 cm. Em seguida, faixas com 2 cm em cada lado devem ser desenhadas. As folhas serão cortadas para assumir a seguinte forma:



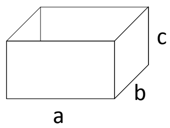
Enquanto as caixas são desenhadas, informações sobre conceitos de geometria serão disponibilizadas, tais como: retas-suporte, retas paralelas e perpendiculares, ângulos retos e área de retângulo.

Após a caixa ter sido montada, peça para que os alunos preencham seu interior organizando cubinhos do material dourado e questione quantas unidades desses cubinhos cabem nessa caixa.

Crie outras medidas para as caixas, como por exemplo:

- 10 cm x 8 cm com faixas de 2 cm;
- 8 cm x 8 cm com faixas de 2 cm;
- 8 cm x 6 cm com faixas de 1 cm;
- 10 cm x 8 cm com faixas de 3 cm etc.

Para cada caixa montada, é importante que os alunos registrem quantos cubinhos cabem, no total, em seu interior. Peça que procurem uma relação entre as medidas das arestas das caixas e seu volume. Sociabilize com os alunos as fórmulas encontradas.



$$\boxed{V_s = a.b.c}$$

Depois dessa discussão e de ter chegado a uma conclusão sobre a fórmula do volume do paralelepípedo, dê medidas de retângulos diferentes, e com lados maiores que os construídos, para que os alunos deduzam seu volume, sem precisar construí-los. Por exemplo, retângulo com medidas de lados de 30 cm por 20 cm e faixas de 4 cm, cujo volume será de 1.056 cm3.

2ª Tarefa: Gráficos para a área e o volume
Tempo estimado: 2 aulas

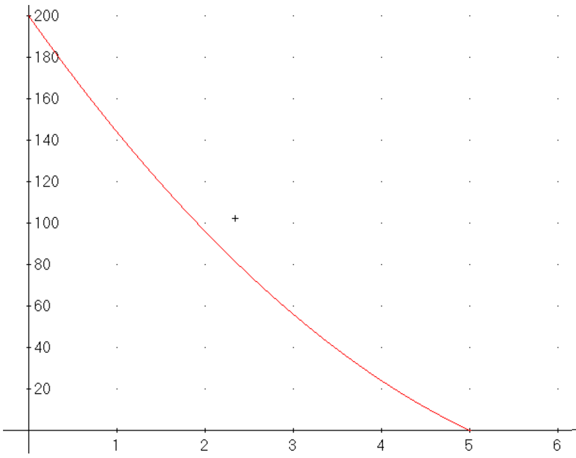
O objetivo desta tarefa é que os alunos reconheçam que a área da base e o volume da caixa de papel, montada com um retângulo com medidas de lados fixadas, variam conforme se varia a medida das faixas usadas para o recorte das abas.

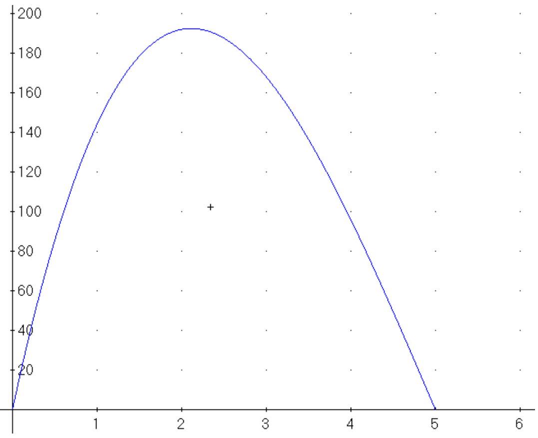
Para cada grupo de alunos formado por quatro elementos, será distribuída uma folha de tarefa do Anexo I para ser preenchida de acordo com os valores determinados para as medidas dos lados do retângulo e da largura da faixa. Neste momento iremos supor que a caixa será construída partindo de um retângulo com medida de lados 20 cm por 10 cm. Várias hipóteses sobre a área do fundo das caixas e seu volume devem ser levantadas, conforme se varia a largura da faixa. Peça para os alunos verificar várias medidas que a faixa pode assumir e preencher as tabelas com alguns desses valores. Determinar as medidas das arestas que a caixa assumirá com determinados valores da faixa e calcular a área do fundo da caixa, colocando os valores numa tabela e calculando o volume colocando os valores em outra tabela.

Veja se os alunos têm percepção sobre os valores máximo e mínimo que a faixa pode assumir. Extrapole a discussão para o caso de se atribuir à faixa todos os valores possíveis. Neste caso, o intervalo será considerado um "Intervalo Sobre **R**" e poderá ser representado por $\int =]0,10[$ ou $\int = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 10\}$.

Utilizando os pares de eixos cartesianos da folha de tarefa, peça para os alunos construir os gráficos de acordo com a tabela por eles preenchida.

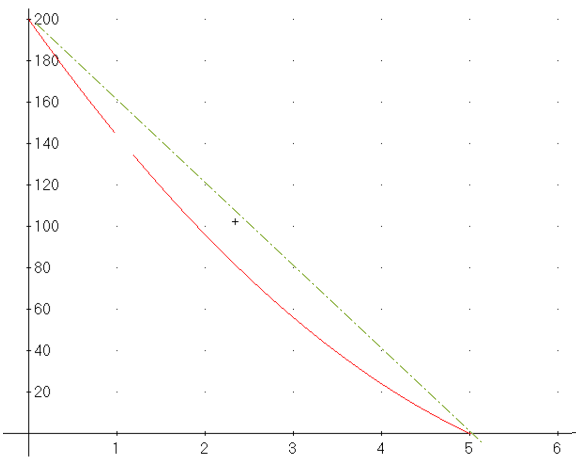
Os gráficos devem ter o aspecto parecido com os das figuras abaixo. Peça que os alunos conjecturem sobre a possível função relacionada aos gráficos.

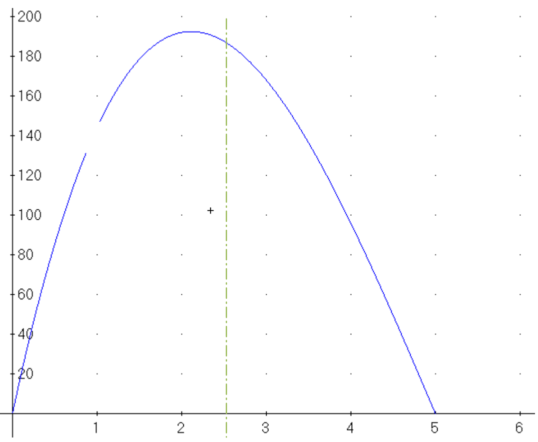




Caso os alunos digam que o primeiro gráfico representa uma função polinomial do primeiro grau, peça para que eles coloquem uma régua passando pela ordenada 200 e pela abscissa 5 para ver que o gráfico não se trata de uma reta. Isso permite descartar tal hipótese.

E se os alunos chegarem à conclusão de que o segundo gráfico representa uma função polinomial do segundo grau, peça que eles marquem sobre o eixo das abscissas o valor médio entre 0 e 5 (ponto médio) e tracem uma perpendicular para perceberem que o ponto de máximo do gráfico não está na perpendicular, isto é, o gráfico não é simétrico. Isso permite descartar tal hipótese.





3ª Tarefa: A função das funções

Tempo estimado: 3 aulas

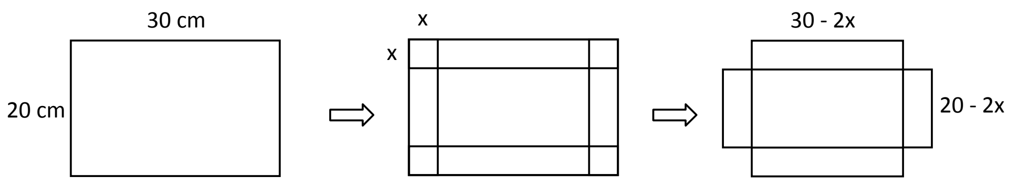
O objetivo desta tarefa é que os alunos expressem a área do fundo da caixa e o volume da caixa por meio de funções. Para isso os alunos receberão folhas de sulfite para desenharem faixas pelas suas bordas a fim de construir caixas. Pode-se supor nesta tarefa que a folha de sulfite tenha medidas de 30 cm por 20 cm, sem perda de generalidade.

Antes de efetivamente iniciar a tarefa, algumas questões deverão ser lançadas aos alunos:

- Quais as larguras máxima e mínima que a faixa pode assumir?
- Qual o volume da caixa na situação em que a faixa é mínima?
- Qual o volume da caixa na situação em que a faixa é máxima?

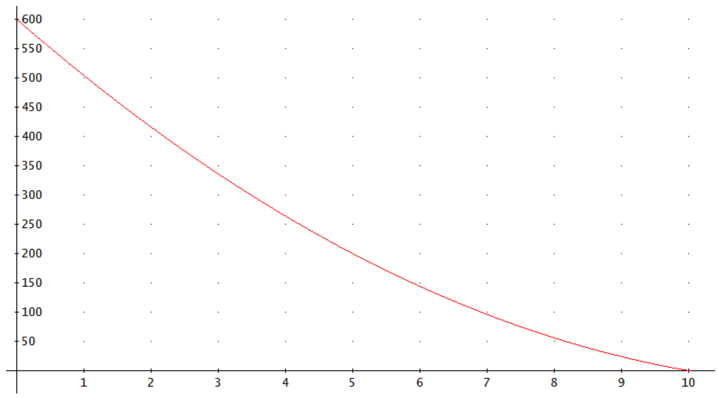
Peça que os alunos representem a medida da largura da faixa por x e determinem as medidas dos lados da base da caixa em função dessa variável.

Os alunos devem chegar às seguintes expressões:

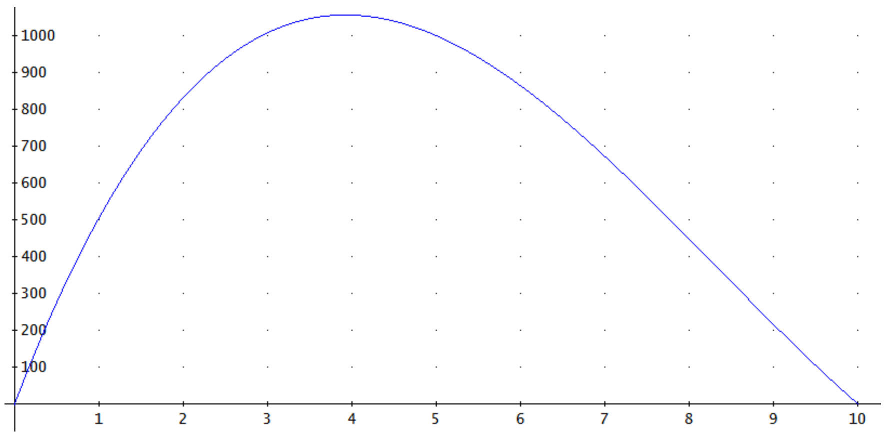


Agora perceba se os alunos chegaram à expressão da área do fundo da caixa. Se ainda tiverem dificuldades, vá usando números para exemplificar casos particulares até chegar ao caso geral. Aproveite para revisar a propriedade distributiva, pois os alunos usarão tal operação para chegar à expressão solicitada. Peça que eles discutam entre si sobre a expressão. Tendo a expressão, peça que a representem graficamente. Questione os valores máximos (0,600) e mínimo (10,0) do gráfico. Peça que determinem as raízes da função e discutam tais resultados. Lembre-os de que os dois valores não pertencem ao intervalo de validade da função.

Como fechamento desta tarefa, é importante deixar claro que o valor de x pertence a um intervalo dos números reais. Se chamarmos de L esse intervalo podemos representá-lo por $L = \{ x \in \mathbb{R} | 0 < x < 10\}$. Em seguida trabalha-se a expressão da área. A área de um retângulo de lados a e b é dada por $A = a.b$, então, a área do fundo da caixa, escrita como função de x será dada por $A(x) = (30\text{-}2x) \,.\, (20\text{-}2x)$, o que, após distribuir os termos e simplificar a expressão, se obtém $A(x) = 4x^2 - 100x + 600$, com $A{:}L \rightarrow \mathbf{R}$. O gráfico de tal função deve ser construído pelos alunos, mas também é importante tê-lo em tamanho grande (por exemplo em *flip-chart*) para poder exibi-lo sempre que necessário, inclusive neste momento para fixar melhor as diferentes formas de representação de uma mesma situação.

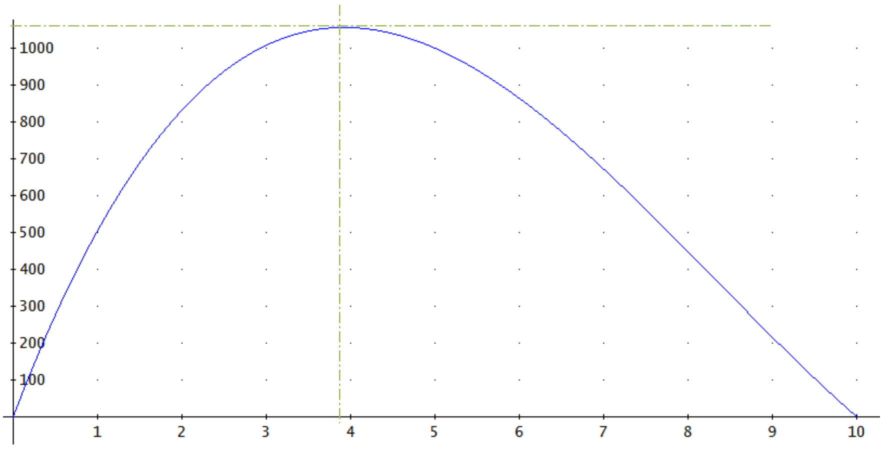


Agora verifique se os alunos chegaram à expressão do volume da caixa. Novamente, se perceber dificuldades por parte dos alunos, auxilie-os, usando valores específicos até chegar à expressão geral. Peça que eles discutam entre si sobre a expressão. Tendo a expressão, peça que a representem graficamente. Questione os valores (0,0) e (10,0) do gráfico. Peça para que estimem o valor da medida da faixa que permite obter o volume máximo e o valor do volume máximo. Peça também que, por meio do gráfico, verifiquem se os valores estimados são representantes do pico do gráfico.



Como fechamento desta tarefa, podem ser usadas algumas das percepções dadas pelos alunos, que provavelmente já devem ter observado que há um valor dado à faixa que permitirá que a caixa tenha um valor máximo. Por estimativa, esse valor deve ter sido dado por eles como 4 cm ou o número 5 cm, provavelmente. E que o volume máximo é ligeiramente maior que 1.000 cm^3. Acreditamos que este seja o momento para dizer que a função polinomial de terceiro grau e outros graus aparecem nessa e em outras situações práticas.

Informe a eles que a medida da faixa que permite o volume máximo é um número irracional, assim como o número PI ou uma raiz de um número primo. Aproximadamente, esse valor pode ser dado como 3,93 cm. Pode-se pedir que os alunos tracem uma reta perpendicular e outra paralela ao eixo das abscissas e que passem pelo pico do gráfico e percebam que o pé da perpendicular passa aproximadamente por 3,9 e a reta paralela passa um pouco acima do 1.000.



A função que se espera que os alunos cheguem será $V(x) = 4x^2 - 100x^2 + 600x$. Essa função é derivada da anterior, visto que, para se calcular o volume de um paralelepípedo de altura c, basta-se usar V=*área base*.c .Como a *área base* é a expressão obtida anteriormente e c é a altura da caixa, se chega a $V(x) = (4x^2 - 100x + 600).\, x$, o que finalmente se tem $V(x) = 4x^2 - 100x^2 + 600x$, com $V{:}L \rightarrow \mathbf{R}$.

O valor da medida da faixa que permite volume máximo e o valor do volume máximo serão obtidos pelos alunos por dedução e aproximação, principalmente pelo gráfico no momento em que traçam a perpendicular e a paralela. Mas o professor pode perceber que, se a função do volume for derivada, obtém-se $\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 200x + 600$, e que igualando essa derivada a zero, uma das raízes será a abscissa que permite o volume máximo. Nesse caso a raiz é $x = \frac{25 - 5\sqrt{7}}{3}$ cm, que é um número irracional. O volume máximo pode ser então aproximado quando se introduz na função V esse valor. Assim o volume máximo será $V = \frac{10000 + 7000\sqrt{7}}{27}$ cm^3 ou aproximadamente 1.056,3 cm^3.

Bibliografia

Gomide, E.F e Rocha, J.C. – **Atividades de laboratório de matemática** – CAEM – IME – USP. São Paulo, 2001.

Gouveia, J. **Estudo de Intervalo Sobre R a Partir de Situações Contextualizadas Aplicadas ao Ensino Médio e Superior.** Dissertação de Mestrado. São Paulo: Unicsul, 2007.

São Paulo (Estado) Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. **Experiências Matemáticas**: 5ª a 8ª série. São Paulo, 1994.

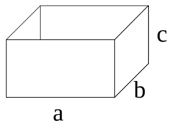
Walle, J.A. Van de. **Matemática no Ensino Fundamental:** Formação de professores e aplicação em sala de aula. 6 ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

Anexo I

Área e Volume do Paralelepípedo como função da faixa da aba

(Retângulo com medidas de 20 cm x 10 cm)

Medidas da caixa após montada



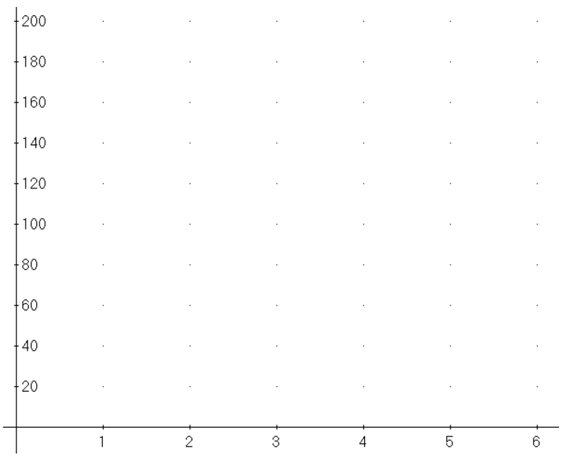
Faixa	Comprimento (a)	Largura (b)	Altura (c)

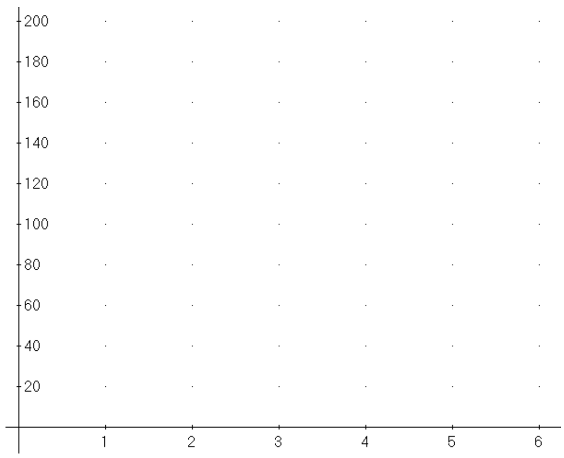
Área da base $A = a.b$

Faixa	Área

Volume da caixa $V = a.b.c$

Faixa	Área





Anexo II